Regras para traçar o LGR

Equação característica em MF :

$$1+KG(s)=0 \ ou\ 1+K\frac{b(s)}{a(s)}=0 \ \Rightarrow LGR \begin{cases} |KG(s)|=1 \\ \angle KG(s)=180^\circ+360^\circ l \end{cases}$$

1- Desenhar no plano s os pólos x e zeros o

(Os segmentos do LGR começam nos pólos e terminam nos zeros de malha aberta)

2- Parte real do LGR:
à esquerda de um número impar de pólos mais zeros reais
(ângulos de pólos ou zeros complexos conjugados se cancelam – condição de fase)

3- Assíntotas para $K \to \infty$ ($1 + KG(s)=0$)

$G(s) = b(s)/a(s) = -1/K \to 0$

Dois casos
a) $G(s) = 0$ se $b(s) = 0$ (ramos terminam nos zeros)
b) $1+K\frac{b(s)}{a(s)}=0$

$$1+K\frac{s^m+b_1s^{m-1}+...+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+...+a_n}=0$$

Sistema físico $n > m$ $G(s) \to 0$ se $s \to \infty$

$\Rightarrow 1+K\frac{1}{(s-\alpha)^{n-m}}=0$ ($n - m$) pólos em $s = \alpha$

- De uma posição bem longe da origem
m zeros cancelam *m* pólos e restam *n*-*m* pólos

Para um ponto $s_0 = \mathrm{R}e^{j\varphi}$ do LGR para R bem grande
$(n-m)\phi_l = 180^\circ + 360^\circ l$

\# Há ($n - m$) assíntotas radiais com ângulos

$\phi_l = \frac{180^\circ+360^\circ l}{n-m}$ $l = 0, \pm1, \pm2, ...$

$l = 0, 1, 2, ... (n-m-1)$

por exemplo $n-m = 3 \to$ $\phi_{1,2,3} = 60^\circ, 180^\circ\ e\ 360^\circ$

Centróide:

Soma dos pólos: $s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n = (s + p_1)(s + p_2) .... (s + p_n)$

$b_1 = \sum z_i$

$a_1 = \sum p_j$

$$1 + K\frac{b(s)}{a(s)} = 0 \Rightarrow s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n + K(s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_m) = 0$$

se $m < n - 1 \rightarrow a_1$ independe de K

$\rightarrow a_1$ é a soma dos pólos (tanto em MA como em MF!)

r_j – raízes da eq. Característica

$$\sum_{MF} r_j = \sum_{MA} p_j \qquad \frac{1}{(s-\alpha)^{n-m}} \qquad \Rightarrow \sum = (n-m)\alpha$$

$$\sum_{MF} r_j = \underbrace{(n-m)\alpha}_{\text{pólos}\rightarrow\infty} + \underbrace{\sum_{MA} z_i}_{\text{pólos}\rightarrow\text{zeros}} = \sum_{MA} p_j$$

Centróide $\boxed{\alpha = \dfrac{\sum p_j - \sum z_i}{n-m}}$

4- Ângulos de chegada (o) e partida (x)
Ponto bem próximo ao pólo:

$$\sum \psi_i - \sum \phi_j = 180^\circ + 360^\circ l$$

$$\phi_{part} = \sum \psi_i - \sum_{j \neq part} \phi_j - 180^\circ - 360^\circ l$$

Ângulo de Partida

$$\boxed{q\phi_{part} = \sum \psi_i - \sum_{j \neq part} \phi_j - 180^\circ - 360^\circ l}$$

$\sum \psi_i \rightarrow$ *somatório dos ângulos dos zeros*

$\sum_{j \neq part} \phi_j \rightarrow$ *somatório dos ângulos dos demais pólos*

Ângulo de Chegada

$$\boxed{q\psi_{cheg} = \sum \phi_j - \sum_{i \neq cheg} \psi_i + 180^\circ + 360^\circ l}$$

5- Pontos de interseção com o eixo imaginário
Critério de Routh ($s = jw_0$)

$$1 + \frac{K}{s\left[(s+4)^2 + 16\right]} = 0 \qquad \Rightarrow s^3 + 8s^2 + 32s + K = 0$$

Arranjo de Routh

s^3	1	32
s^2	8	K
s^1	$\frac{8.32-K}{8}$	
s^0	K	

$\rightarrow$ $0 < K < 256$ K=256 $\rightarrow s = jw_0$

$$\Rightarrow (j\omega_0)^3 + 8(j\omega_0)^2 + 32(j\omega_0) + 256 = 0$$

Resolvendo para a rarte real e imaginária:

$$\begin{cases} -8\omega_0^2 + 256 = 0 \\ -\omega_0^3 + 32\omega_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_0 = \pm\sqrt{32} = \pm 5.66$$

6- Pólos múltiplos e seus ângulos de chegada e partida

6-a – Pontos de ramificação

Polinômio de grau >1 pode ter raízes múltiplas.

Pólo múltiplo $\rightarrow K_{max}$ $\Rightarrow \frac{dK}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{G(s)}\right)_{s=s_0} = 0$

$$G = \frac{b(s)}{a(s)} \qquad \Rightarrow \boxed{b\frac{da}{ds} - a\frac{db}{ds} = 0}$$

Obs: $\frac{dK}{ds} = 0$ é condição necessária, porém não suficiente.

6-b – Ângulos de chegada e partida (pontos de ramificação)

“Princípio da continuidade do LGR”

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \Rightarrow eq.\ carc.\ MF : s^2 + s + K = 0$$

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+0.5)^2} \Rightarrow eq.\ carc.\ MF : s^2 + s + \frac{1}{4} + K_1 = 0 \quad \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + K_1 = 0$$

Aplicar regras de ângulo de chegada e partida para o LGR de K_1

Obs: - 2 ramos sempre se encontram com um ângulo relativo de 180° e se separam com uma rotação de $\pm 90°$

- 3 ramos sempre se encontram com um ângulo relativo de 120° e se separam com uma rotação de $\pm 60°$

7- Completar o LGR

- LGR começa nos pólos e termina nos zeros ou em ∞.
- De cada pólo parte um ramo.
- O LGR é simétrico em relação ao eixo real.