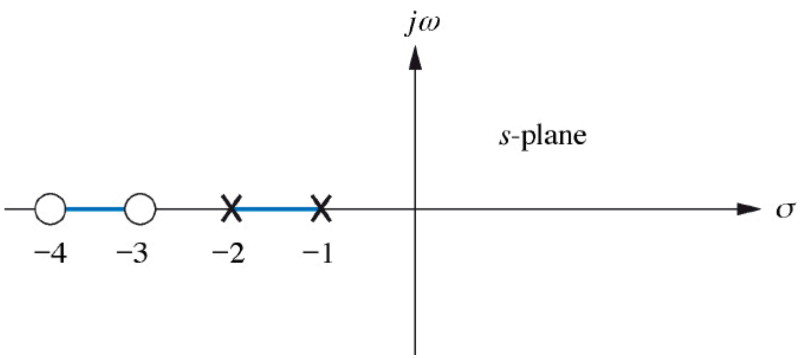
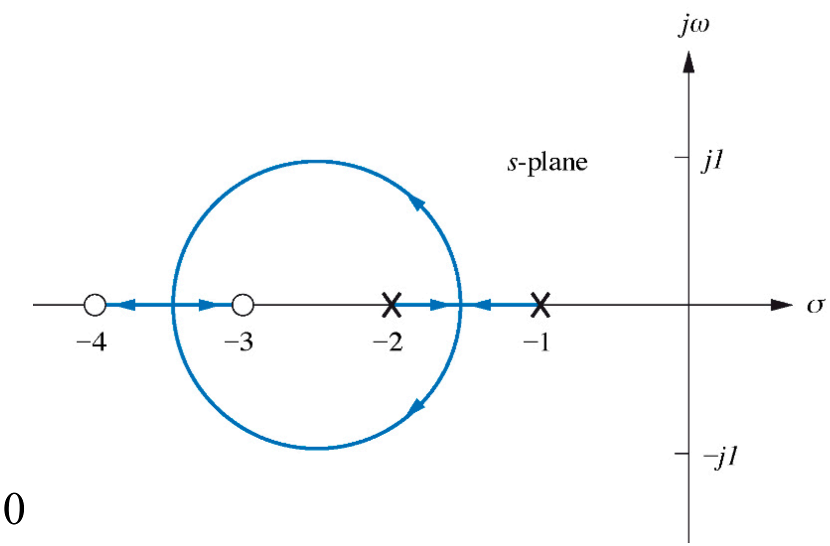
Regras para traçar o LGR

$$\textit{Equação característica em MF}:$$

$$1+KG(s)=0 \; ou \; 1+K\frac{b(s)}{a(s)}=0 \;\Rightarrow LGR \begin{cases} |KG(s)|=1 \\ \angle KG(s)=180^\circ+360^\circ l \end{cases}$$

1. Desenhar no plano s os pólos x e zeros o
   - Os segmentos do LGR começam nos pólos e terminam nos zeros de MA





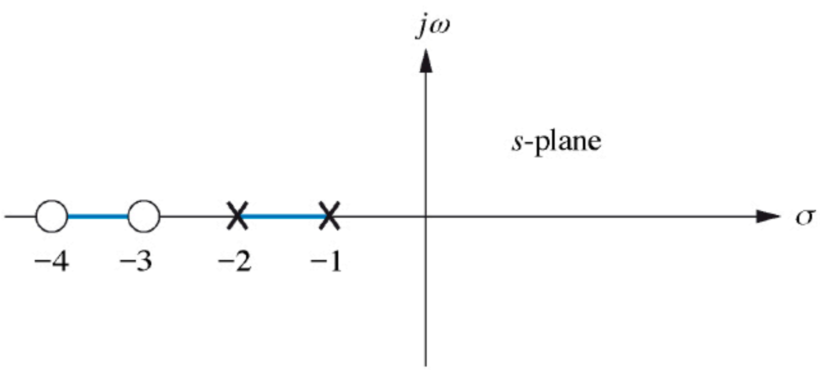
$$K=0 \Rightarrow a(s)+Kb(s)=0 \; \textit{é satisfeita} \; p/\; a(s)\to 0$$

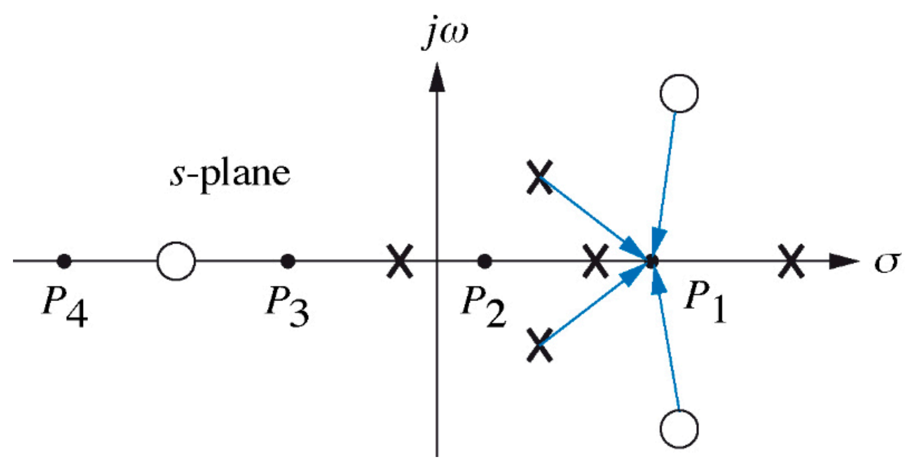
$$K=\infty \Rightarrow a(s)+Kb(s)=0 \; \textit{é satisfeita} \; p/\; b(s)\to 0$$

Regras para traçar o LGR

2. Parte real do LGR:
   à esquerda de um número impar de pólos mais zeros reais

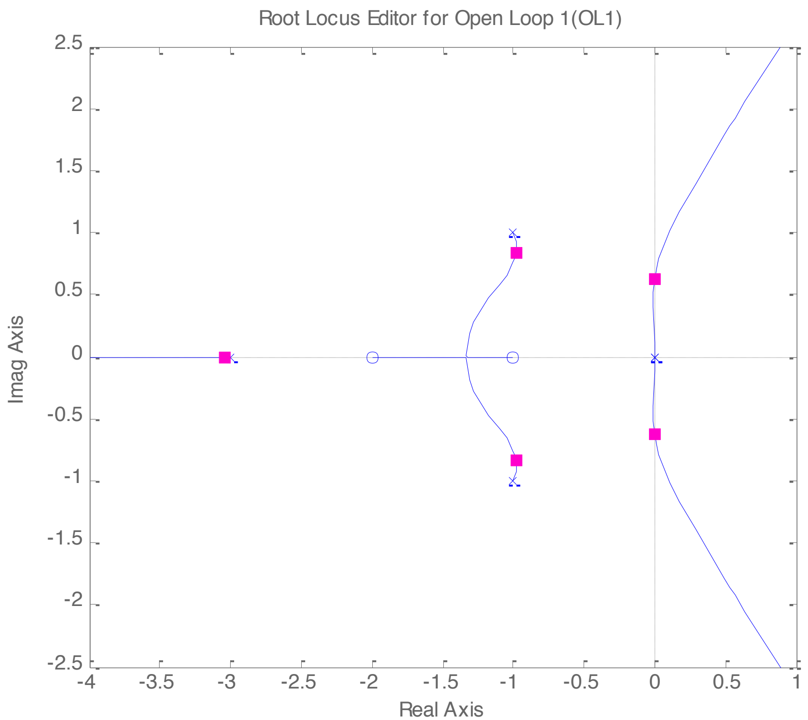
- ângulos de pólos ou zeros complexos conjugados se cancelam
  (condição de fase)

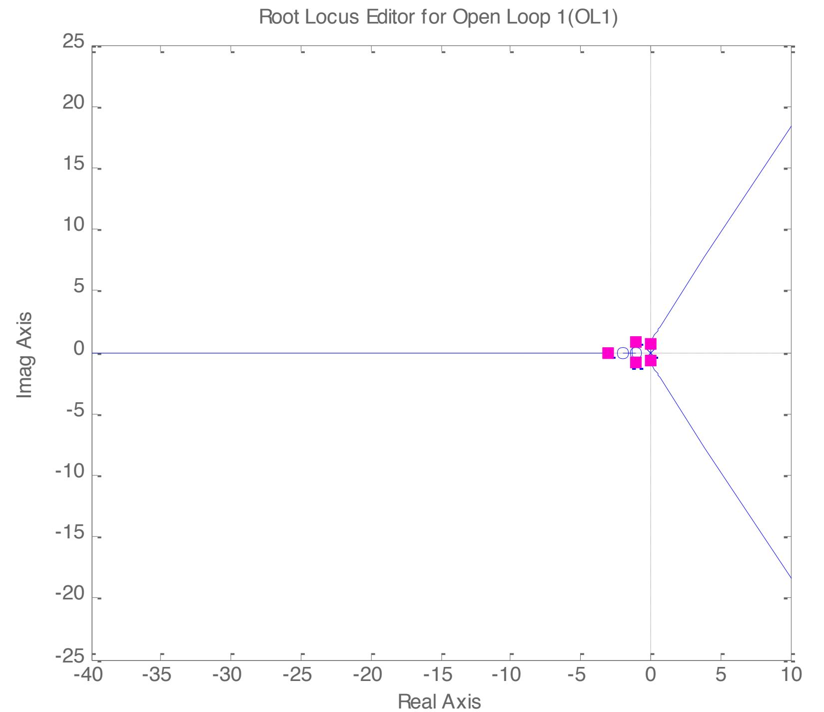




Regras para traçar o LGR (cont.)

3. Assíntotas para $K \to \infty$ ($1 + KG(s)=0$)





- De uma posição bem longe da origem:

  m zeros cancelam *m* pólos e restam *n-m* pólos (assíntotas)

Regras para traçar o LGR (cont.)

3. Assíntotas para $K \to \infty$ $(1 + KG(s)=0)$

$G(s) = b(s)/a(s) = -1/K \to 0$

Dois casos

a) $G(s) = 0$ se $b(s) = 0$ (ramos terminam nos zeros)

b) $$1 + K\frac{b(s)}{a(s)} = 0 \qquad 1 + K\frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n} = 0$$

Sistema físico $n > m$ $G(s) \to 0$ se $s \to \infty$

$(n - m)$ pólos em $s = \alpha$

- De uma posição bem longe da origem

m zeros cancelam m pólos e restam n-m pólos

Regras para traçar o LGR (cont.)

Para $s_0 = \text{Re}^{j\varphi}$ do LGR com R bem grande $(n-m)\phi_l = 180^\circ + 360^\circ l$

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ l}{n-m}$$

Há (n - m) assíntotas radiais com ângulos

$l = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ (ou $l = 0, 1, 2, \ldots\ n$-m-1)

por exemplo n-m = 3 → $\varphi_{1,2,3} = 60^\circ, 180^\circ\, e\ 300^\circ$

Regras para traçar o LGR (cont.)

- Centróide: $$s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n = (s+p_1)(s+p_2)\ldots.(s+p_n)$$

$$Soma\ dos\ pólos\ \ a_1 = \sum p_j,\ \ e\ \ soma\ dos\ zeros\ \ b_1 = \sum z_i;$$

$$1 + K\frac{b(s)}{a(s)} = 0 \Rightarrow s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n + K(s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m) = 0$$

se $m < n - 1 \rightarrow \Sigma p_j$ independe de K

$\rightarrow$ é a soma dos pólos (tanto em MA como em MF!)

r_j – raízes da eq. Característica: pólos$\rightarrow \infty$ + pólos$\rightarrow$zeros

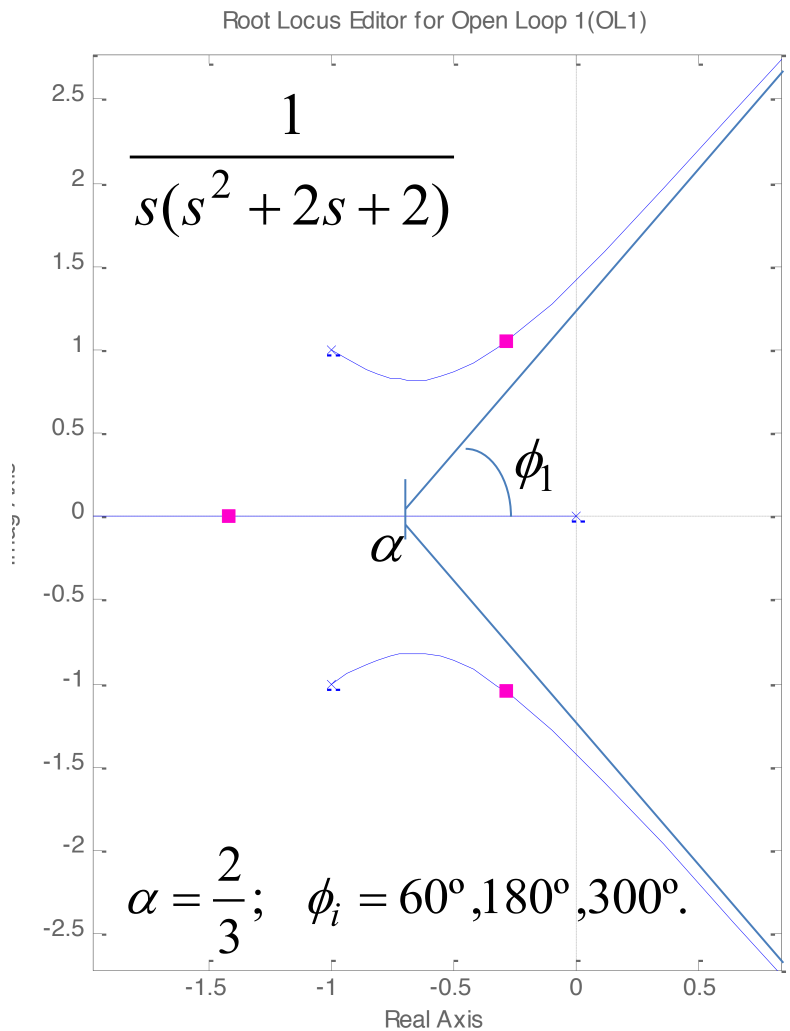
Regras para traçar o LGR (cont.)

r_j – raízes da eq. Característica

alguns pólos → ∞; os demais pólos → zeros

$$\sum_{MF} r_j = (n-m)\alpha + \sum_{MA} z_i = \sum_{MA} p_j$$

$$Centróide \quad \alpha = \frac{\sum p_j - \sum z_i}{n-m}$$



Regras para traçar o LGR (cont.)

4 - Ângulos de chegada (o) e partida (x)

Ponto bem próximo ao pólo:

$$\sum \psi_i - \sum \phi_j = 180^\circ + 360^\circ l$$

$$\phi_{part} = \sum \psi_i - \sum_{j \neq part} \phi_j - 180^\circ - 360^\circ l$$

$$onde \sum \psi_i \rightarrow somatório \ \ dos \ ângulos \ \ dos \ zeros$$

$$\sum_{j \neq part} \phi_j \rightarrow somatório \ \ dos \ ângulos \ \ dos \ demais \ \ pólos$$

Ângulo de partida, de *q* pólos:

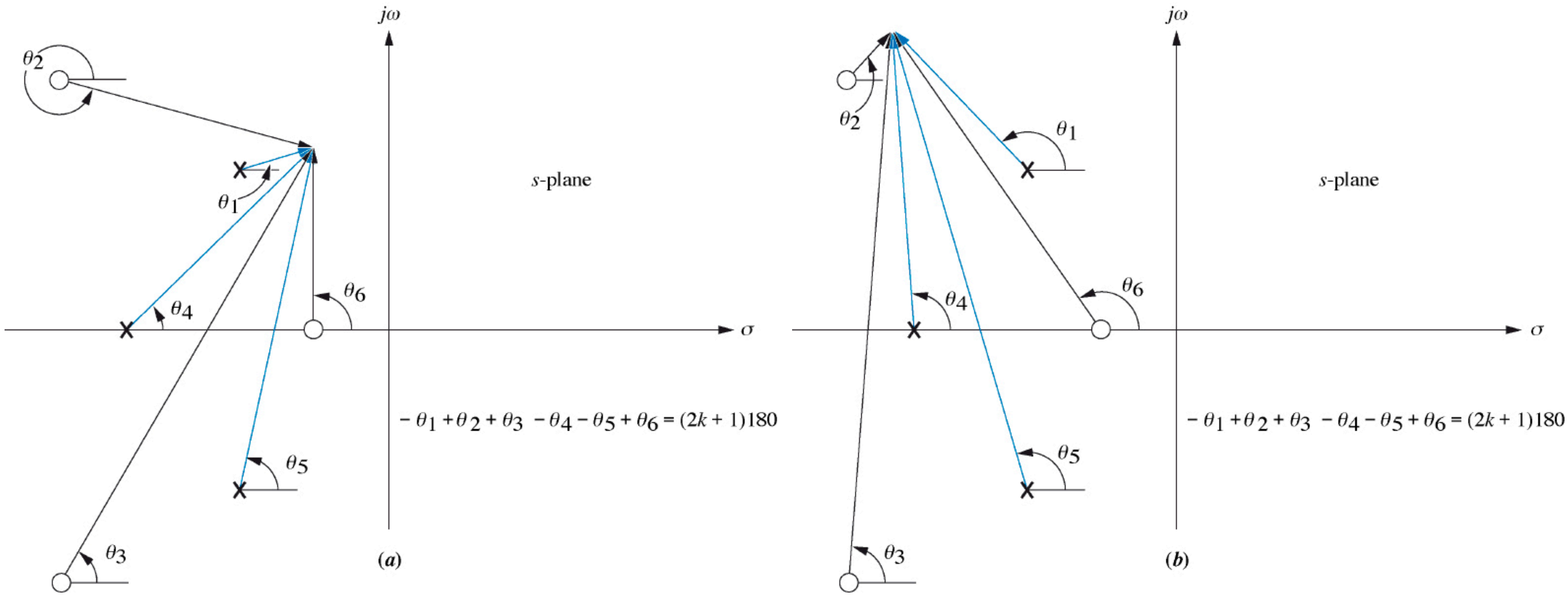
$$q\phi_{part} = \sum \psi_i - \sum_{j \neq part} \phi_j - 180^\circ - 360^\circ l$$

Ângulo de chegada, em *q* zeros:

$$q\psi_{cheg} = \sum \phi_j - \sum_{i \neq cheg} \psi_i + 180^\circ + 360^\circ l$$

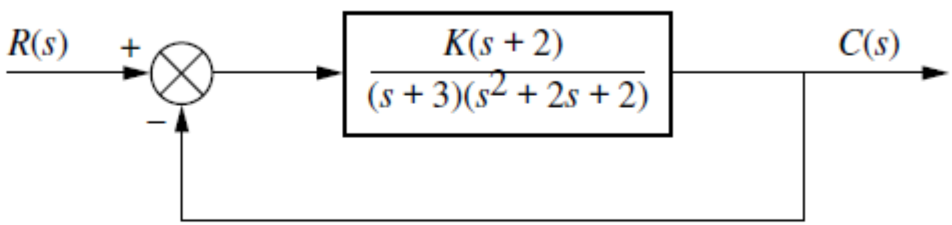
Regras para traçar o LGR (cont.)

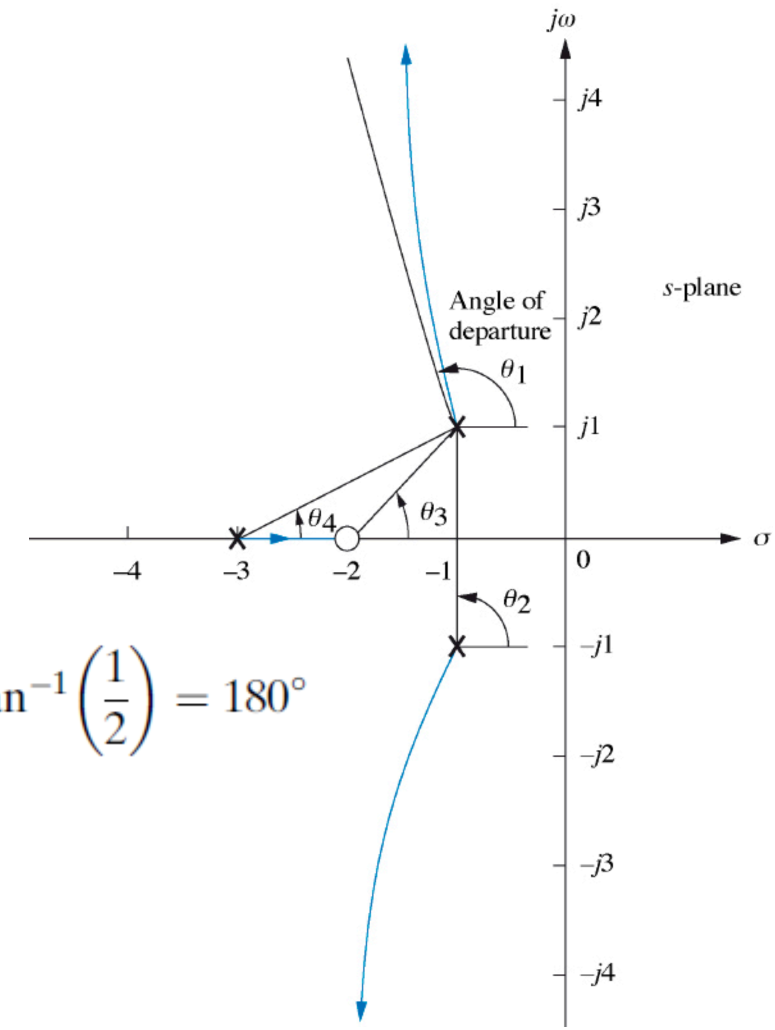
Utilizar pontos de teste “bem” próximo aos zeros (o) e aos pólos (x)



Regras para traçar o LGR (cont.)

Ex: Ângulos de partida (x)





$$-\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 = -\theta_1 - 90^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 180^\circ$$

$$\theta = -251.6^\circ = 108.4^\circ$$

Regras LGR – **Interseção com jω**

5 – **Interseção com o eixo imaginário**

Critério de Routh (s= jω)

$$Ex.: \quad 1 + \frac{K}{s[(s+4)^2+16]} = 0$$

$$\Rightarrow s^3 + 8s^2 + 32s + K = 0$$

Arranjo de Routh:

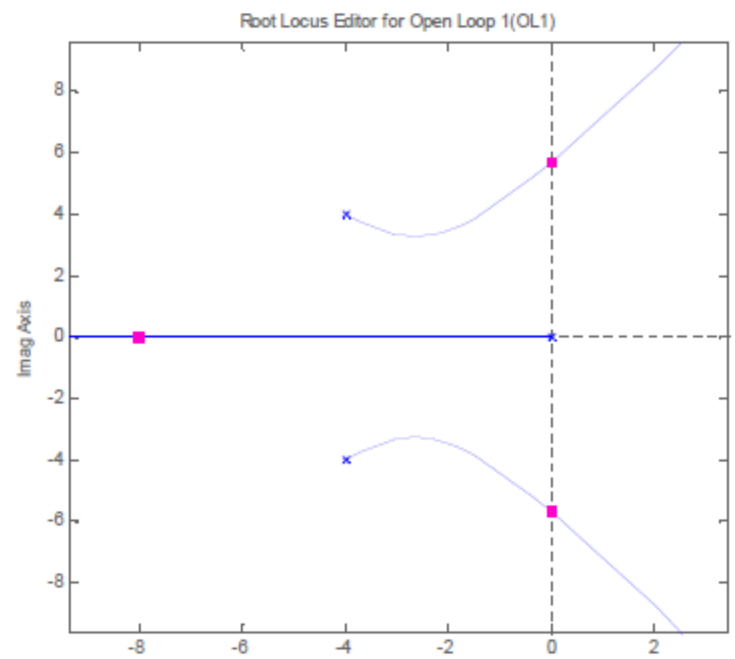
s^3	1	32
s^2	8	K
s	$\dfrac{8.32-K}{8}$	
s^0	K	

→ $0 < K < 256$ K=256 → $s = jw_0$

$$\Rightarrow (j\omega_0)^3 + 8(j\omega_0)^2 + 32(j\omega_0) + 256 = 0$$

Resolvendo para a parte real e imaginária:

$$\begin{cases} -8\omega_0^2 + 256 = 0 \\ -\omega_0^3 + 32\omega_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_0 = \pm\sqrt{32} = \pm 5.66$$



Regras LGR – **Pontos de Ramificação**

6 – Pólos múltiplos e seus ângulos de chegada e partida

6-a – Pontos de ramificação

Polinômio de grau >1 pode ter raízes múltiplas. Pólo múltiplo $\rightarrow K_{max}$

$$\Rightarrow \frac{dK}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{G(s)}\right)_{s=s_0} = 0$$

$$G = \frac{b(s)}{a(s)} \quad \Rightarrow \boxed{b\frac{da}{ds} - a\frac{db}{ds} = 0}$$

Obs: $\frac{dK}{ds} = 0$ É condição necessária, porém não suficiente!

Regras LGR – Ramificação (cont.)

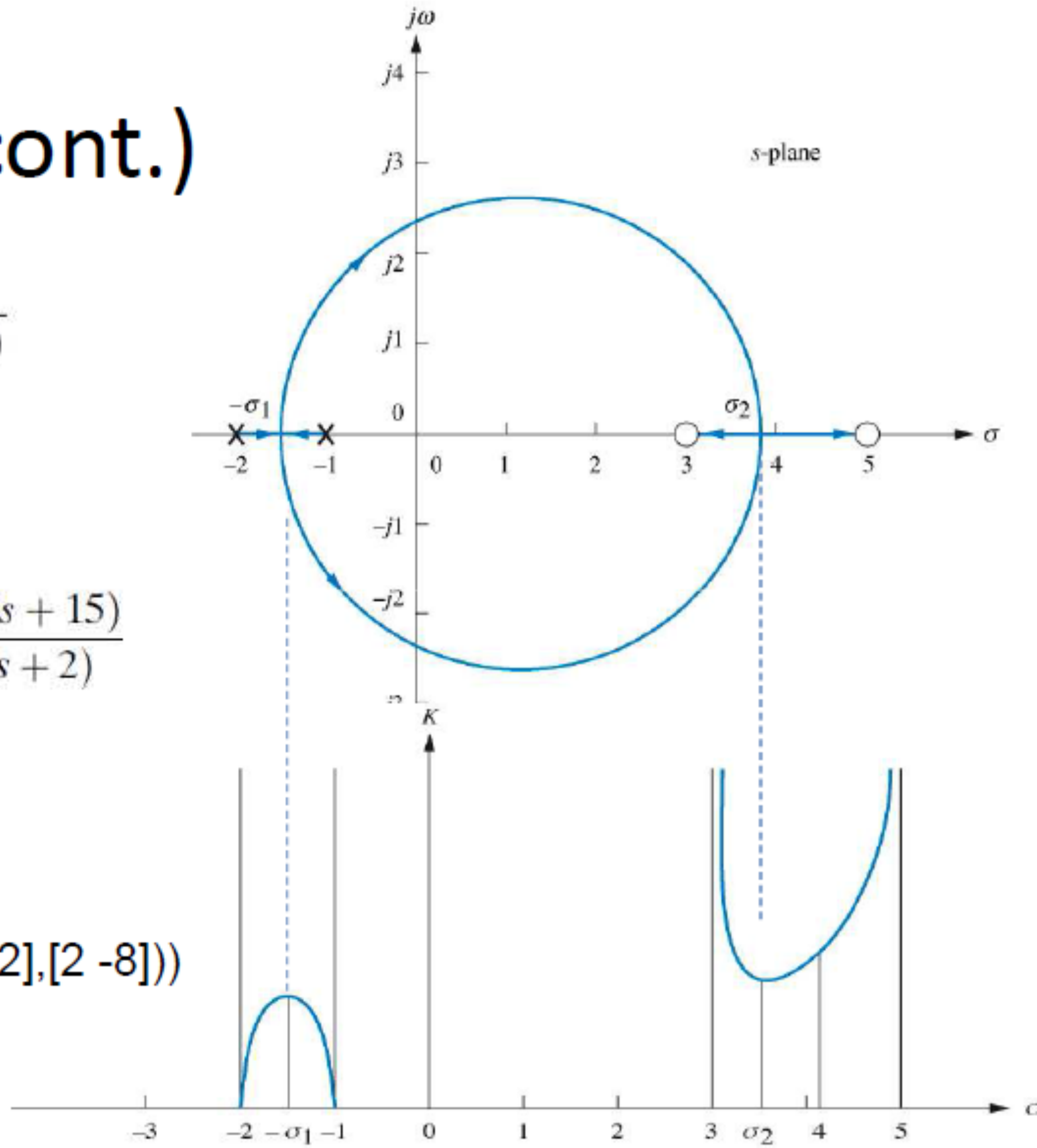
$$K = -\frac{1}{G(s)H(s)} \qquad K = -\frac{1}{G(\sigma)H(\sigma)}$$

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s-3)(s-5)}{(s+1)(s+2)} = \frac{K(s^2-8s+15)}{(s^2+3s+2)}$$

$$b\frac{da}{ds} - a\frac{db}{ds} = 0$$

roots(conv([1 -8 15],[2 3])-conv([1 3 2],[2 -8]))

= 3.816, -1.453



Regras LGR – **Pontos de Ramificação**

6-b – Ângulos de chegada e partida (pontos de ramificação)
"Princípio da continuidade do LGR"

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \Rightarrow eq.\ carc.\ MF : s^2 + s + K = 0$$

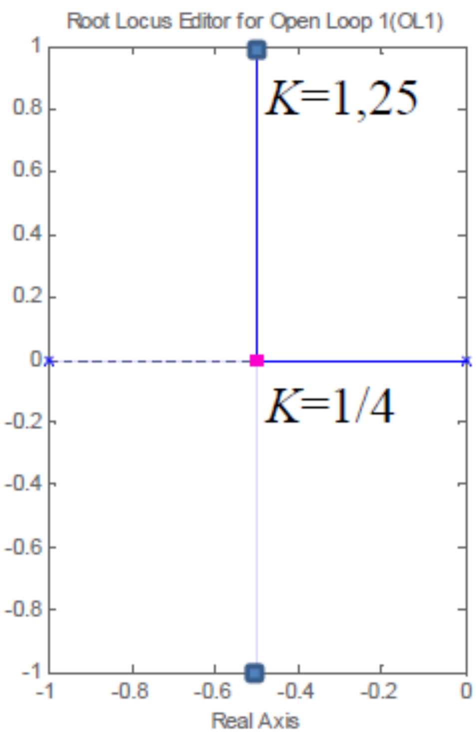
$$G_1(s) = \frac{1}{(s+0.5)^2} \Rightarrow eq.\ carc.\ MF : s^2 + s + \frac{1}{4} + K_1 = 0 \quad \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + K_1 = 0$$

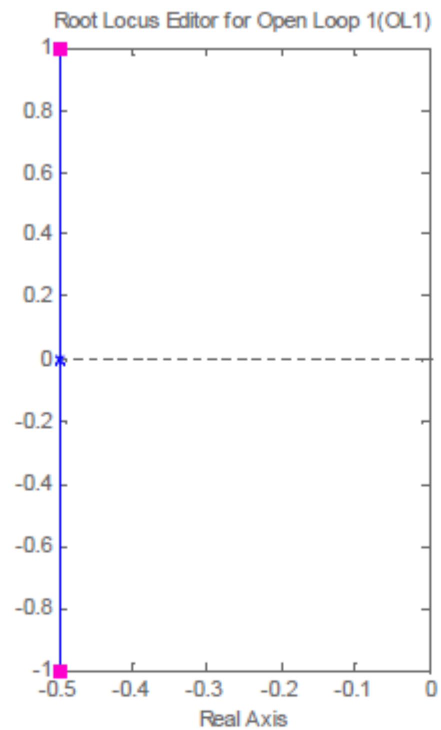
Aplicar regras de ângulo de chegada e partida para o LGR de K_1

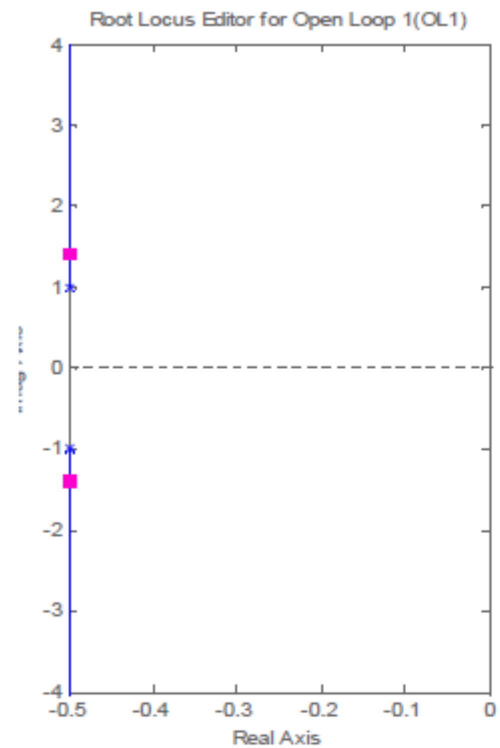
- 2 ramos sempre se encontram com um ângulo relativo de 180° e se separam com uma rotação de $\pm 90°$
- 3 ramos sempre se encontram com um ângulo relativo de 120° e se separam com uma rotação de $\pm 60°$

Regras LGR – Ramificação (cont.)

Exemplo: “continuação” do LGR







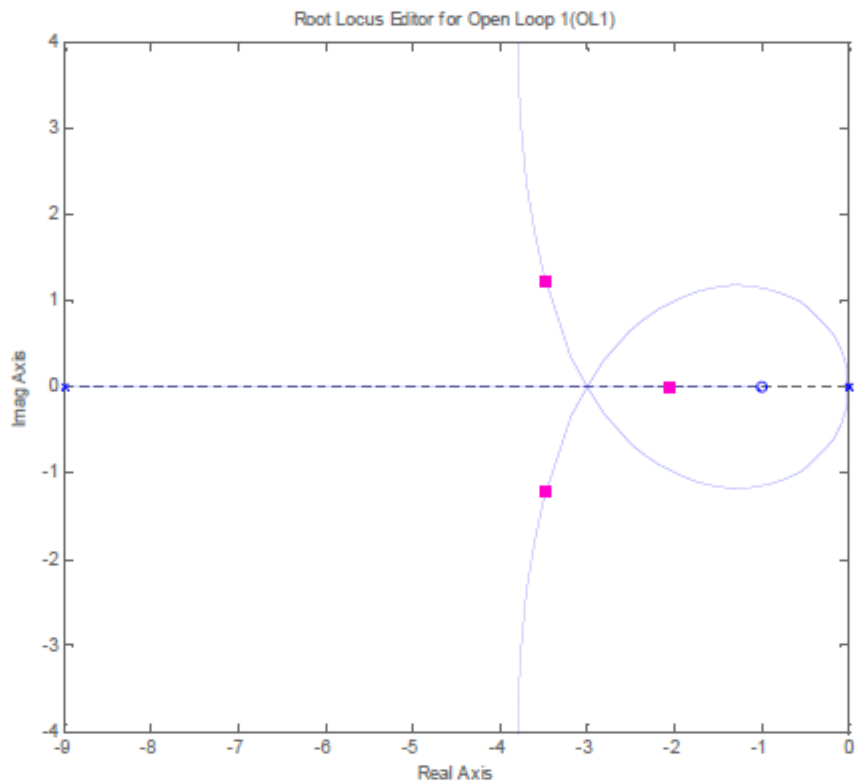
$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)} \quad \Rightarrow \quad G_1(s)=\frac{1}{(s+0,5)^2} \quad \Rightarrow \quad G_2(s)=\frac{1}{(s-0,5+j)(s-0,5-j)}$$

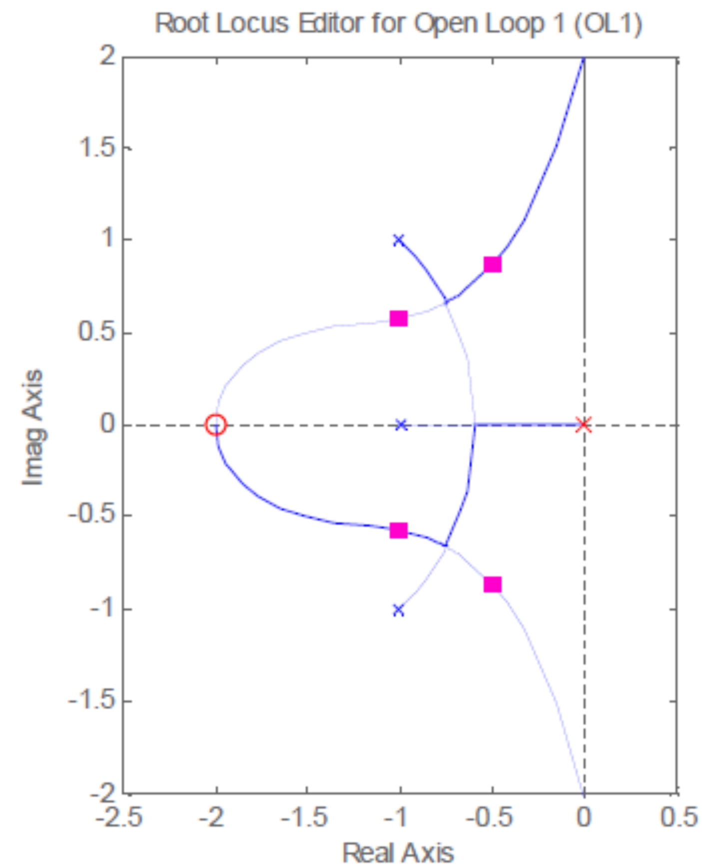
$$(K=\frac{1}{4}+K_1) \qquad (K=1,25+K_2)$$

Compl

Regras LGR – Ramificação (cont.)

Exemplos:

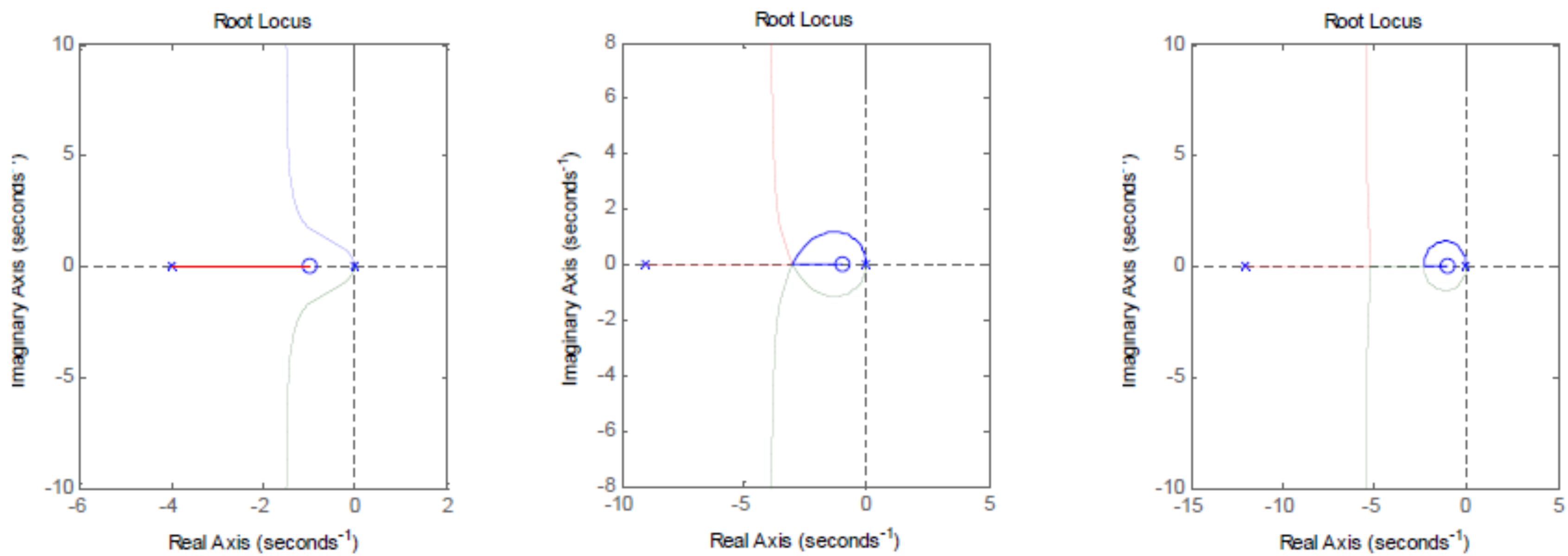




Regras LGR – Ramificação (cont.)

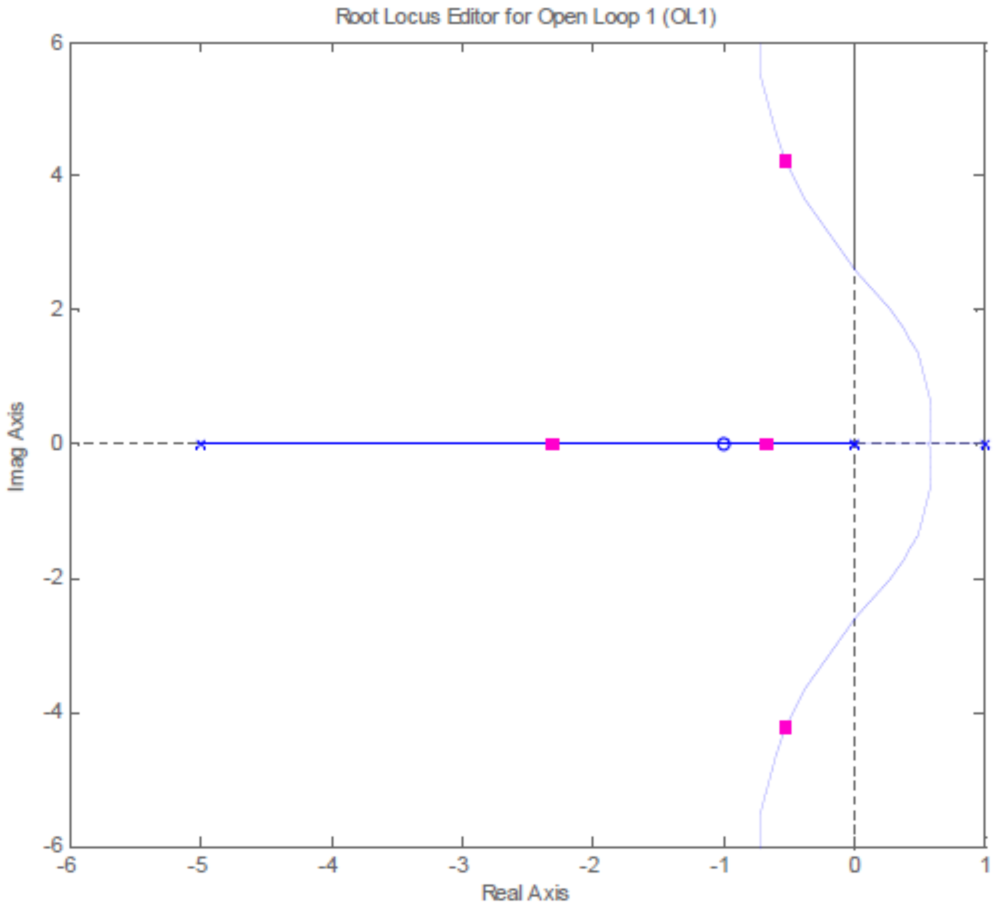
7 – Completar o LGR

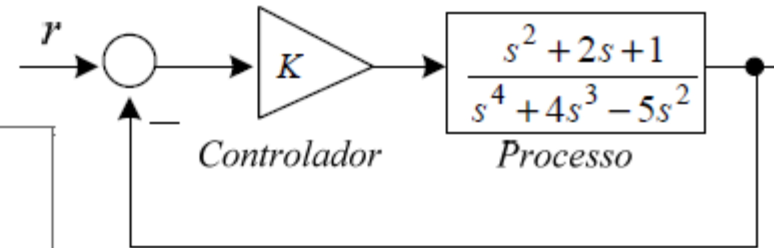
- LGR começa nos pólos e termina nos zeros ou em ∞.
- De cada pólo parte um ramo.
- O LGR é simétrico em relação ao eixo real.



$r_{1,2,3} = 0; -1{,}74 \pm 0{,}97\,j$ $\qquad r_{1,2,3} = 0; -3; -3$ $\qquad r_{1,2,3} = 0; -2{,}31; -5{,}18$

Exemplo - aplicação do LGR





$K \nearrow$

- O aumento do ganho estabiliza o sistema (instável em MA).

- Ganho crítico (Routh)

- Estabilidade relativa (s-σ)

- Maior ζ possível?

Exercício Extra 4

Apresentando os cálculos relativos à aplicação dass regras 1) a 7), esboce o LGR do seguinte sistema em malha fechada, em função do ganho $-\infty < K < \infty$.

Para os ganhos que permitem a operação estável, sugira, justificando, um valor adequado de *K*.