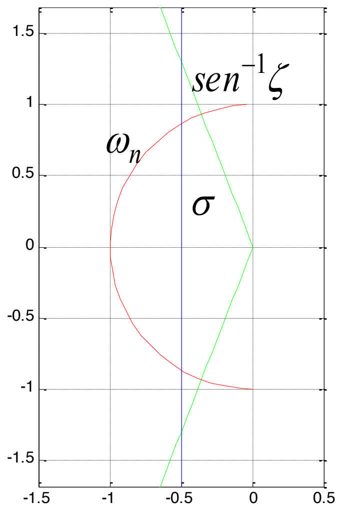
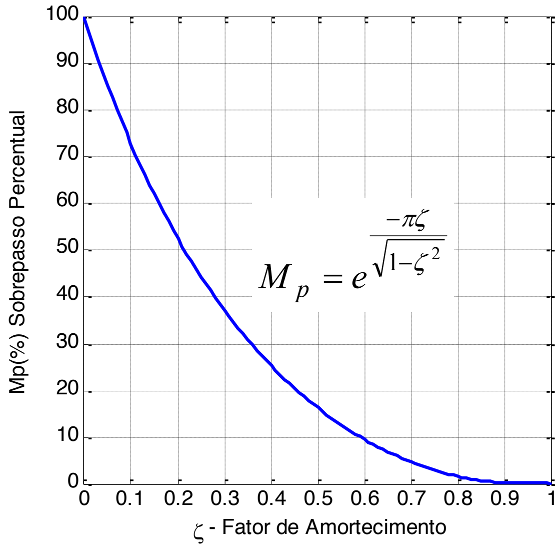
ENE/FT/UnB

Departamento de Engenharia Elétrica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília
Prof. Adolfo Bauchspiess

Prova individual, sem consulta.
Só é permitido o uso de ***calculadora científica básica****.*
(Números complexos & funções trigonométricas)
Turma B - Auditório FT, 9/4/2018, 16^{00}-18^{00}

1ª Prova - CONTROLE DINÂMICO - 1°/2018





$t_{s(2\%)} = \frac{4}{\sigma}$ $\quad t_{r\ (10\text{-}90\%)} = \frac{1,8}{\omega_n}$;

$1 + K\frac{b(s)}{a(s)} = 0;$

$\alpha = \frac{\sum p\acute{o}los - \sum zeros}{n-m};$

$\theta = \frac{180°(2k+1)}{n-m};$

se $m < n\text{-}1 \Rightarrow \sum_{MA} p_i = \sum_{MF} p_j$.

$\sum \psi_i - \sum \phi_j = 180° + 360°\, l$

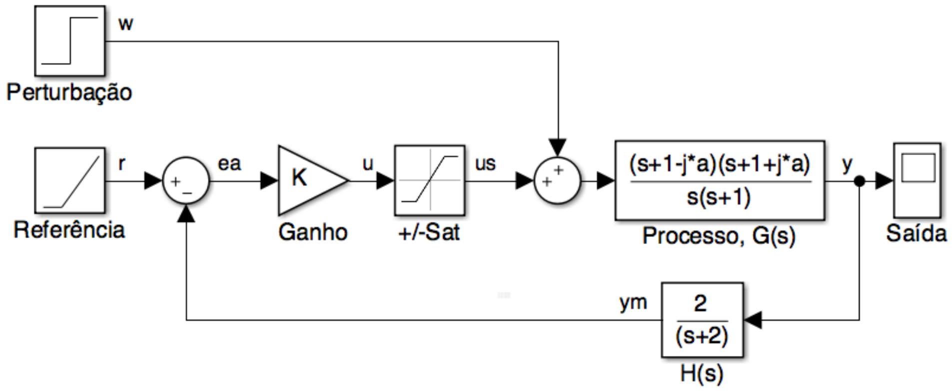


Fig. 1 – Sistema de controle a ser utilizado nas questões 1 a 4. (Parâmetro *a* - ver folha de respostas).

1ª Questão: (4,0) Considerando a operação linear do sistema (não saturado).

a) (1,5) A partir da equação característica normalizada, via critério de Routh-Hurwitz, quais valores de *K*, para $-\infty < K < \infty$, produzem um sistema estável, em malha fechada.

b) (1,5) Calcule o erro em regime permanente, $e_{ss} = (r-y)_{t\to\infty}$, para uma rampa unitária de referência, em função do ganho *K*. Assuma, pelo princípio da superposição, w = 0.

c) (1,0) Calcule o erro em regime permanente, $e_{ss} = (r-y)_{t\to\infty}$, a um degrau de perturbação. Assuma, r = 0.

2ª Questão: (2,0) Esboce o Lugar Geométrico das Raízes em função de $K > 0$ (LGR^+). Considere:

d) (0,3) Parte sobre o eixo real;

e) (0,2) Assíntotas;

f) (0,5) Pontos de Ramificação;

g) (0,5) Ângulos de partida e de Chegada;

h) (0,5) Interseção com o eixo $j\omega$.

Obs: Valores "óbvios" (justificáveis por outras regras), não precisam ser recalculados.

3ª Questão: (1,5) Esboce o Lugar Geométrico das Raízes em função de $K < 0$ (LGR$^-$).

i) (0,2) Parte sobre o eixo real;
j) (0,3) Pontos de Ramificação (ver tabela 1);
k) (0,5) Ângulos de partida e de Chegada;
l) (0,5) Complete o LGR, indicando com setas, o sentido crescente de K, de $-\infty$ a $+\infty$.

Obs: Note que os cálculos do LGR$^+$ já são suficientes para esboçar o LGR$^-$.

Tabela 1: Candidatos a ponto de ramificação, (r_1, r_2, r_3, r_4) para alguns polinômios $a(s)$ e $b(s)$. Colunas indicam raízes de $a\frac{db}{ds} - b\frac{da}{ds} = c_4s^4 + c_3s^3 + c_2s^2 + c_1s + c_0 = 0$,

c_4	2	2	2	2
c_3	8	8	8	8
c_2	164	230	110	614
c_1	312	444	204	1212
c_0	104	128	68	404

$r_{1,2}$	-1.0 +/- 8.74i	-1.0 +/- 10.45i	-1.0 +/- 7.023i	-1.0 +/-17.358i
r_3	-1.5723	-1.5738	-1.5695	-1.5761
r_4	-0.4277	-0.4262	-0.4305	-0.4239

4ª Questão: (2,5) Aplicações do LGR – Escolha do ganho K, ganho efetivo.

m) (0,5) Considerando $-\infty < K < \infty$, pelo esboço do LGR$^+$ e LGR$^-$ (e sem calcular a estabilidade relativa) existe algum valor de K, para que Y(s)/R(s) apresente $t_s = 8\ s$? Justifique.
n) (1,0) Ainda com $-\infty < K < \infty$, e sem saturação, para qual valor de K obtêm-se a resposta mais rápida possível para este sistema? E se houver saturação +/-Sat? Por quê?
o) (1,0) Considere agora a saturação +/-Sat e um valor de $K > 0$ que produza polos no SPD (Semi-Plano Direito). Como o sistema é instável, a tendência é que y cresça indefinidamente. No entanto, o sinal de controle é limitado pela saturação, chegando apenas u_s ao processo. Neste caso considera-se que há um ganho de malha reduzido (ganho efetivo), o qual estabiliza o processo na interseção do LGR com o eixo $j\omega$. Ver simulação ilustrativa, para parâmetros típicos, Fig. 2. Se tivermos condições iniciais diferentes do processo, haveria, em regime permanente, diferentes amplitudes da oscilação em y? Por quê?

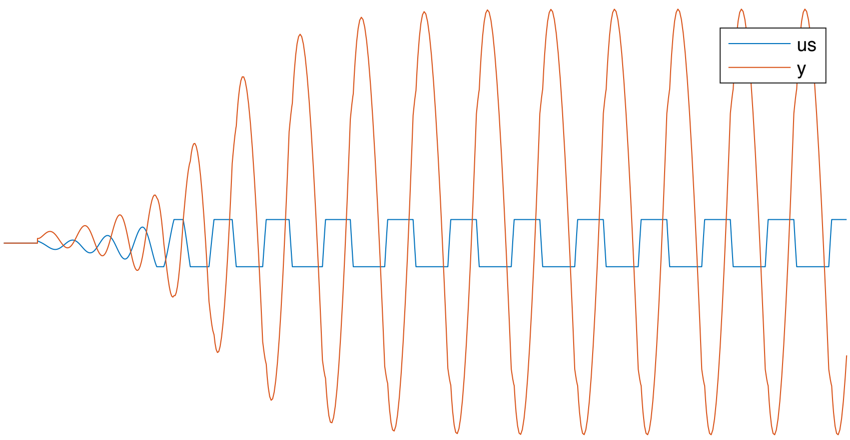


Fig. 2 – Simulação do sistema com polos no SPD. Oscilação estável devido à saturação (ganho efetivo).

Gabarito 1ª Prova – Controle Dinâmico 2018/1 –Turma B

Provas tipo "4", "5" e "6" (a = 4, 5 e 6)

1ª Questão (4,0) Estabilidade, e_{ss}

a) (1,5) Sistema estável para:
$a = 4 \rightarrow 0 < K < 0{,}4069\ \ ou\ 1{,}8431 < K < \infty$
$a = 5 \rightarrow 0 < K < 0{,}1733\ \ ou\ 4{,}3276 < K < \infty$
$a = 6 \rightarrow 0 < K < 0{,}1050\ \ ou\ 7{,}1450 < K < \infty$

b) (1,5) $R(s) = \frac{1}{s^2}, W(s) = 0,$ $e_{ss} = (r - y)_{t\rightarrow\infty} = \frac{2-K(1+a^2)}{2K(1+a^2)}$

$$\boxed{\begin{aligned} a = 4 \rightarrow e_{ss} &= \frac{2-17K}{34K} \\ a = 5 \rightarrow e_{ss} &= \frac{1-13K}{26K} \\ a = 6 \rightarrow e_{ss} &= \frac{2-37K}{74K} \end{aligned}}$$

c) (1,0) $W(s) = \frac{1}{s}, R(s) = 0,$ $e_{ss} = (r - y)_{t\rightarrow\infty}$

$$\boxed{a = 4; a = 5; a = 6 \rightarrow e_{ss} = \frac{-1}{K}}$$

2ª Questão (2,0) LGR⁺

d) (0,3) Parte real: $a = 4; 5; 6$: $-\infty < s < -2;\ -1 < s < 0$
e) (0,2) Assíntota: $a = 4; 5; 6$: $o\ eixo\ real\ negativo$ (180°)
f) (0,5) Ponto de ramificação: $a = \{4; 5; 6\}$: $s_{r+} = \{-0.4305; -0.4277; -0.4262\}$
g) (0,5) $\phi_{part} = \{180°; 0°; 180°\}$ $\psi_{cheg} = \{0°; 0°\}$
h) (0,5)$\{\omega_{cr1}; \omega_{cr2}\}$ $a = 4: \{1{,}905; 3{,}061;\}$; $a = 5: \{1{,}64; 4{,}394;\}$; $a = 6: \{1{,}556; 5{,}530;\}$;

Tabela 1: Candidatos a ponto de ramificação, (r_1, r_2, r_3, r_4) para alguns polinômios $a(s)$ e $b(s)$.

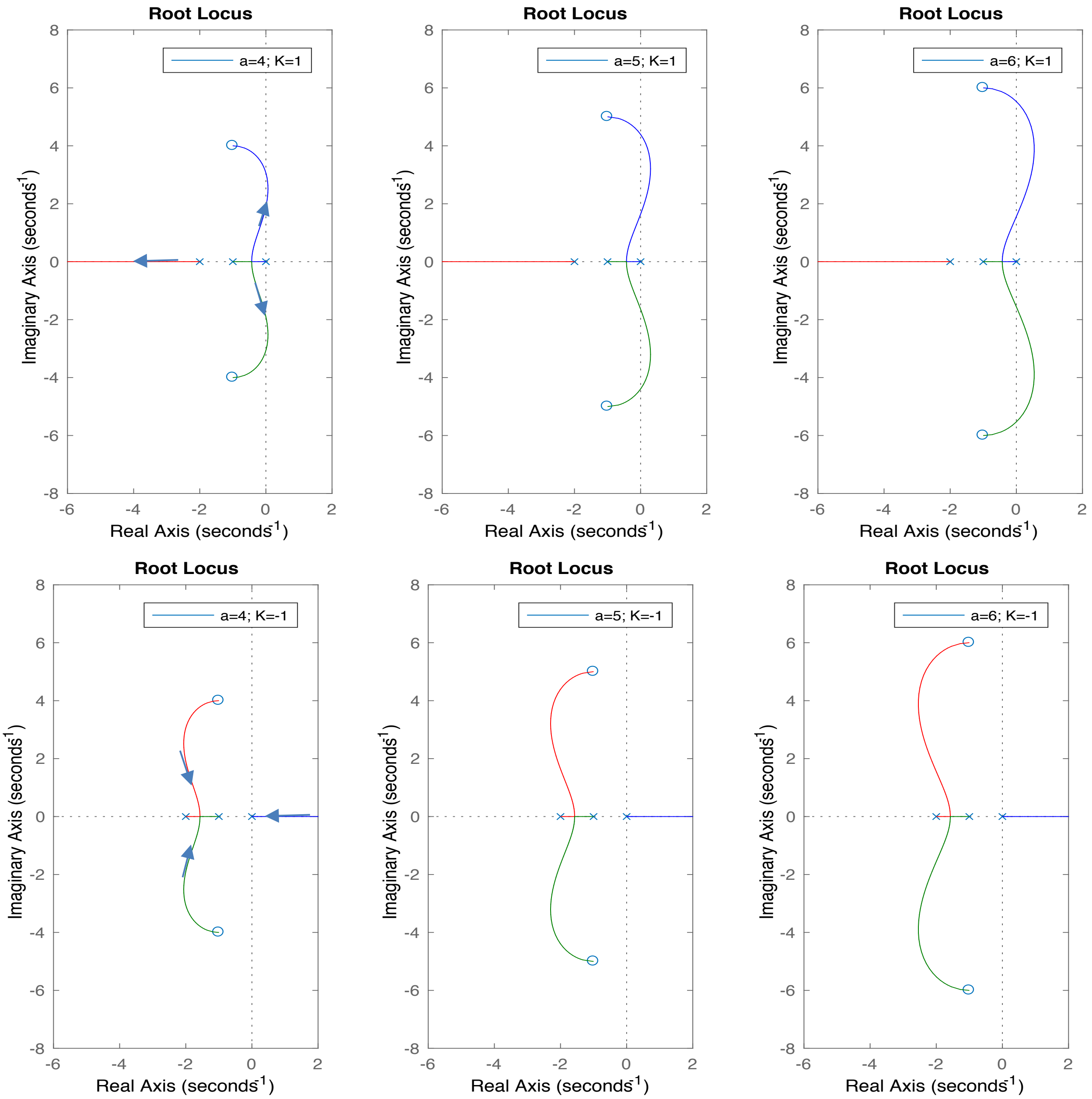
	a=5	a=6	a=4	a=10
c_2	164	230	110	614
c_1	312	444	204	1212
c_0	104	148	68	404

$r_{1,2}$	-1.0 + /-8.74i	-1.0 +/- 10.45i	-1.0 +/- 7.023i	-1.0+/- 17.358i
r_3	-1.5723	-1.5738	-1.5695	-1.5761
r_4	-0.4277	-0.4262	-0.4305	-0.4239

$$\Sigma\psi - \Sigma\phi = (90° + \psi_1) - (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) = 180° + 360°l$$
$$\psi_1 = \psi_{cheg} = \text{atand}(1/a) + \text{atand}(a) - 90° = 0°$$

3ª Questão: (1,5) LGR⁻

i) (0,2) Parte real: $a = 4; 5; 6$: $-2 < s < -1;\ 0 < s < \infty$
j) (0,3) Ponto de ramificação: $a = \{4; 5; 6\}$: $s_{r-} = \{-1{,}5695; -1.5723; -1{,}5738\}$
k) (0,5) $\phi_{part} = \{180°; 180°\}$ $\psi_{cheg} = \{0°; 180°; 0°\}$
l) (0,5) Setas (No gráfico)



4ª Questão: (2,5) Aplicações do LGR.

m) (0,5) É possível?

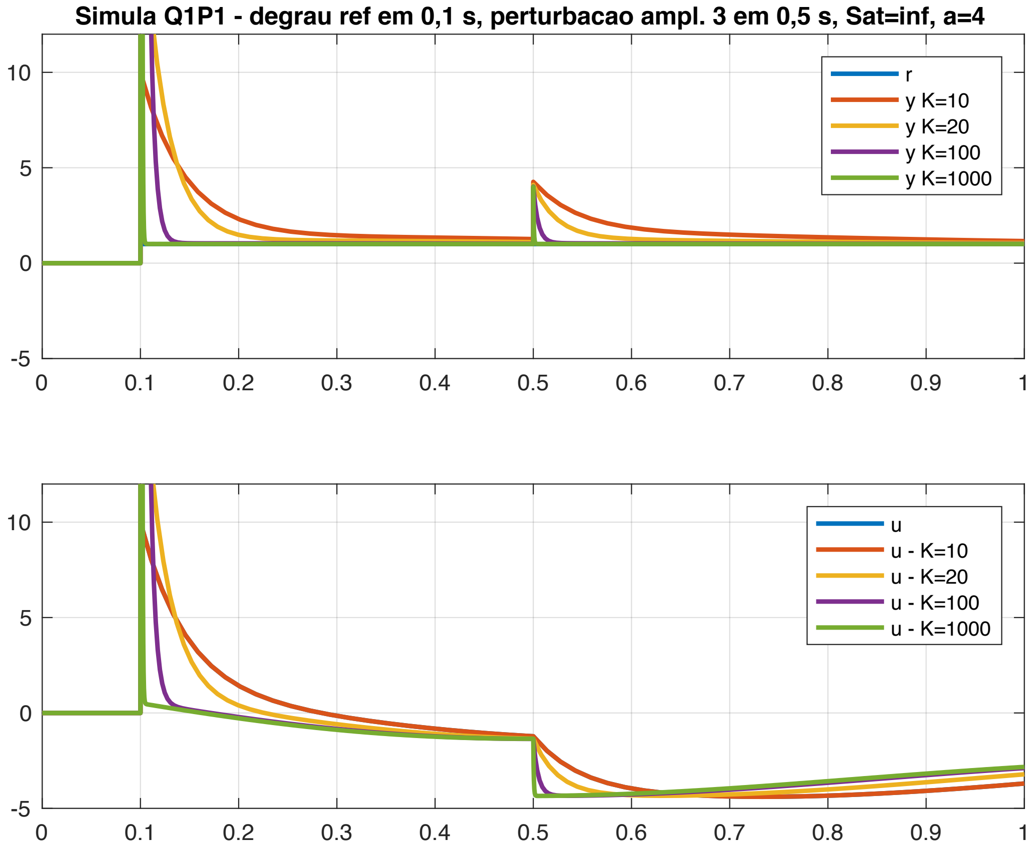
Sim. Pois o LGR tem dois ramos que vem do SPD para os zeros em -1$\pm ja$. Para algum valor de K teremos polos dominantes com parte real -0,5 ($t_s = 4/\sigma = 8$).

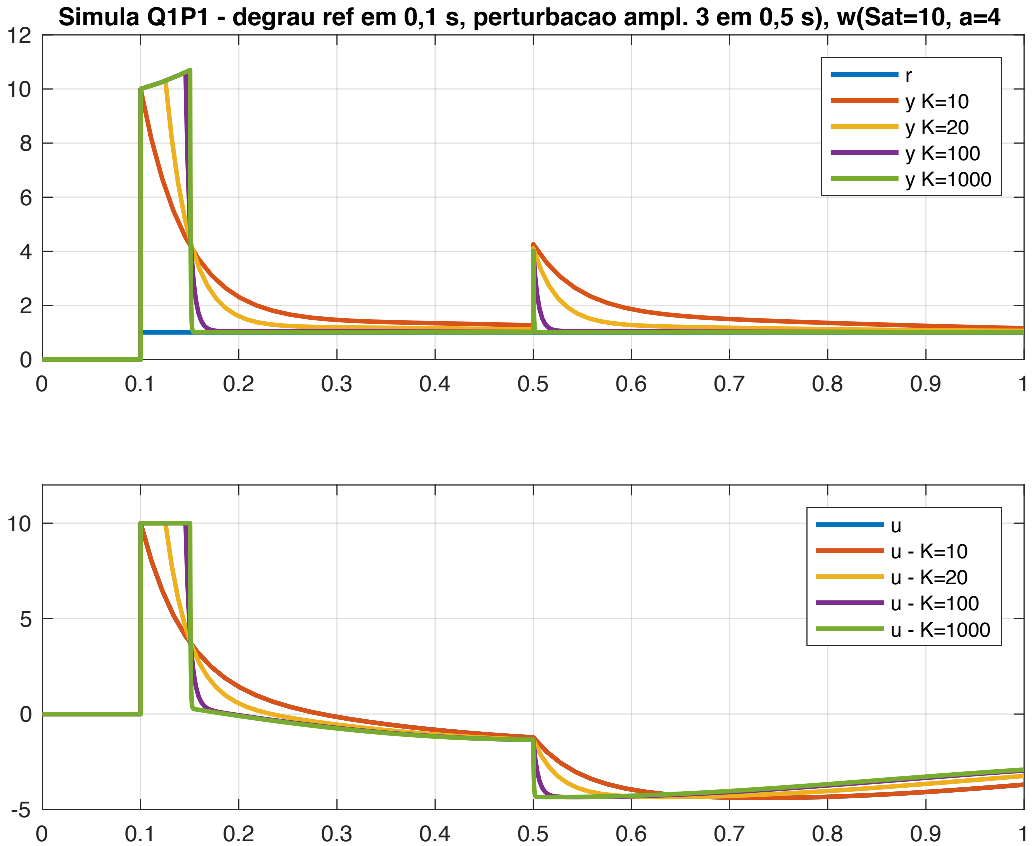
n) (1,0) $K_{ótimo.} = \infty$ $K_{ótimo\ sat} = \infty$

Pois o LGR tem dois ramos que vão dos polos para os zeros em -1$\pm ja$. (Cancelando-se mutuamente para $K \to \infty$). O 3º polo vai para -∞.
Mesmo com saturação, $K \to \infty$, ainda apresenta a resposta mais rápida. Após deixar a saturação, o ganho maior leva à convergência mais rápida. (Veja simulações na pag. 3)

o) (1,0) Resp.:

Não. As amplitudes seriam as mesmas, pois o ganho efetivo é determinado por *Sat*.


Simula Q1P1 - degrau ref em 0,1 s, perturbacao ampl. 3 em 0,5 s, Sat=inf, a=4
r
y K=10
y K=20
y K=100
y K=1000
u
u - K=10
u - K=20
u - K=100
u - K=1000


Simula Q1P1 - degrau ref em 0,1 s, perturbacao ampl. 3 em 0,5 s), w(Sat=10, a=4
r
y K=10
y K=20
y K=100
y K=1000
u
u - K=10
u - K=20
u - K=100
u - K=1000

Resolução de itens selecionados 1ª Prova - CONTROLE DINÂMICO - 1°/2018

1ª Questão:

a) Estabilidade via Critério de Routh-Hurwitz:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K(s^2+2s+1+a^2)}{s(s+1)}}{1+\frac{2K(s^2+2s+1+a^2)}{s(s+1)(s+2)}} = \frac{K(s+2)(s^2+2s+1+a^2)}{s(s+1)(s+2)+2K(s^2+2s+1+a^2)}$$

$$Eq.Carac.: s(s+1)(s+2)+2K(s^2+2s+1+a^2) = s^3+3s^2+2s+2Ks^2+2Ks+2K+2Ka^2$$
$$= s^3+(3+2K)s^2+(2+2K)s+(2+2a^2)K$$

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & (2+4K) \\ s^2 & (3+2K) & (2+2a^2)K \\ s & [(3+2K)(2+4K)-(2+2a^2)K]/(3+2K) & \\ s^0 & (2+2a^2)K & \end{array}$$

$i)\ K > -1{,}5;\quad ii)\ 8K^2+(14-2a^2)K+6>0;\quad iii)\ K>0;$

Estável:
$a=4 \rightarrow 0 < K < 0{,}4069\ \ ou\ 1{,}8431 < K < \infty$
$a=5 \rightarrow 0 < K < 0{,}1733\ \ ou\ 4{,}3276 < K < \infty$
$a=6 \rightarrow 0 < K < 0{,}1050\ \ ou\ 7{,}1450 < K < \infty$

b) Referência, erro em regime permanente, $e_{ss} = (r-y)_{t\rightarrow\infty}$

$$e = r - y$$

$$E(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}\frac{K(s+2)(s^2+2s+1+a^2)}{s(s+1)(s+2)+2K(s^2+2s+1+a^2)}$$

$$E(s) = \frac{1}{s^2}\frac{s(s+1)(s+2)+2K(s^2+2s+1+a^2)-K(s+2)(s^2+2s+1+a^2)}{s(s+1)(s+2)+2K(s^2+2s+1+a^2)}$$

$$E(s) = \frac{1}{s^2}\frac{s(s+1)(s+2)-Ks(s^2+2s+1+a^2)}{s(s+1)(s+2)+2K(s^2+2s+1+a^2)}$$

$$e_{SS} = \lim_{s\rightarrow 0} s\frac{1}{s^2}\frac{s(s+1)(s+2)-Ks(s^2+2s+1+a^2)}{s(s+1)(s+2)+2K(s^2+2s+1+a^2)}$$

$$e_{SS} = \lim_{s\rightarrow 0}\frac{(s+1)(s+2)-K(s^2+2s+1+a^2)}{s(s+1)(s+2)+2K(s^2+2s+1+a^2)}$$

$$e_{SS} = \frac{2-K(1+a^2)}{2K(1+a^2)}$$

c) Perturbação, erro em regime permanente, $e_{ss} = (r-y)_{t\rightarrow\infty}$

$$e = r - y = -y$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{\frac{(s^2+2s+1+a^2)}{s(s+1)}}{1+\frac{2K(s^2+2s+1+a^2)}{s(s+1)(s+2)}} = \frac{(s+2)(s^2+2s+1+a^2)}{s(s+1)(s+2)+2K(s^2+2s+1+a^2)}$$

$$E(s) = -\frac{1}{s}\frac{(s+2)(s^2+2s+1+a^2)}{s(s+1)(s+2)+2K(s^2+2s+1+a^2)}$$

$$e_{SS} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{s} \frac{-(s+2)(s^2+2s+1+a^2)}{s(s+1)(s+2)+2K(s^2+2s+1+a^2)}$$

$$e_{SS} = \lim_{s\to 0} \frac{-(s+2)(s^2+2s+1+a^2)}{s(s+1)(s+2)+2K(s^2+2s+1+a^2)}$$

$$e_{SS} = \frac{-2(1+a^2)}{2K(1+a^2)} = -\frac{1}{K}$$

2ª Questão:

h) Interseção com o eixo $j\omega$. Parte real ou parte imaginária da Eq. Característica para s = $j\omega$.

```
K1=[0.4069 0.1733 0.1050];K2=[1.8431 4.3267 7.1450]
sqrt(2+4*K1)
sqrt(2+4*K2)
a=4:6
sqrt((2+2*a.*a).*K1./(3+2*K1))
sqrt((2+2*a.*a).*K2./(3+2*K2))
```

a=4 -> [w1,w2] = [1.9046 3.0614]
a=5 -> [w1,w2] = [1.6411 4.3940]
a=6 -> [w1,w2] = [1.5556 5.5299]