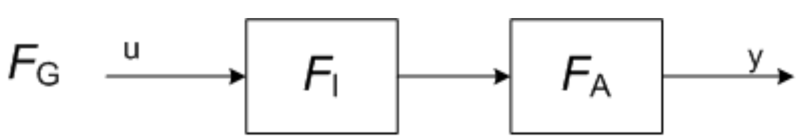
Exemplo – F_A e F_I em série

$$F_G = F_I F_A \qquad e \qquad F_H = F_A F_I$$

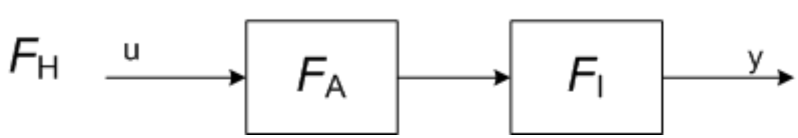
$$onde \quad F_A(s) = \frac{1 - sT}{1 + sT}; \qquad F_I(s) = \frac{-1}{1 - sT}$$

$$\left(Obs: \frac{1 - sT}{1 + ST} = \frac{-1 - sT + 2}{1 + ST} = -1 + \frac{2}{1 + ST} \right)$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/T & 0 \\ 1 & -1/T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/T \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 2/T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

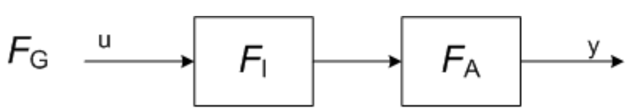


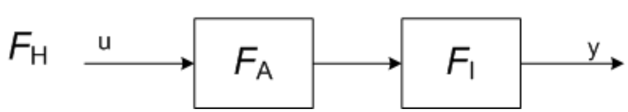
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/T & 0 \\ 2/T^2 & -1/T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1/T \end{bmatrix} u$$

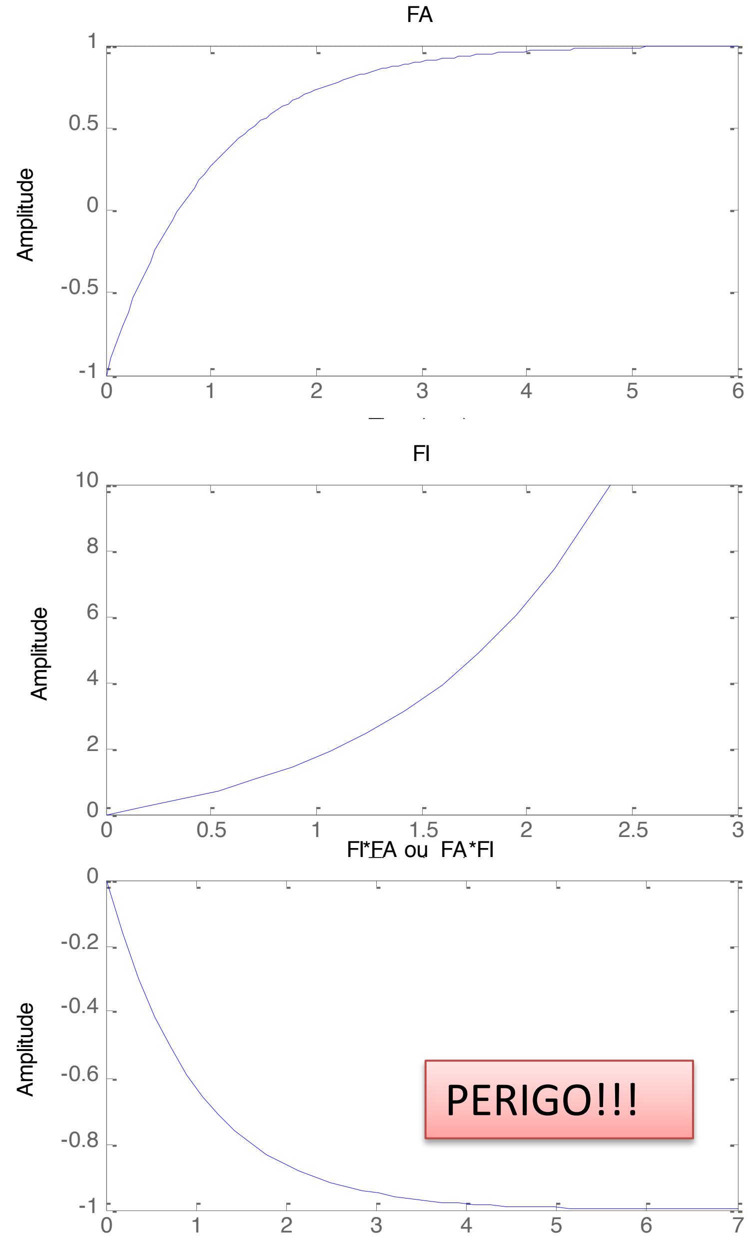
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ex. F_A e F_I em série

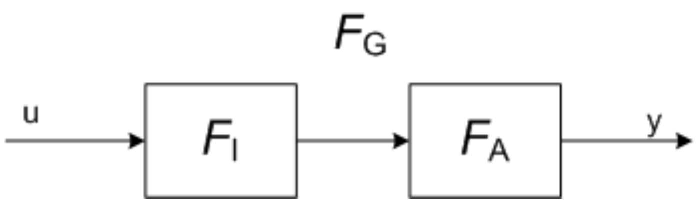
$$F_A(s) = \frac{1 - sT}{1 + sT}; \quad F_I(s) = \frac{-1}{1 - sT}$$

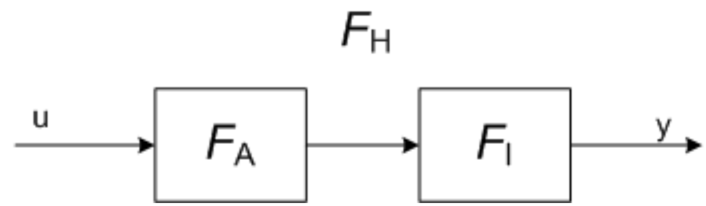






Exemplo – F_A e F_I em série





F_G :

$$posto\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = posto\begin{bmatrix} 1/T & 1/T^2 \\ 0 & 1/T \end{bmatrix} = 2$$

$$posto\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = posto\begin{bmatrix} -1 & 2/T \\ 1/T & -2/T^2 \end{bmatrix} = 1$$

Controlável, não plenamente observável!

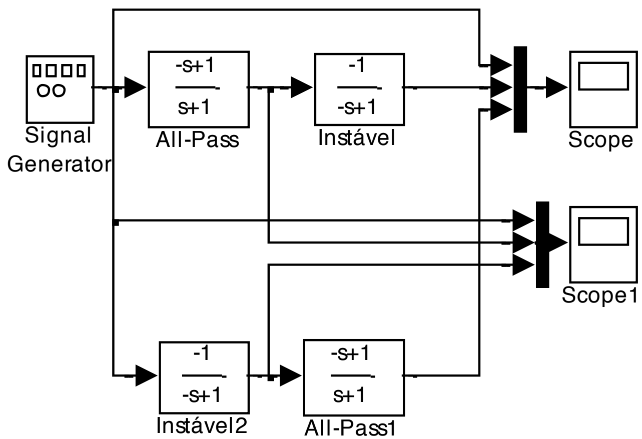
F_H :

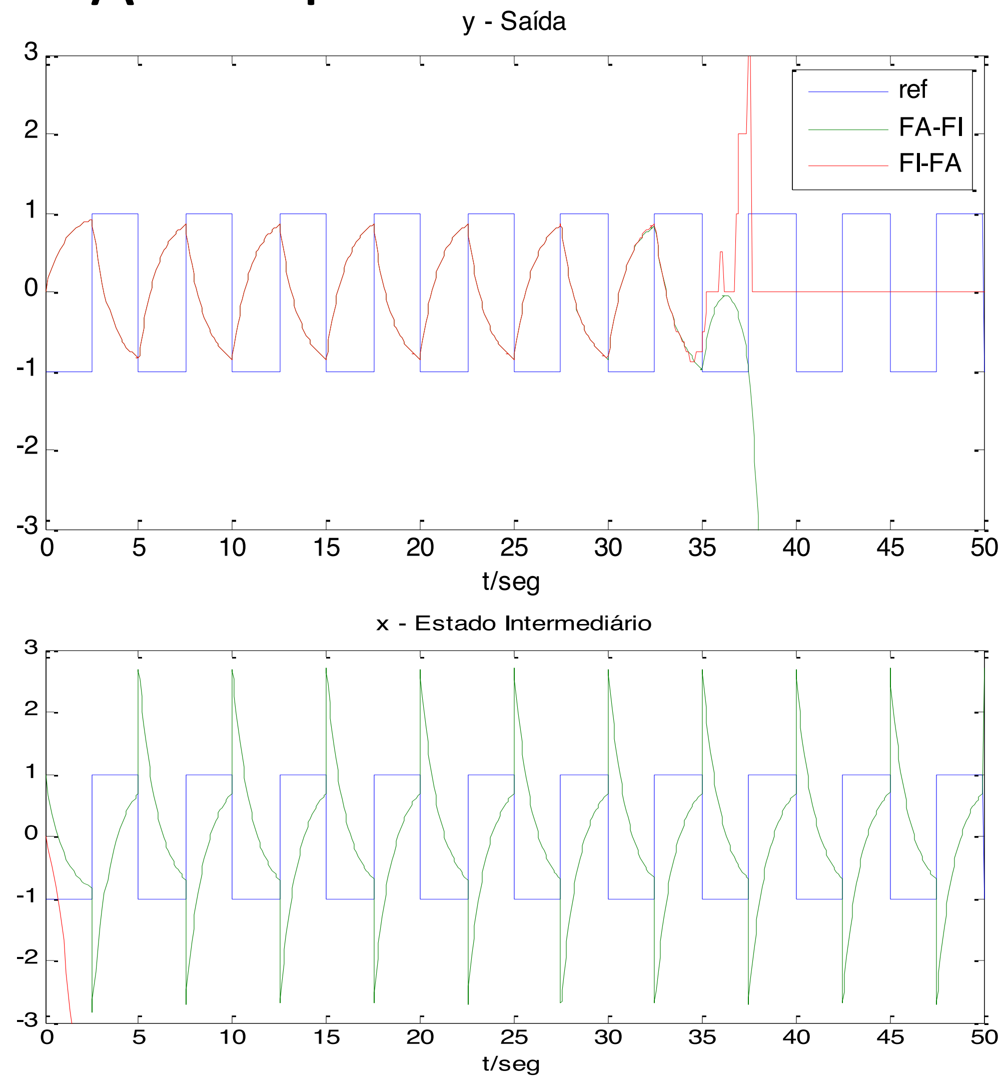
$$posto\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = posto\begin{bmatrix} 1 & -1/T \\ -1/T & 1/T^2 \end{bmatrix} = 1$$

$$posto\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = posto\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2/T^2 & 1/T \end{bmatrix} = 2$$

Observável, não plenamente controlável!

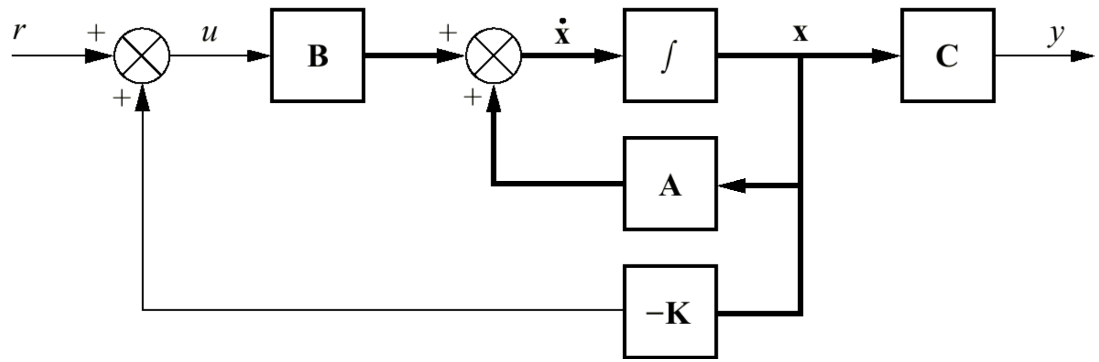
Exemplo – F_A e F_I em série





Controle no Espaço de Estados

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$



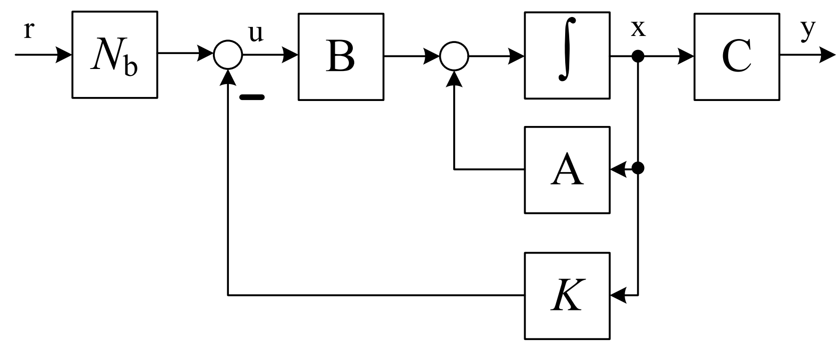
Lei de Controle:

$$Realimentação\ \ de\ \ Estados \Rightarrow u = -Kx = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + Br \\ y = Cx \end{cases}$$

Controle no Espaço de Estados com referência

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + BN_b r \\ y = Cx \end{cases}$$



N_b – fator de ajuste de ganho

Resposta a Sinais de Referência

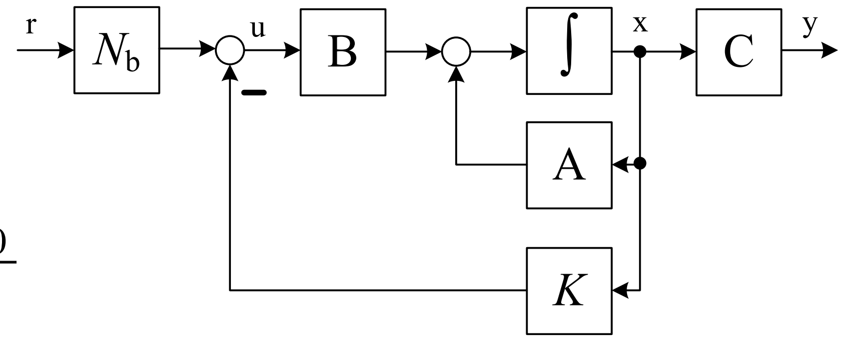
$$Y(s) = C(sI - A + BK)^{-1} BN_b R(s)$$

Para que não haja erro estático (e_{ss})

$$N_b = [C(-A + BK)^{-1} B]^{-1}$$

(*Na prática é bem mais simples ...*)

Cálculo do fator de ajuste de ganho



$$Em\ malha\ aberta$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}\cdots+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}\cdots+a_0}$$

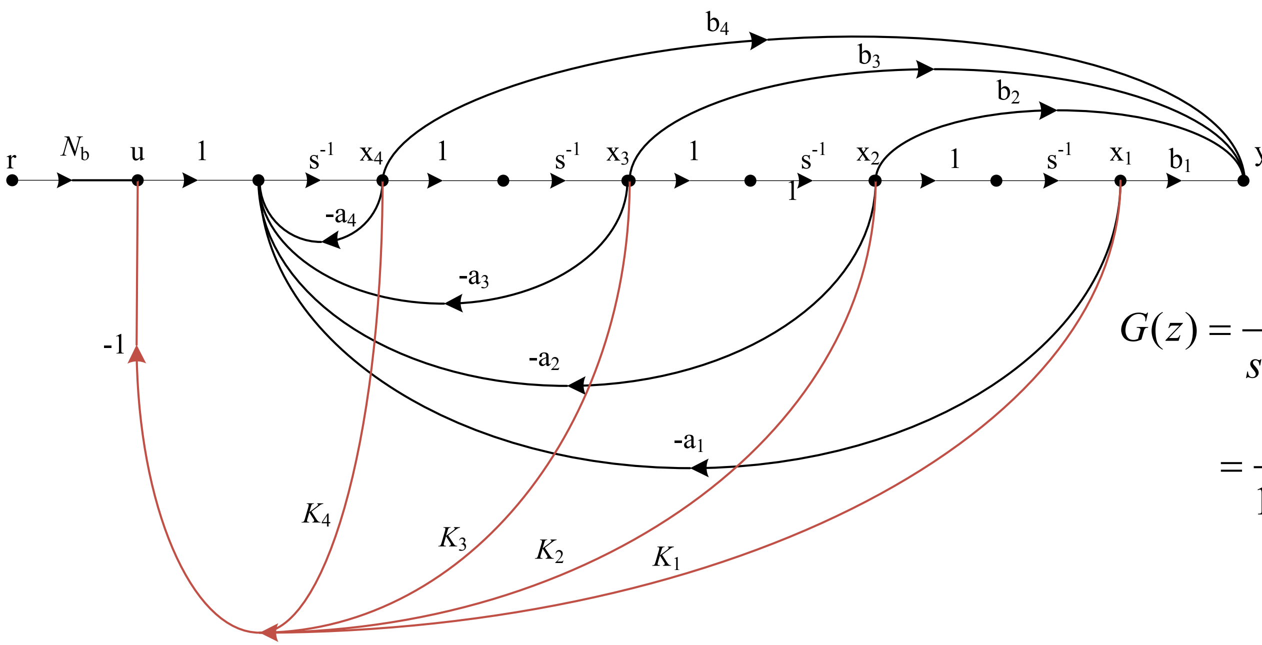
$$em\ malha\ fechada\ (os\ zeros\ não\ se\ alteram\ com\ a\ realimentação)$$

$$\frac{Y(s)}{\widetilde{R}(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}\cdots+b_0}{s^n+\widetilde{a}_{n-1}s^{n-1}\cdots+\widetilde{a}_0} \qquad y_{ss}=\lim_{s\to 0} sY(s)\frac{1}{s}=\frac{b_0}{\widetilde{a}_0}$$

$$Para\ e_{ss}=0$$

$$\boxed{N_b=\frac{\widetilde{a}_0}{b_0}}$$

Utilizando a forma canônica controlável



$$G(z) = \frac{b_4 s^3 + b_3 s^2 + b_2 s + b_1}{s^4 + a_4 s^3 + a_3 s^2 + a_2 s + a_1}$$

$$= \frac{b_4 s^{-1} + b_3 s^{-2} + b_2 s^{-3} + b_1 s^{-4}}{1 + a_4 s^{-1} + a_3 s^{-2} + a_2 s^{-3} + a_1 s^{-4}}$$

$$Eq.\ desejada\ \alpha(s) = s^4 + \alpha_4 s^3 + \alpha_3 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_1 \qquad u = -\mathbf{K}^T \mathbf{x}$$

$$A_c - B_c K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1 - K_1 & -a_2 - K_2 & -a_3 - K_3 & -a_4 - K_4 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A_c + B_c K) = s^4 + (a_4 + K_4)s^3 + (a_3 + K_3)s^2 + (a_2 + K_2)s + (a_1 + K_1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} K_1 &= \alpha_1 - a_1 \\ K_2 &= \alpha_2 - a_2 \\ K_3 &= \alpha_3 - a_3 \\ K_4 &= \alpha_4 - a_4 \end{aligned}}$$

Via inspeção!!

Exemplo:

Projetar um controlador de estados para que o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

tenha, em malha fechada, autovalores em $\lambda_1 = -5 \quad e \quad \lambda_1 = -5$

Solução 1:

→ A realimentação $\tilde{u} = -k^T x$ deve ser tal que o polinômio característico se torne

$$\left| sI - A + bk^T \right| = (s+5)(s+6) = s^2 + 11s + 30$$

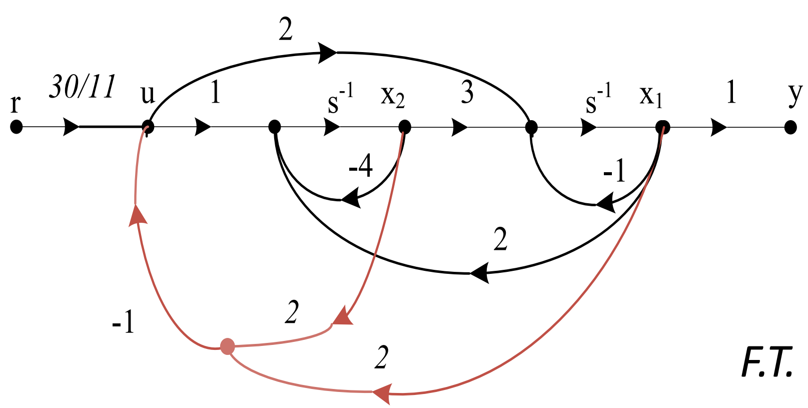
Exemplo (cont.)

$$\left|sI - A + bk^T\right| = (s+5)(s+6) = s^2 + 11s + 30$$

o vetor de realimentação é $k^T = [k_1 \quad k_2]$

$$\begin{vmatrix} s+1+2k_1 & -3+2k_2 \\ -2+k_1 & s+4+k_2 \end{vmatrix} = s^2 + (5+2k_1+k_2)s + (11k_1+5k_2-2)$$

$$\begin{cases} 5+2k_1+k_2 = 11 \\ 11k_1+5k_2-2 = 30 \end{cases} \Rightarrow \tilde{u} = [2 \quad 2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

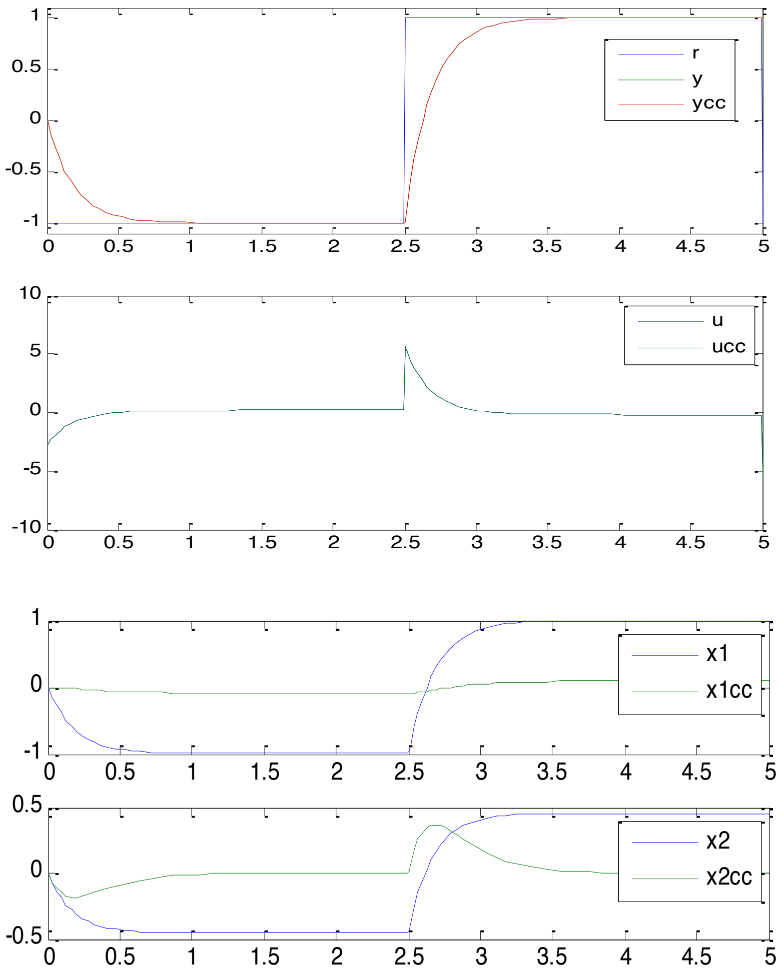


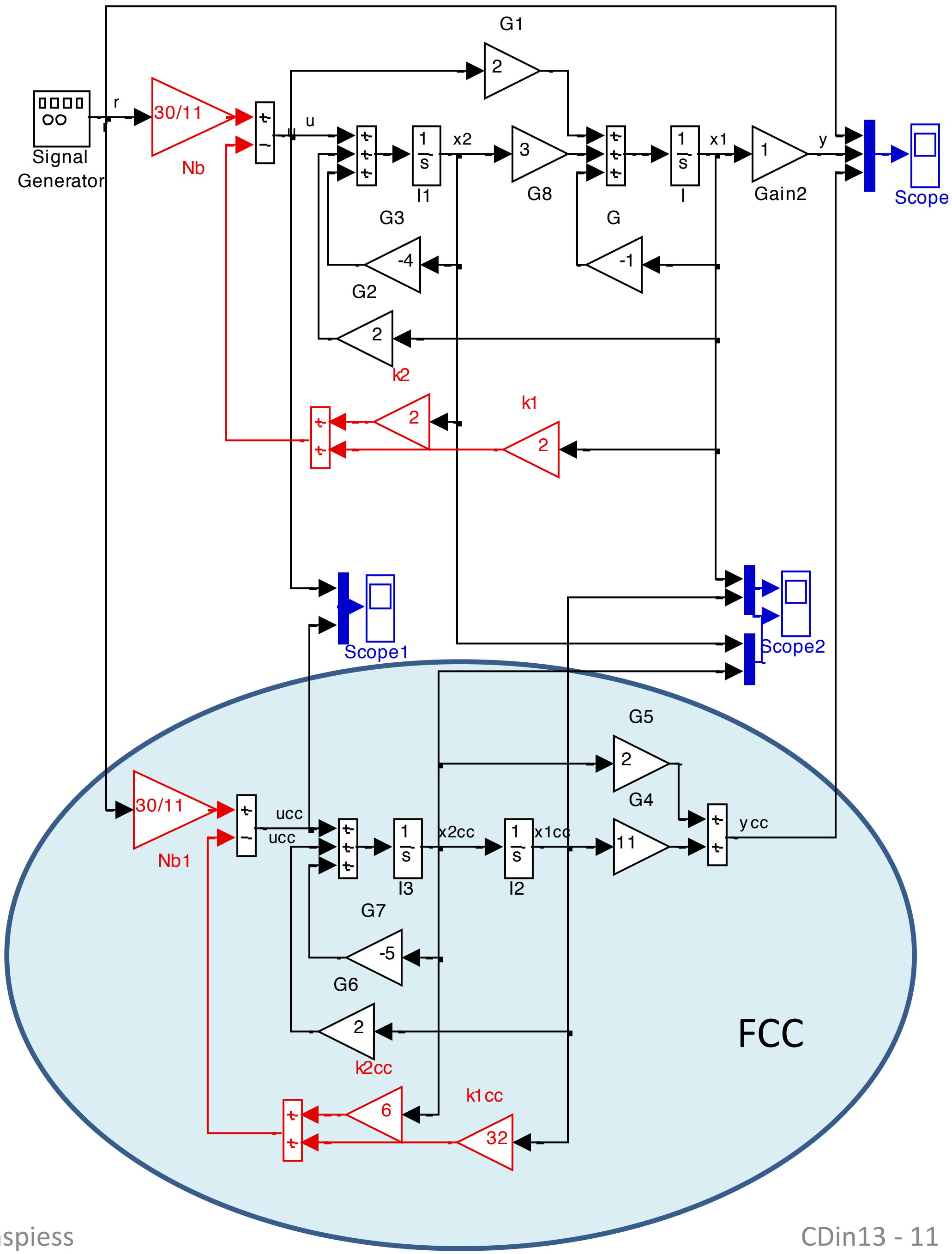
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2s+11}{s^2+5s-2} \quad \Rightarrow \quad \overset{(real.\ estados)}{\frac{Y(s)}{\tilde{R}(s)} = \frac{2s+11}{s^2+11s+30}}$$

F.T. Malha Fechada: $\dfrac{Y(s)}{R(s)} = \underbrace{\dfrac{30}{11}}_{N_b}\dfrac{2s+11}{s^2+11s+30}$

Exemplo (cont.)

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{30}{11}\,\frac{2s+11}{s^2+11s+30}$$





Projeto de Controladores no EE

- Estratégia: Posicionamento dos pólos

- Fórmula de Ackermann (1972), SISO, até n=10, pólos repetidos

>> K=acker (A,B,[polos])

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\textit{Matriz de controlabilidade}}^{-1} \alpha_c(\mathbf{A})$$

Onde:

$$\alpha_c(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_1 \mathbf{A}^{n-1} + \alpha_2 \mathbf{A}^{n-2} + \cdots + \alpha_n \mathbf{I}$$

$$\alpha_c(s) = \left| sI - A + bk^T \right| = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \cdots + \alpha_n \rightarrow \begin{matrix} \textit{polinômio} \\ \textit{característico} \\ \textit{desejado} \end{matrix}$$

Obs:

Zeros só são alterados por novos sensores ou novos atuadores.