Departamento de Engenharia Elétrica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília
ENE/FT/UnB Prof. Adolfo Bauchspiess

Prova individual, sem consulta.
Só é permitido o uso de ***calculadora científica básica.***
(Números complexos & funções trigonométricas)
Auditório FT-15, 5/12/2018, 16^{00}-18^{30}

3ª Prova - CONTROLE DINÂMICO - 2°/2018

$|sI - A + BK| = \tilde{a}(s)$

$|sI - A + LC| = \Delta(s)$

$|sI - A_a + B_a K_a| = \tilde{a}_a(s)$

$|sI - A_a + L_a C_a| = \Delta_a(s)$

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r;$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ x_i \end{bmatrix}.$$

Mason: $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{\Sigma P_i \Delta_i}{\Delta}$

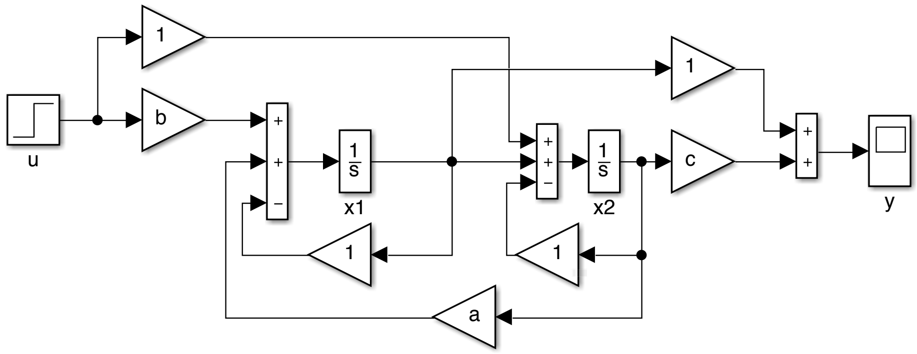
$P_i - i^{th}$ *caminho direto*, $u \rightarrow y$

$L_j - j^{th}$ *laço*

$\Delta = 1 - L_1 - L_2 \ldots + L_i L_j + \ldots$

$\Delta_i = \Delta - $ (*laços que tocam* P_i)

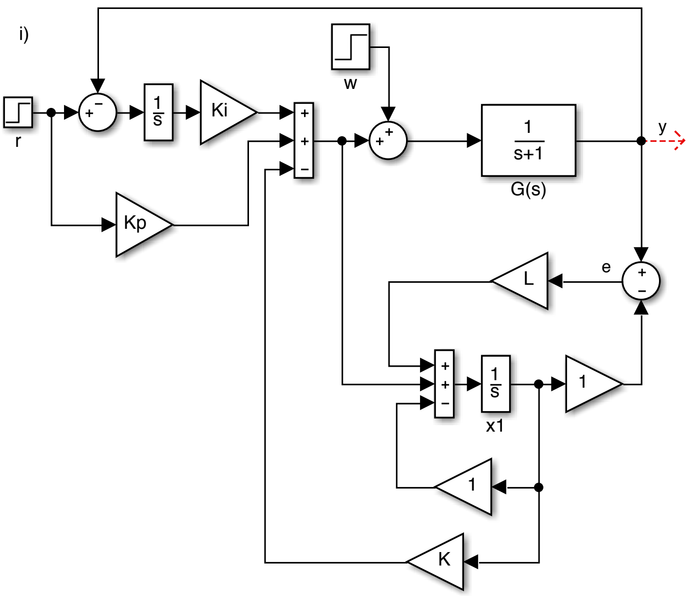
1ª Questão: (2,0) Para quais valores de a, b e c o sistema mostrado, não é complementante controlável. E para quais valores de a, b e c o sistema não é complementamente observável. Nestes casos qual autovalor não aparece na função de transferência Y(s)/U(s)?



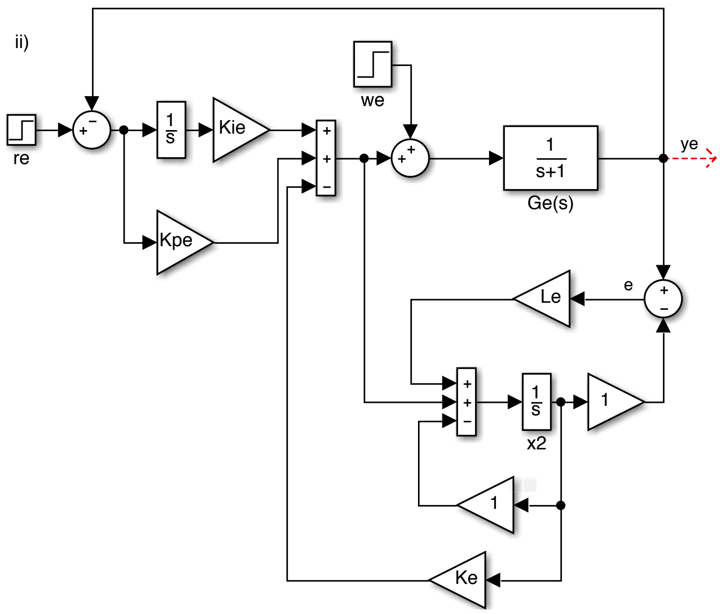
2ª Questão: (3,0) Considere o projeto por realimentação de estado observado de um sistema G(s) sujeito a perturações constantes por partes W(s). Em ambos os casos vale o princípio da separabilidade.

a) (0,5) Apresente a matriz aumentada A_a do controlador no EE para G(s) – realização i).
b) (1,0) Calcule os valores de L, K, K_i e K_p para que a função de transferência Y(s)/R(s) seja 2/(s+2).
c) (0,5) Apresente a matriz aumentada A_{ae} do controlador no EE para Ge(s) – realização ii).
d) (1,0) Calcule os valores de L_e, K_e, K_{ie} e K_{pe} para que a função de transferência $Y_e(s)/R_e(s)$ seja 2/(s+2).

i)



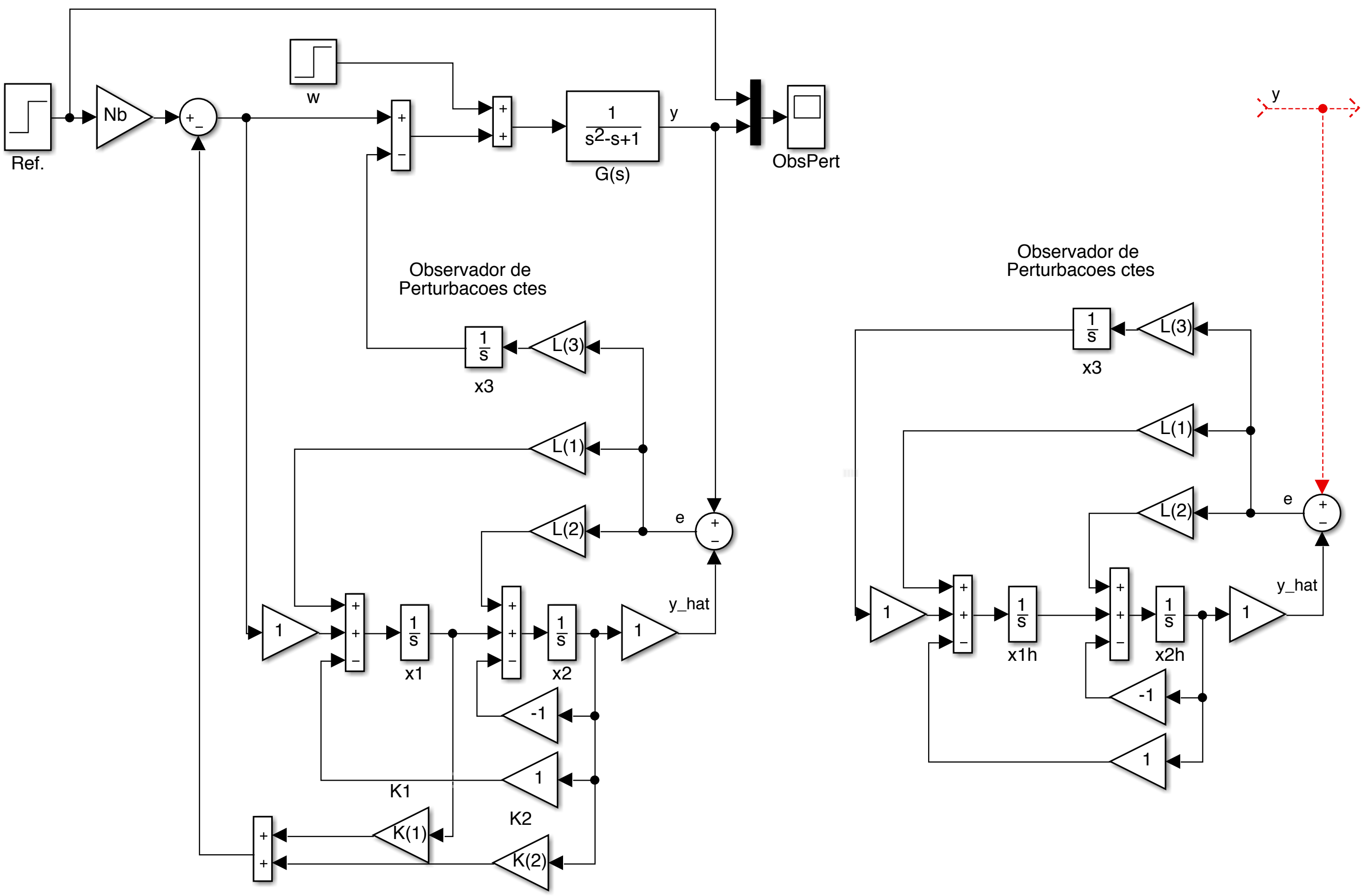
ii)



3ª **Questão**: (3,0) Considere o controle no espaço-de-estados de um processo de 2ª ordem, instável em malha aberta.

i) Controle no Espaço de Estados com observador de perurbações

ii) Observador aumentado - Princípio da Separabilidade



Para lidar com perturbações, erros de modelo e apresentar uma resposta rápida e sem oscilação, deve ser projetado nesta questão um controlador por realimentação de estados com observador de perturbações constantes.

a) (1,0) Utilizando x_1 e x_2 indicados, calcule K_1 e K_2 e N_b de tal forma que todos os autovalores de malha fechada estejam em s = -2.
b) (0,5) Obtenha a matriz de estados aumentada A_a, necessária ao cálculo do observador aumentado.
c) (1,0) Calcule **L**=[L_1 L_2 L_3], tal que os autovalores do observador aumentado sejam sejam $s_{1,2,3} = -10$.
d) (0,5) Qual a função de transferência completa, Y(s)/R(s)?

4ª **Questão**: (2,0) Assinale V -Verdadeiro ou F – Falso. Caso considere um item falso, justitique comentando todos os aspectos incorretos.

a) O controle no espaço-de-estados de um sistema não-linear só pode ser realizado se todas as variáveis de estado do processo puderem ser medidas através de sensores, para gerar a lei de controle $u = -(k_1x_1+k_2x_2+\ldots k_nx_n) + u_0$, onde u_0 é o ponto de operação da variável controlada do sistema linearizado.
b) O controle no espaço-de-estados com canal integral do erro $(r - y)$ permite obter a mesma função de transferência que o controle no espaço-de-estados com observador de perturbações constantes $(y - \hat{y})$.
c) O controle de um sistema com canal integral pode ter um sobrepasso maior que o previsto pela equação característica de malha fechada. Isto pode ser devido à presença de zeros na função de transferência de malha aberta ou devido ao efeito Wind-up, caso haja saturação.
d) O controle no espaço de estados de um processo não-linear de nível de líquidos com canal integral deve considerar o modelo linearizado para um certo ponto de operação. O canal integral tem a habilidade de zerar o erro em regime permanente para qualquer referência constante por partes. A velocidade de resposta não dependerá da referencia escolhida, desde que não haja saturação.

GABARITO

1ª Questão: (2,0)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & c \end{bmatrix} x$$

sX-AX = BU; X=(sI-A)$^{-1}$BU; Y = C(sI-A)$^{-1}$BU

$$AB = \begin{bmatrix} a-b \\ b-1 \end{bmatrix}; \quad det[A \quad AB] = det\begin{bmatrix} b & a-b \\ 1 & b-1 \end{bmatrix} = b^2 - a = 0 \rightarrow \boxed{b^2 = a: Não\ controlável}$$

$$CA = \begin{bmatrix} c-1 & a-c \end{bmatrix}; \quad det\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = det\begin{bmatrix} 1 & c \\ c-1 & a-c \end{bmatrix} = a - c^2 = 0 \rightarrow \boxed{c^2 = a: Não\ controlável}$$

Função de Transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & -a \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} u;$$

$$= \frac{1}{s^2+2s+1-a} \begin{bmatrix} 1 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & a \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} u;$$

$$= \frac{1}{s^2+2s+1-a} \begin{bmatrix} s+1+c & a+cs+c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} u;$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+2s+1-a}(bs+b+bc+a+cs+c); \qquad \boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s(b+c)+a+b+c+bc}{s^2+2s+1-a}}$$

$$Sistema\ Não-Controlável: a = b^2 \rightarrow$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s(b+c)+b^2+b+c+bc}{s^2+2s+1-b^2} = \frac{s(b+c)+(b+1)b+(b+1)c}{(s+1+b)(s+1-b)} = \frac{s(b+c)+(b+1)(b+c)}{(s+1+b)(s+1-b)}$$

$$= (b+c)\frac{s+b+1}{(s+1+b)(s+1-b)} = \frac{(b+c)}{(s+1-b)} \rightarrow \boxed{s = -1-b \implies \quad autovalor\ cancelado.}$$

$$Sistema\ Não-Observável: a = c^2 \rightarrow$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s(b+c)+c^2+c+b+bc}{s^2+2s+1-c^2} = \frac{s(b+c)+(c+1)(b+c)}{(s+1+c)(s+1-c)}$$

$$= (b+c)\frac{s+1+c}{(s+1+c)(s+1-c)} = \frac{(b+c)}{(s+1-c)} \rightarrow \boxed{s = -1-c \implies \quad autovalor\ cancelado.}$$

2ª Questão: (3,0)

a) Com canal Proporcional à referência e Integral do erro, o canal P não acrescenta laço (Mason) ao diagrama de blocos. O projeto dos autovalores de malha fechada não precisa considerar o canal P. Este pode ser considerado a posteriori, acrescentando-se apenas um zero em $s = -K_i/K_p$.

(0,5) $A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $sI - A_a + B_aK_a \Rightarrow det\begin{bmatrix} s+1+K_1 & K_2 \\ 1 & s \end{bmatrix} = s^2 + s(1+K_1) - K_2$

Com canal I teremos 2 autovalores, $\tilde{\alpha}(s) = (s+2)(s+p) = s^2 + s(2+p) + 2p$
e p deverá ser cancelado pelo canal P.

Obs: p não deve ser muito diferente de 2, senão, em processos reais, pode haver saturação ou torna-se o processo lento (perturbações). Para qual valor de p obtêm-se a função de transferência desejada $Y(s)/R(s)$.

$$\begin{cases} 1+K_1 = 2+p \\ -K_2 = 2p \end{cases} \quad escolhendo\ p = 2 \quad \begin{cases} K_1 = 3 \\ K_i = -K_2 = 4 \end{cases} \quad \text{Com p} = 1, \text{teríamos} \begin{cases} K_1 = 2 \\ K_i = 2 \end{cases}$$

(1,0) $L = 9$ $(\Delta(s) = s + 10)$ $3\ a\ 5\ x\ mais\ rápido\ que\ (s+2)$ $K = 3$ $K_i = 4$ (Realm. +) $K_p = 2$

c) Com canal Proporcional-Integral do erro, o canal P acrescenta laço (Mason) ao diagrama de blocos. O projeto dos autovalores de malha fechada precisa considerar o canal P. A posição do zero em $s = -K_{ie}/K_{pe}$.

(0,5) $A_{ae} = \begin{bmatrix} A - CK_{pe} & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - K_{pe} & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$sI - A_{ae} + B_{ae}K_{ae} \Rightarrow det \begin{bmatrix} s+1+K_{pe}+K_1 & K_2 \\ 1 & s \end{bmatrix} = s^2 + s(1+K_{pe}+K_1) - K_2$$

$$\begin{cases} 1+K_{pe}+K_1 = 2+p \\ -K_2 = 2p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_e = K_1 = p+1-K_{pe} \\ K_{ie} = 2p \end{cases}$$

$K_{ie} = -K_2$ (Realimentação positiva) → $K_{pe} = -K_{ie}/K_{pe} = -2$ → $K_{pe} = K_{ie}/2$

d) (1,0) com $p = 2$ e $\Delta(s) = s + 10$ $L_e = 9$ $K_e = 1$ $K_{ie} = 4$ $K_{pe} = 2$

Escolhendo $p = 1$, $\Delta(s) = s + 10$, teríamos $L_e = 9$ $K_e = 1$ $K_{ie} = 2$ $K_{pe} = 1$

3ª **Questão**: (3,0)

a) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \qquad y = [0 \quad 1]\boldsymbol{x}$

$$|sI - A + BK| = \begin{vmatrix} s+k_1 & 1+k_2 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix} = s^2 + s(k_1 - 1) - k_1 + k_2 + 1 = s^2 + 4s + 4$$

$$\frac{1}{s^2 - s + 1} \Rightarrow Realimentação\ de\ estados \Rightarrow \frac{1}{s^2 + 4s + 4} \Rightarrow N_b = 4$$

(1,0) $K_1 = 5$ $K_2 = 8$ $N_b = 4$

b) (0,5)
Ac=0; Cc=1;

Aa=[A B*Cc;
0 0 Ac];
Ba=[B;0]; Ca=[C 0];

$$Aa = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; C = [0 \quad 1 \quad 0]$$

c) $LC = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}[0 \quad 1 \quad 0] = \begin{vmatrix} 0 & l_1 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & l_3 & 0 \end{vmatrix} \qquad |sI - A_a + L_aC_a| = \begin{vmatrix} s & l_1 + 1 & -1 \\ -1 & s + l_2 - 1 & 0 \\ 0 & l_3 & s \end{vmatrix}$

$$\Delta(s) = s^3 + 30s^2 + 300s + 1000 = s^3 + s^2(l_2 - 1) + s(l_1 + 1) + l_3$$

(1,0) $L_1 = 299$ $L_2 = 31$ $L_3 = 1000$

d) (0,5) Y(s)/R(s) = $\frac{4}{(s+2)(s+2)}$

4ª **Questão**: (2,0) Assinale V -Verdadeiro ou F – Falso. Caso considere um item falso, justitique comentando todos os aspectos incorretos.

a) F – i) as variáveis de estado não precisam ser medidas, podem também ser estimadas (derivadas, model em MA ou, a melhor opção, um observador de estados. ii) u_0 é o ponto de operação da variável manipulada.

b) F – O canal integral do erro (r -y) aumenta a ordem do sistema. O observador de perturbações constantes não aparece, assintóticamente, na função de transferência.

c) V

d) F – Como o processo é não linear, há erro de modelo (diferença em relação ao modelo linearizado no ponto de operação) em quase toda a região de trabalho. Erro de modelo produz diferentes velocidades de resposta.

GABARITO SUCINTO

1ª Questão: (2,0)

$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & a \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix} u;\ \ y = [1 \quad c] x$ $\qquad det \begin{bmatrix} b & a-b \\ 1 & b-1 \end{bmatrix} = b^2 - a = 0 \rightarrow \boxed{b^2 = a: Não\ controlável}$ (0,4)

$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s(b+c)+a+b+c+bc}{s^2+2s+1-a}}$ (0,4) $\qquad det \begin{bmatrix} 1 & c \\ c-1 & a-c \end{bmatrix} = a - c^2 = 0 \rightarrow \boxed{c^2 = a: Não\ controlável}$ (0,4)

$Sistema\ Não-Controlável: \frac{Y(s)}{U(s)} = (b+c)\frac{s+1+b}{(s+1+b)(s+1-b)} \rightarrow \boxed{s = -1-b \implies \ autovalor\ cancelado.}$ (0,4)

$Sistema\ Não-Observável: \frac{Y(s)}{U(s)} = (b+c)\frac{s+1+c}{(s+1+c)(s+1-c)} \rightarrow \boxed{s = -1-c \implies \ autovalor\ cancelado.}$ (0,4)

2ª Questão: (3,0)

a) (0,5) Proporcional à referência e Integral do erro: $A_a = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) (1,0) $sI - A_a + B_a K_a \implies det \begin{bmatrix} s+1+K_1 & K_2 \\ 1 & s \end{bmatrix} = s^2 + s(1+K_1) - K_2 = (s+2)(s+p)$

$\begin{cases} 1+K_1 = 2+p \\ K_i = -K_2 = 2p \end{cases} \implies \begin{cases} K_1 = p+1 \\ K_i = 2p \end{cases}$ (p – polo não especificado, a ser cancelado)

$\boxed{escolhendo\ p = 2\ e\ \Delta(s) = (s+10)\ \ (Obs. 5\ x\ polo\ especif.) \qquad L = 9 \quad K = 3 \quad K_i = 4 \quad K_p = 2}$

c) (0,5) Proporcional-Integral do erro: $A_{ae} = \begin{bmatrix} -1-K_{pe} & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

d) (1,0) $sI - A_{ae} + B_{ae} K_{ae} \implies det \begin{bmatrix} s+1+K_{pe}+K_1 & K_2 \\ 1 & s \end{bmatrix} = s^2 + s(1+K_{pe}+K_1) - K_2$

$\begin{cases} 1+K_{pe}+K_1 = 2+p \\ -K_2 = 2p \end{cases} \implies \begin{cases} K_e = K_1 = p+1-K_{pe} \\ K_{ie} = 2p \end{cases}$ $\rightarrow K_{pe} = -K_{ie}/K_{pe} = -2 \rightarrow K_{pe} = K_{ie}/2$

$\boxed{\text{com } p = 2 \text{ e } \Delta(s) = s+10 \qquad L_e = 9 \quad K_e = 1 \quad K_{ie} = 4 \quad K_{pe} = 2}$

3ª **Questão**: (3,0)

a) (1,0) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad \begin{vmatrix} s+K_1 & 1+K_2 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix} = s^2 + s(K_1 - 1) - K_1 + K_2 + 1 = s^2 + 4s + 4$

$\boxed{K_1 = 5 \qquad K_2 = 8 \qquad N_b = 4}$

b) (0,5) $Aa = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; C = [0 \quad 1 \quad 0]$

c) (1,0) $LC = \begin{vmatrix} 0 & L_1 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & L_3 & 0 \end{vmatrix} \qquad |sI - A_a + L_a C_a| = \begin{vmatrix} s & L_1+1 & -1 \\ -1 & s+L_2-1 & 0 \\ 0 & L_3 & s \end{vmatrix}$

d) $\Delta(s) = s^3 + 30s^2 + 300s + 1000 = s^3 + s^2(L_2 - 1) + s(L_1 + 1) + L_3$

$\boxed{L_1 = 299 \qquad L_2 = 31 \qquad L_3 = 1000}$

e) (0,5) $\boxed{Y(s)/R(s) = \frac{4}{(s+2)(s+2)}}$

4ª Questão: (2,0) Assinale V -Verdadeiro ou F – Falso. Caso considere um item falso, justitique comentando todos os aspectos incorretos.

a) F – i) variáveis podem estimadas. ii) u_0 é o ponto de operação da variável manipulada.
b) F – O canal integral do erro (r -y) aumenta a ordem do sistema. O observador de perturbações não.
c) V
d) F – Erro de modelo (ponto de operação) produz diferentes velocidades de resposta.