Projeto de Controladores no Espaço de Estados

- LGR → transf. Laplace
- $G(j\omega)$ → domínio da frequência
- Espaço de estados → domínio do tempo

Introdução - Origens

- Eq. Diferencial de Ordem n →
  n eq. Diferenciais de 1ª ordem, Poincaré, Paris 1892

- Variáveis de Estado: ~1870 – Termodinâmica

- Métodos de espaço de estado em controle
  R. E. Kalman ~ 1960

Definição

- O **estado de um sistema** em um instante de tempo arbitrário $t = t_0$ é o **número mínimo de variáveis** $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$, ... $x_n(t_0)$, que permitem, em função de entradas conhecidas para $t \geq t_0$ descrever o **comportamento do sistema** p/ $t \geq t_0$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

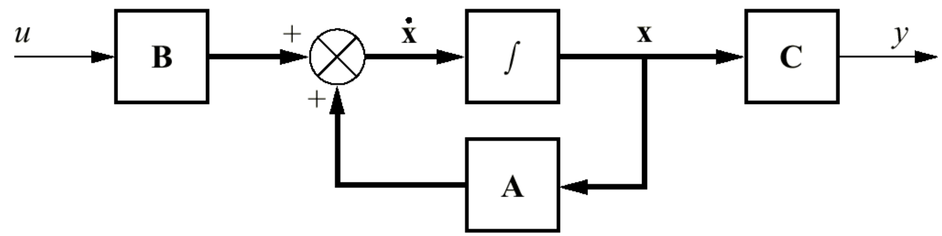
$u - Sinal\ de\ Entrada$

$y - Sinal\ de\ Saída$

$x - Vetor\ de\ Estados$

Representação no Espaço de Estados

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{nxn}x_n + B_{nxp}u_p \\ y_m = C_{nxn}x + D_{mxp}u \end{cases}$$



$A - Matriz\ de\ Sistema$

$B - Matriz\ de\ Entrada$

$C - Matriz\ de\ Saída$

$D - Matriz\ de\ Transmissão\ Direta$

	<u>*Sistema*</u>
$p > 1 \Rightarrow MIMO$	*Multidimensional*
$p = 1 \Rightarrow SIMO$	*Unidimensional*
$p = m = 1 \Rightarrow SISO$	*Escalar*

Objetivos de Controle

1. Rapidez
2. Rejeição de Perturbações
3. Economia de Energia
4. Transitório Amortecido
5. Controle Robusto (Variações da Planta)
6. Controlador Robusto (Falhas do Controlador)

Controle Ótimo

- Compromisso entre objetivos conflitantes

$$J = \int_{t_0}^{T} f(x,u,t)dt = Min \ (critério \ de \ otimização)$$

$$f = 1 \qquad - tempo \ mínimo$$

$$f = r^T |u| \qquad - consumo \ mínimo$$

$$f = r^T |u| + \lambda \qquad - compromisso \ tempo \ x \ consumo \ mínimo$$

$$f = u^T R u \qquad - energia \ de \ atuação \ mínima$$

$$f = x^T Q x + u^T R u - otimização \ linear \ quadrática, \ LQR$$

Todos estes critérios resultam em leis de controle que dependem do vetor de estados do sistema

O conjunto de variáveis de estado não é único

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = X_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ \hat{x}_2 = X_2(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ \vdots \\ \hat{x}_n = X_n(x_1, x_2, \ldots x_n) \end{cases}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x} \ \ (\mathbf{P} \ \textit{não singular})$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \\ y = C\mathbf{x} \end{cases}$$

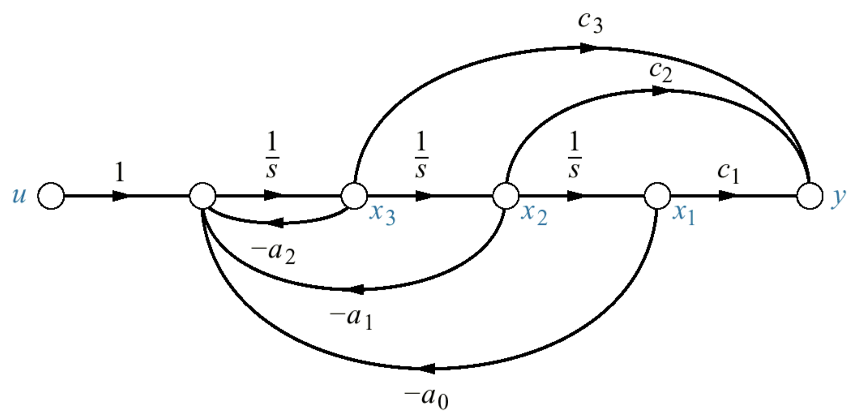
$$\mathbf{x} = P\mathbf{z}$$

$$\begin{cases} P\dot{\mathbf{z}} = P^{-1}AP\mathbf{z} + P^{-1}Bu \\ y = CP\mathbf{x} \end{cases}$$

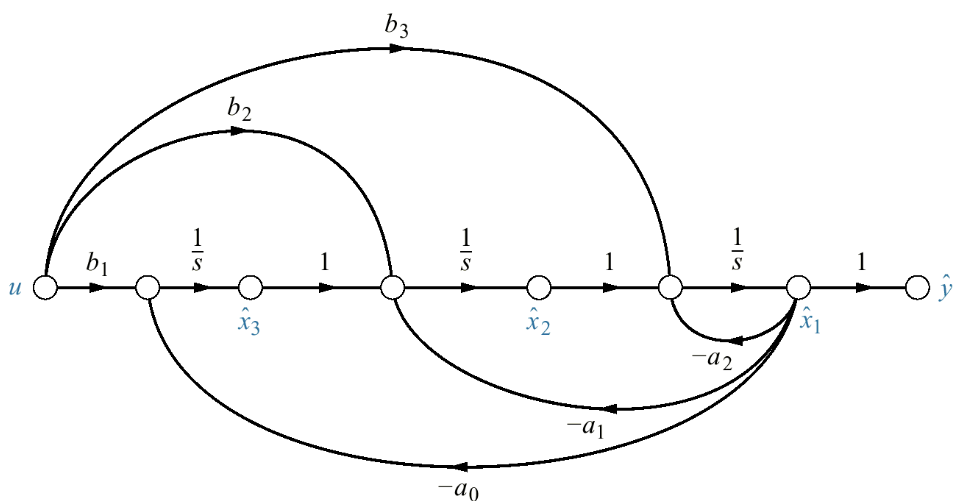
$$\left|\lambda I - A\right| = \left|\lambda I - P^{-1}AP\right|$$

(mas os autovalores são os mesmos)

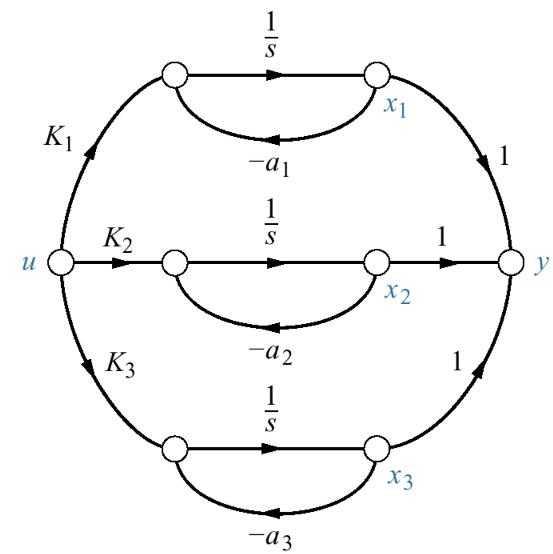
Formas Canônicas



Forma Canônica Controlável



Forma Canônica Observável



Forma Canônica Diagonal (Jordan, Modal)

Resposta dinâmica a partir das eqs. de estado

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \\ y = C\mathbf{x} + Du \end{cases}$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s) + (sI - A)^{-1} x(0)$$

$$e^{At} = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

$$Função\ de\ Transferência\ \ (Cond.\ Iniciais\ \ Nulas)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B + D$$

Controlabilidade e Observabilidade (Kalman, 1960)

- Controlabilidade: um sistema descrito por $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu,\ y = C\mathbf{x} + Du$ é completamente controlável se existir um vetor $u(t)$ que leve o sistema de qualquer estado inicial $x(t_0)$ a qualquer estado final $x(t_1)$, onde $t_1 > t_0$ arbitrário.

- Critério algébrico

$$posto\ [\ B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B\ ] = n$$

$$n - posto() \rightarrow \acute{e}\ a\ ordem\ do\ subsistema\ n\tilde{a}o\ control\acute{a}vel$$

- Observabilidade: um sistema descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu,\ \ y = C\mathbf{x} + Du$$

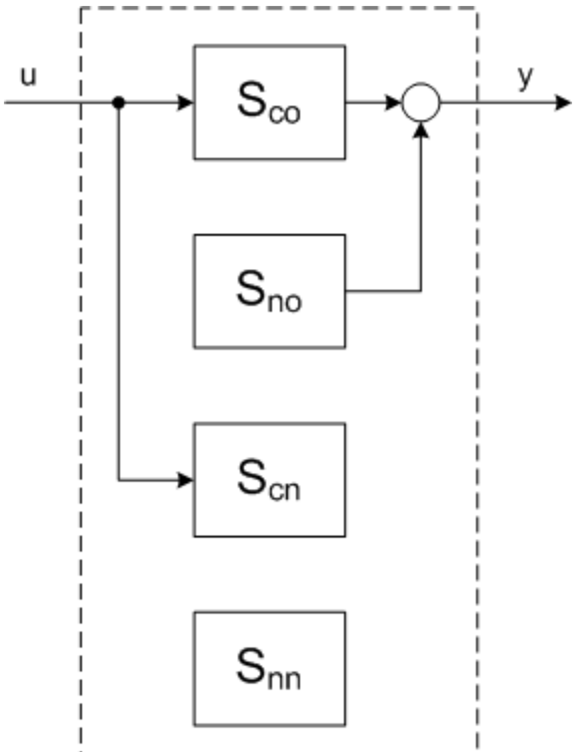
é completamente observável se todo vetor $x(t)$ pode ser reconstruído em qualquer intervalo $[t_0, t_1)$ em função dos sinais de entrada u(t) e saída y(t) no intervalo $[t_0, t_1]$ onde $t_1 > t_0$ arbitrário.

- Critério albébrico

$$posto\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n$$

$$n - posto() \rightarrow é\ a\ ordem\ do\ subsistema\ não\ observável$$

Possíveis componentes de um sistema



Subsistemas
- **C**ontrolável e **O**bservável
- **N**ão controlável, **O**bservável
- **C**ontrolável, **N**ão observável
- **N**ão Controlável e **N**ão Observável

Função de Transferência

$Y(s)/U(s) = S_{co}$ (pólos)

Autovalores consideram

$S_{co}, S_{no}, S_{cn}, S_{nn}$ (estabilidade)