ENE/FT/UnB
Departamento de Engenharia Elétrica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília
Prof. Adolfo Bauchspiess

Prova individual, sem consulta.
Só é permitido o uso de ***calculadora científica básica****.*
(Números complexos & funções trigonométricas)
Sala BT-25/15, 19/09/2017, 16^{00}-18^{30}

1ª Prova - CONTROLE DINÂMICO - 2°/2018

$t_{s(2\%)} = 4/\sigma \qquad 1+K\dfrac{b(s)}{a(s)}=0 \qquad \alpha = \dfrac{\sum pólos - \sum zeros}{n-m} \qquad \theta = \dfrac{180°(2k+1)}{n-m} \qquad \text{se } m < n\text{-}1 \Rightarrow \sum_{MA} p_i = \sum_{MF} p_j$

O controlador PI, D(s) = K(s+z)/s, é o mais utilizado pela indústria por sua simplicidade e eficácia. Nesta prova serão avaliados diversos aspectos do controlador PI em malha fechada, aplicado ao controle de um motor de corrente contínua, G(s). O sensor H(s), mede a variável controlada, permitindo calcular o erro atuante, e_a. É interessante que o sensor seja sempre bem mais rápido que o processo controlado, mas tipicamente insere um atraso na malha de realimentação. Perturbações são sinais indesejados que podem incidir em qualquer ponto do processo. O sinal w_1 corresponde à projeção na entrada do processo, de todos os ruídos atuando em algum ponto do processo. A perturbação que atua sobre a saída do processo, w_2, é também conhecida como "ruído de medida". O acrônimo "*ysr*" representa "*y* sem ruído".

Ilustração de controlador PID industrial.
http://www.nipponinstruments.com/pid.htm

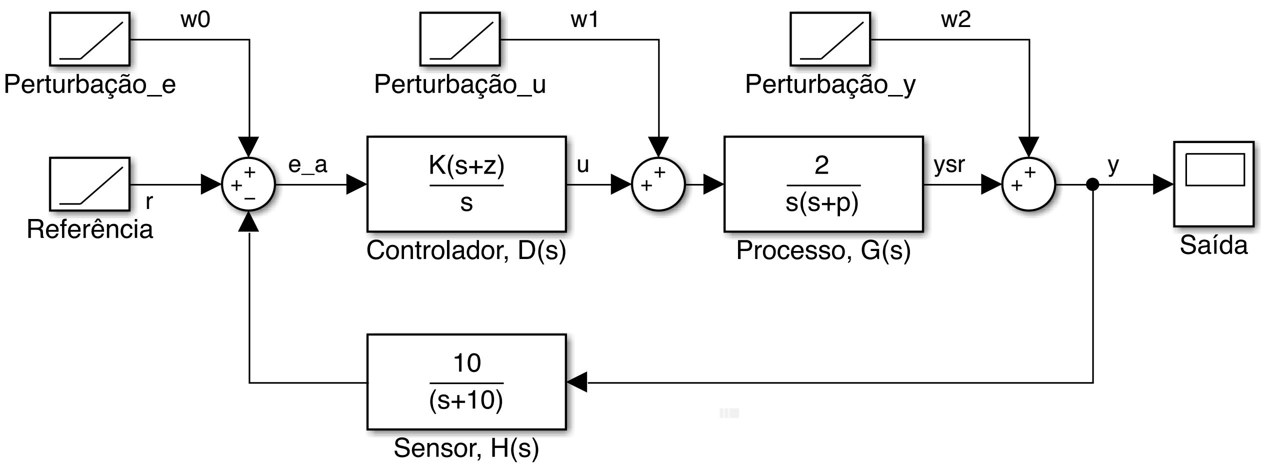


Fig. 1 – Sistema de controle a ser utilizado nas questões 1 e 2. (**Parâmetros p e z** - ver folha de respostas).

1ª Questão: (3,0) Estabilidade.

a) (0,5) Obtenha a Função de Transferência Y(s)/R(s), em malha fechada.
b) (1,0) Utilizando Routh-Hurwitz, para quais valores de K, $-\infty < K < \infty$, o sistema é estável.
c) (1,5) A estabilidade absoluta não é suficiente para um projeto de controle prático. É necessário também que o tempo de acomodação seja razoável (Estabilidade Relativa). Para tanto, aplica-se o critério de Routh-Hurwitz à equação característica do sistema "deslocado" ($s \rightarrow \hat{s}$). Obtenha os valores do ganho K para que um degrau de Y(s)/R(s) tenha $t_{s(2\%)} \leq 4\ s$?

2ª Questão: (3,0) Lugar Geométrico das Raízes.

Inicie com $K > 0$ (LGR^+). Não é preciso calcular, explicitamente, os ângulos de partida e chegada dos pontos de ramificação, mas estes devem ser considerados no esboço.

a) (0,5) Parte real do LGR^+.
b) (0,5) Pontos de ramificação. (Só uma coluna da Tabela 1 corresponde a p e z ***desta*** prova).
c) (1,0) Interseções do LGR^+ com o eixo $j\omega$.

d) (0,5) Esboce o LGR^- ($K < 0$). Note que os cálculos do LGR^+ já são suficientes para o LGR^-.
e) (0,5) Complete o esboço do LGR (cada ramo completo, $-\infty < K < \infty$). Indique, com setas, sobre todos os ramos, o sentido crescente de K, de $-\infty$ a $+\infty$.

Tabela 1: Colunas indicam raízes (r_1, r_2, r_3, r_4) de $a\frac{db}{ds} - b\frac{da}{ds} = c_4s^4 + c_3s^3 + c_2s^2 + c_1s + c_0$.

c_4	60	60	60	60	60	60	60	60	60
c_3	760	720	760	800	760	800	840	680	720
c_2	2640	1910	2420	2930	2140	2680	3220	1680	2160
c_1	3600	1400	2800	4200	1600	3200	4800	1200	2400
c_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

r_1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
r_2	-8.1878	-8.6216	-8.6128	-8.6027	-9.0519	-9.0483	-9.0442	-8.2246	-8.2076
r_3	-2.2394 +1.5208i	-2.0725	-2.0269 +1.1445i	-2.3653 +1.5944i	-2.3737	-2.1425 +1.1419i	-2.4779 +1.6448i	-1.5544 +0.1250i	-1.8962 +1.1305i
r_4	-2.2394 -1.5208i	-1.3058	-2.0269 -1.1445i	-2.3653 -1.5944i	-1.2411	-2.1425 -1.1419i	-2.4779 -1.6448i	-1.5544 -0.1250i	-1.8962 -1.1305i

3ª Questão: (2,0) Erro em regime permanente. Adote aqui, $K = 20$.

a) (1,0) Obtenha as funções de transferência $Y(s)/W_0(s)$, $Y(s)/W_1(s)$, $Y(s)/W_2(s)$.
b) (1,0) Preencha a tabela com os erros $e_{ss} = (r - y)_{t\to\infty}$, para degraus, rampas e parábolas unitários, aplicados individualmente (princípio da superposição) à r, w_0, w_1 e w_2.

Entrada\ Sinal	r	w_0	w_1	w_2
a) degrau e_{ss} =				
b) rampa e_{ss} =				
c) parábola e_{ss} =				

4ª Questão: (2,0) Assinale **V**erdadeiro ou **F**also (na folha de respostas), justificando cada aspecto que considere incorreto. Itens considerados **V**erdadeiros não precisam ser justificados.

a) (0,5) A sensibilidade de uma função de transferência em função de um parâmetro, S_K^T, mede a variação relativa de T em relação à variação relativa de K. $S_K^T < 0$, indica que as variações de T e K são inversamente proporcionais. Em aplicações de controle busca-se $S_K^T \to 0$.
b) (0,5) Um capacitor alimentado por uma fonte de corrente é dito BIBO (Bounded Input – Bounded Output) estável, pois a resposta ao impulso não tende a zero para $t \to \infty$.
c) (0,5) O Tipo do Sistema, mostra a habilidade de um sistema em seguir referências e rejeitar perturbações, em regime permanente. O erro, em ambos os casos (referências e perturbações), é $e_{ss} = (r - y)_{t\to\infty}$, e pressupõem operação estável em malha fechada.
d) (0,5) Sistemas reais sempre estão sujeitos à saturação. Saturação do atuador, das variáveis de estado ou da variável controlada. Em alguns casos o LGR permite prever, mesmo com ganhos de malha elevados, a operação estável com saturação. O sistema linear instável passa a apresentar oscilações senoidais com uma frequência não prevista pelo LGR.

GABARITO

Prova	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	6	6	6	7	7	7	8	8	8
z	0,5	1	1,5	0,5	1	1,5	0,5	1	1,5

1ª Questão: (3,0) Estabilidade.

a) (0,5) $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K(s+z)}{s}\frac{2}{s(s+p)}}{1+\frac{K(s+z)}{s}\frac{2\quad 10}{s(s+p)(s+10)}} = \frac{2K(s+z)(s+10)}{s^2[s^2+(p+10)s+10p]+20K(s+z)}$

Eq. Car.: $s^4 + (p+10)s^3 + 10p\, s^2 + 20Ks + 20Kz)$

b) (1,0) Arranjo de Routh-Hurwitz:

s^4	1	10p	20Kz
s^3	p+10	20K	
s^2	$X = \frac{10p^2+100p-20K}{p+10}$	20Kz	
s^1	$\frac{\frac{(10p^2+100p-20K)}{p+10}20K - 20Kz(p+10)}{X}$		
s^0	20Kz		

Condição de estabilidade: todos os elementos da primeira coluna devem ser positivos.

A) $p > -10$;

B) $K < (10p^2+100p)/20$; (assumindo pivô $s^3 > 0$)

C) $(10p^2+100p-20K)\,20K - 20Kz\,(p+10)^2 > 0$; (assumindo pivô s^2 , $X > 0$)

$-400K^2 + 20K(10p^2+100p) - 20Kz(p+10)^2$

$-400K^2 + 20K[10p^2+100p - z(p+10)^2]$

$20K\{-20K+[10p^2+100p - z(p+10)^2]\}$

$K < [10p^2+100p - z(p+10)^2]/20$ e $K>0$

D) $Kz > 0$

Condições B e C:

Prova 1 2 3

Tipo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B: K<	48.000	48.000	48.000	59.5000	59.5000	59.5000	72.0000	72.0000	72.0000

C1: K_{est}>	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C1: K_{est}<	41.600	35.200	28.8000	52.2750	45.0500	37.8250	63.9000	55.8000	47.7000

c) Estabilidade Relativa

$s = \hat{s} - 1 \rightarrow$

$Eq.Car.: \hat{s}^4 + (6+p)\hat{s}^3 + (-24+7p)\hat{s}^2 + (26-17p+20K)\hat{s} - 10 + 9p - 20K + 20Kz$

Arranjo de Routh-Hurwitz:

$\hat{s}^4$ 1 -24+7p -10+9p-20K+20Kz

$\hat{s}^3$ 6+p 26 -17p+20K

$\hat{s}^2$ B = $\dfrac{(6+p)(-24+7p) - 26 + 17p - 20K}{6+p}$ -10+9p-20K+20Kz

$\hat{s}^1$ C = $\dfrac{X(26 - 17p + 20K) - (6+p)(-10+9p-20K+20Kz)}{X}$ (X – pivô da linha s^2)

$\hat{s}^0$ D = -10+9p-20K+20Kz

B: K<	14.6000	14.6000	14.6000	20.9000	20.9000	20.9000	27.9000	27.9000	27.9000
C1: K<	18.0484	12.8497	7.4000 +4.0684i	24.9900	19.3798	10.6625 +2.4266i	32.6738	26.4499	18.6355
C2: K>	3.9516	5.5503	7.4000 4.0684i	4.7850	6.1702	10.6625 -2.4266i	5.6262	6.9501	9.8645
D: K>	4.4000	-Inf	-4.4000	5.3000	-Inf	-5.3000	6.2000	-Inf	-6.2000

$t_{s(2\%)} \leq 4s$:

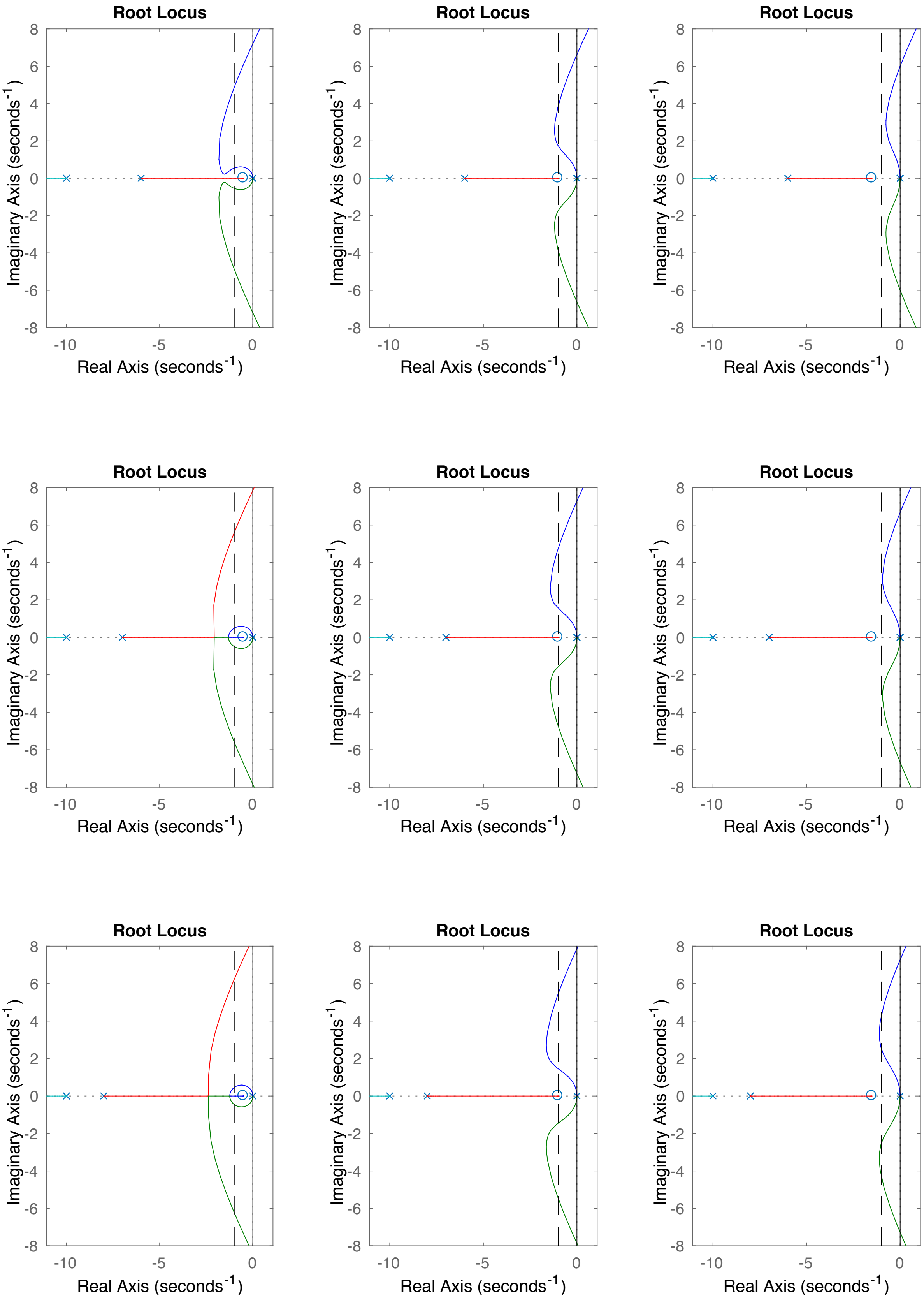
$K_1 < K_{est,\,rel} < K_2$	3.9515 4.4000	5.5503 12.8497		4.7850 5.3000	6.1702 19.3798		5.5262 6.2000	6.9501 26.4499	9.8645 18.6355

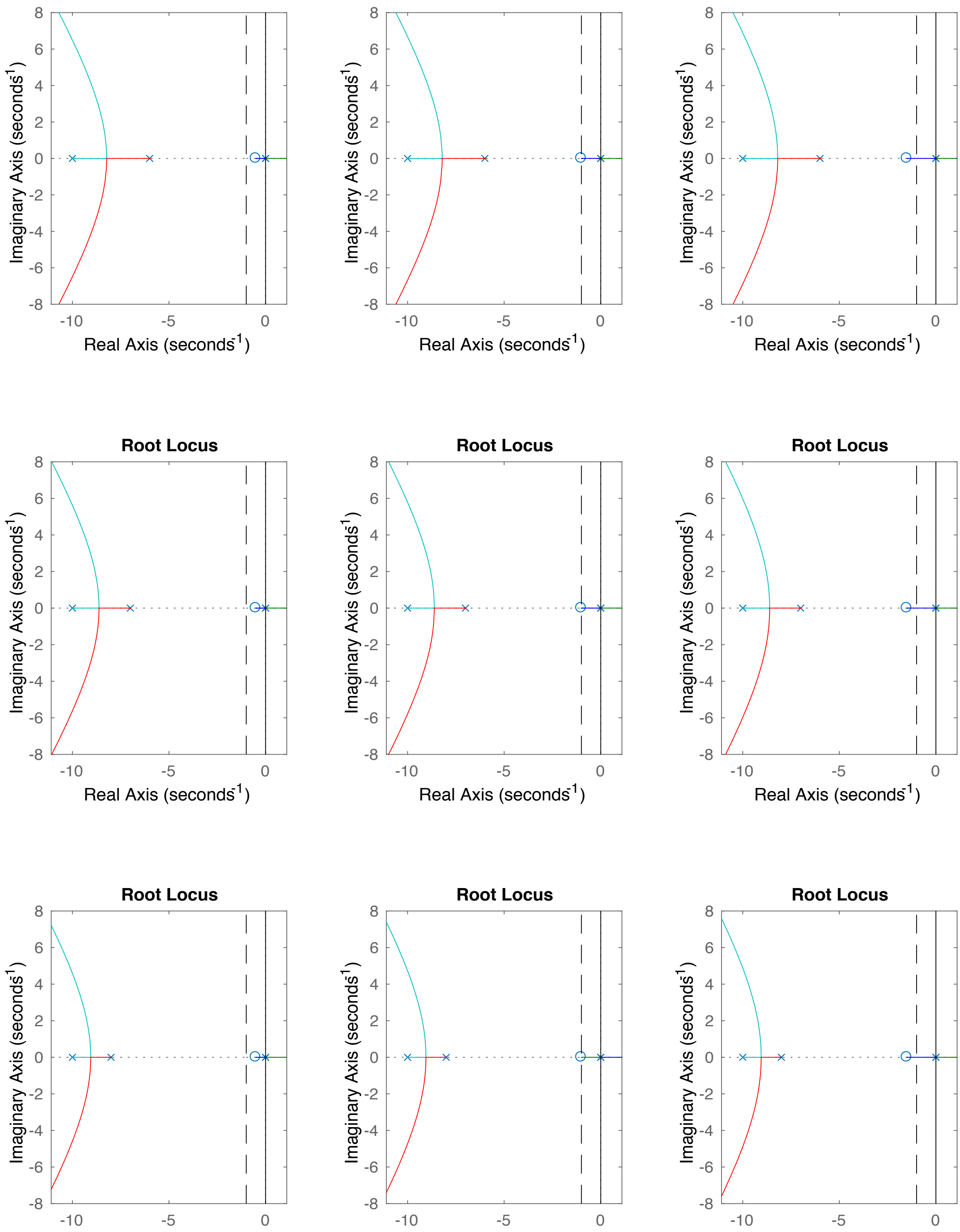
2ª Questão: (3,0) Lugar Geométrico das Raízes.

Prova	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a) (0,5) Re LGR$^+$	[-,5 -6] [-10 -∞]	[-1 -6] [-10 -∞]	[-1,5 -6] [-10 -∞]	[-,5 -7] [-10 -∞]	[-1 -7] [-10 -∞]	[-1,5 -7] [-10 -∞]	[-,5 -8] [-10 -∞]	[-1,0 -8] [-10 -∞]	[-1,5 -8] [-10 -∞]
b) (0,5)				-2.0725			-2.3737		
RamiLGR$^+$				-1.3058			-1.2411		
LGR$^-$	-8.2246	-8.2076	-8.1878	-8.6216	-8.6128	-8.6027	-9.0519	-9.0483	-9.0442
LGR$^{+/-}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c) (1,0) ω_{cr}	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	7.2111	6.6332	6.0000	7.8422	7.2801	6.6732	8.4261	7.8740	7.2801

d) (0,5) Esboce o LGR$^-$ ($K < 0$).

e) (0,5) Complete o esboço


Root Locus
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-5
0



3ª Questão: (2,0) Erro em regime permanente.

a) (1,0) $$\frac{Y(s)}{W_0(s)} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K(s+z)}{s}\,\frac{2}{s(s+p)}}{1+\frac{K(s+z)}{s}\,\frac{2 \quad 10}{s(s+p)(s+10)}} = \frac{2K(s+z)(s+10)}{s^2[s^2+(p+10)s+10p]+20K(s+z)}$$

$$\mathrm{Y(s)/W_1(s)} = \frac{\frac{2}{s(s+p)}}{1+\frac{K(s+z)}{s}\,\frac{2 \quad 10}{s(s+p)(s+10)}} = \frac{2s(s+10)}{s^2[s^2+(p+10)s+10p]+20K(s+z)}$$

$$\mathrm{Y(s)/W_2(s)} = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s^2(s+p)(s+10)}{s^2[s^2+(p+10)s+10p]+20K(s+z)}$$

b) (1,0) $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2K(s+z)(s+10)}{s^2[s^2+(p+10)s+10p]+20K(s+z)} = T(s)$ (Da 1ª Questão)

$E = R - Y$

Degrau: $E = \frac{1}{s} - T(s)\frac{1}{s} = \cdots e = \lim_{s\to 0} s(\quad) = \frac{20Kz-2Kz10}{20Kz} = 0$

Rampa: $E = \frac{1}{s^2} - T(s)\frac{1}{s^2} = \cdots e = \lim_{s\to 0} s(\quad) = \frac{-2z}{20Kz} = \frac{-1}{10K}$

Parábola: $E = \frac{1}{s^3} - T(s)\frac{1}{s^3} = \cdots e = \lim_{s\to 0} s(\quad) = \lim_{s\to 0}\frac{\ldots-2Ks-2Kz}{\ldots+20s(s+z)} = -\infty$

$\frac{Y(s)}{W_0(s)}$: $e = r - y =$ -y

Degrau: $y_{ss} = 1$; $r = 0$; $e_{ss} = -1$. (degraus na entrada são seguidos sem erro).

Rampa: $y_{ss} =$ t.u(t)-0,1K; $r = 0$; $e_{ss} = -\infty$. (rampa na entrada é seguida com erro finito).

Parábola: $y_{ss} = \frac{t^2}{2}.u(t) - \cdots$; $r = 0$; $e_{ss} = -\infty$. (não acompanha a parábola mas y tende a finito).

$\frac{Y(s)}{W_1(s)}$: $e = r - y =$ -y

Degrau: $y = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{2s(s+10)}{s^2[s^2+(p+10)s+10p]+20K(s+z)}\frac{1}{s}\right) = 0.$

Rampa: $y = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{2s(s+10)}{s^2[s^2+(p+10)s+10p]+20K(s+z)}\frac{1}{s^2}\right) = \frac{20}{20Kz} = \frac{1}{Kz}.$

Parábola: $y = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{2s(s+10)}{s^2[s^2+(p+10)s+10p]+20K(s+z)}\frac{1}{s^3}\right) = \lim_{s\to 0}\frac{s2s(s+10)}{s^2[\ldots]+20K(s+z)}\frac{1}{s^3} = \infty.$

$\frac{Y(s)}{W_1(s)}$: $e = r - y =$ -y

Degrau: $y = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{s^2(s+p)(s+z)}{s^2[s^2+(p+10)s+10p]+20K(s+z)}\frac{1}{s}\right) = 0.$

Rampa: $y = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{s^2(s+p)(s+z)}{s^2[s^2+(p+10)s+10p]+20K(s+z)}\frac{1}{s^2}\right) = 0.$

Parábola: $y = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{s^2(s+p)(s+z)}{s^2[s^2+(p+10)s+10p]+20K(s+z)}\frac{1}{s^3}\right) = \frac{pz}{20Kz} = \frac{p}{20K}.$

Entrada\ Sinal	r	w_0	w_1	w_2
a) degrau e_{ss} =	0	-1	0	0
b) rampa e_{ss} =	-0,1K = -2	-∞	-1/(Kz) $e_{(z=0,5;\ 1;\ 1,5)}$ = -0.1; -0.05; -0.033	0
c) parábola e_{ss} =	-∞	-∞	-∞	$-p/(20K)$ $e_{(p=6;\ 7;\ 9)}$ = -0.015; -0.0175; -0.02

4ª Questão: (2,0) **V**erdadeiro ou **F**also.

a) (0,5) Resposta: F
Justificativa : $S_K^T < 0$ indica que um aumento de *K* provoca uma diminuição de *T*.

b) (0,5) Resposta: F
Justificativa: O sistema é BIBO ***instável***.

c) (0,5) Resposta: V

d) (0,5) Resposta: F
Justificativa: As oscilações senoidais são previstas pela interseção do LGR com o eixo $j\omega$.