

Controle de Sistemas Dinâmicos

CSD4 – Resposta no Tempo (1^a e 2^a Ordem)

Prof. Adolfo Bauchspiess
ENE/UnB

(Material de aula *Complementar*, adaptado parcialmente de Nise – Eng. de Sist. de Controle)

Resposta ao Degrau – F. Transf. com polo e zero

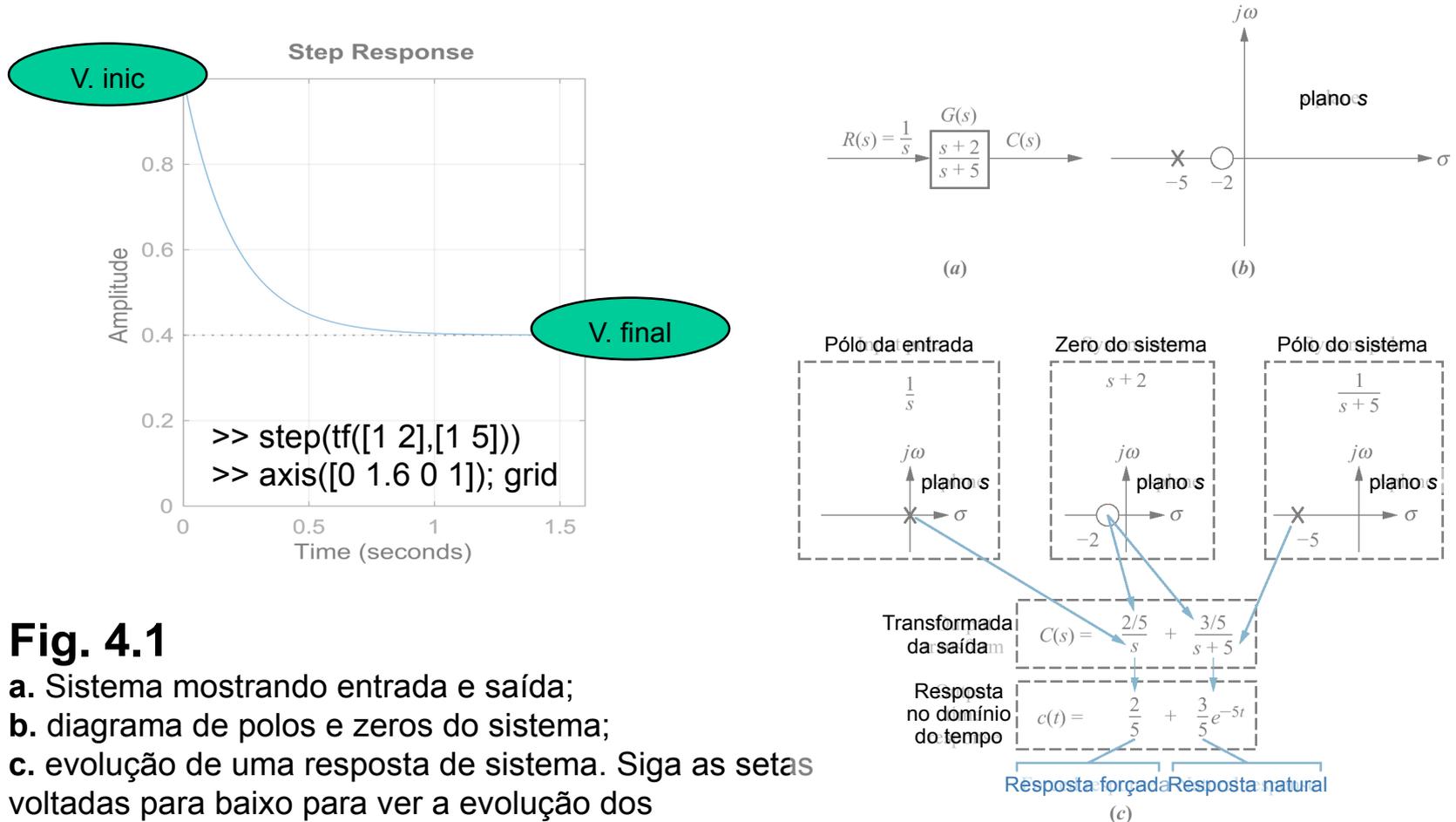
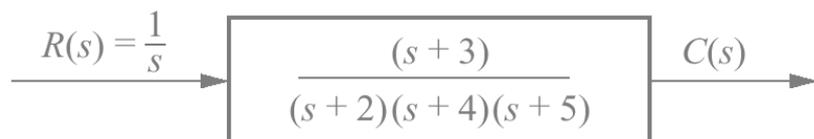


Fig. 4.1

- a. Sistema mostrando entrada e saída;
- b. diagrama de polos e zeros do sistema;
- c. evolução de uma resposta de sistema. Siga as setas voltadas para baixo para ver a evolução dos componentes da resposta gerada pelo polo ou pelo zero.

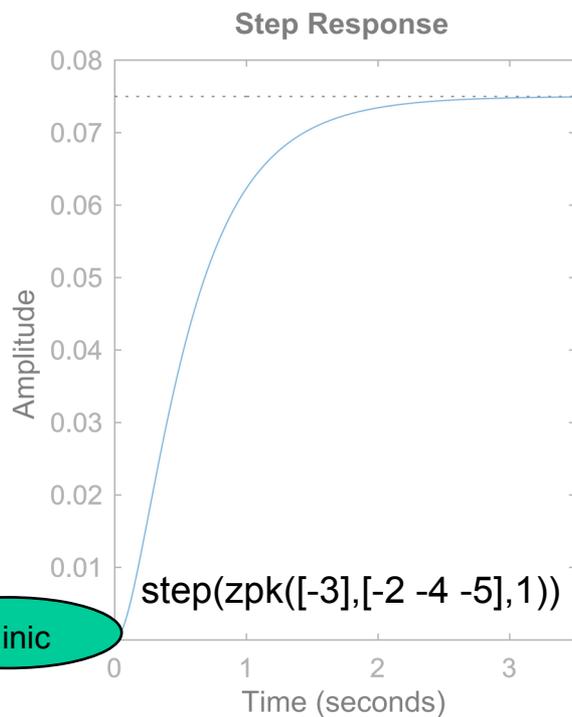
$$C(s) = \frac{(s+2)}{s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} = \frac{2/5}{s} + \frac{3/5}{s+5}$$

Exemplo: Resposta natural + Resposta forçada



$$C(s) \equiv \underbrace{\frac{K_1}{s}}_{\text{Resposta forçada}} + \underbrace{\frac{K_2}{(s+2)} + \frac{K_3}{(s+4)} + \frac{K_4}{(s+5)}}_{\text{Resposta natural}}$$

$$c(t) \equiv \underbrace{K_1}_{\text{Resposta forçada}} + \underbrace{K_2 e^{-2t} + K_3 e^{-4t} + K_4 e^{-5t}}_{\text{Resposta natural}}$$



V. Final
(3/40)

V. inic

$$y(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s)G(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+4)(s+5)} = \frac{3}{40}$$

Sistema de 1ª Ordem

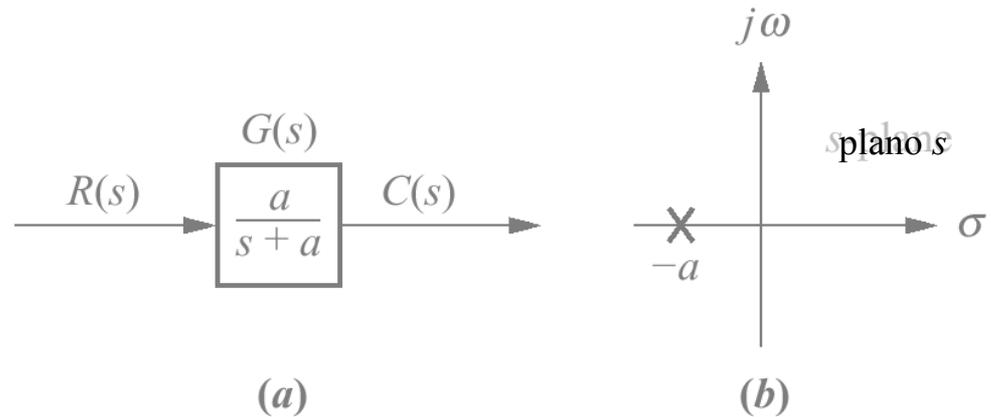
Fig. 4.4

a. Sistema de 1ª ordem; `>>tf(a,[1 a])`

b. gráfico do pólo

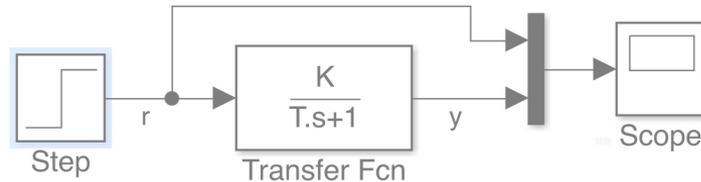
$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{a}{s(s+a)}$$

$$c(t) = c_f(t) + c_n(t) = 1 - e^{-at}$$



Outras representações:

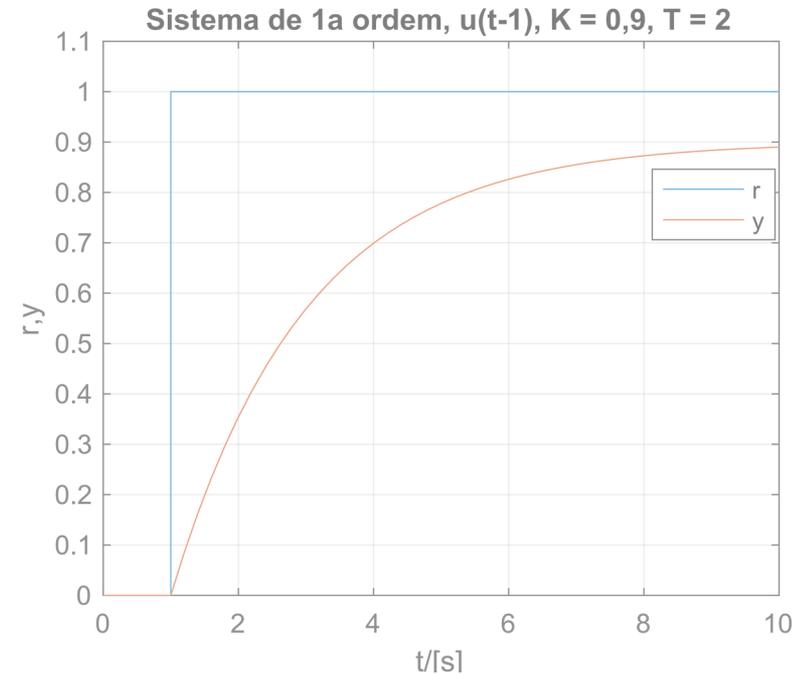
c. Ganho, Cte de tempo; `>>tf(K,[T 1])`



d. `>> tf(K,[1 a])`

$$C(s) = \frac{K}{s(s+a)} = \frac{K/a}{s} - \frac{K/a}{(s+a)}$$

(Identificação experimental (a, T, K): Simples!)



Sistema de 1ª Ordem

Fig. 4.5

Resposta de um sistema de primeira ordem a um degrau unitário

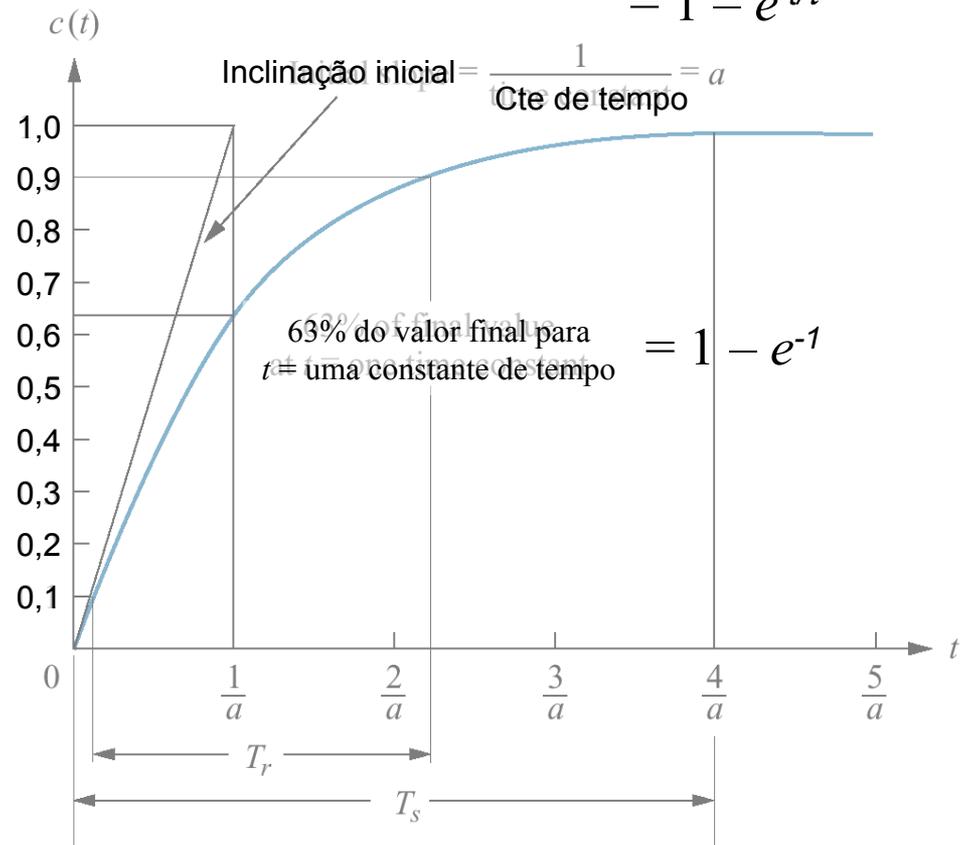
$$T_r = \frac{2,31}{a} - \frac{0,11}{a} = \frac{2,2}{a}$$

$$T_s = \frac{4}{a}$$

$1/a = \tau$, constante de tempo

$$c(t) = c_f(t) + c_n(t) = 1 - e^{-at}$$

$$= 1 - e^{-t/\tau}$$



Sistemas de 2ª Ordem Submortecidos

$$G(s) = \frac{A \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

A – ganho
(muitas vezes omitido para
simplificar a apresentação)

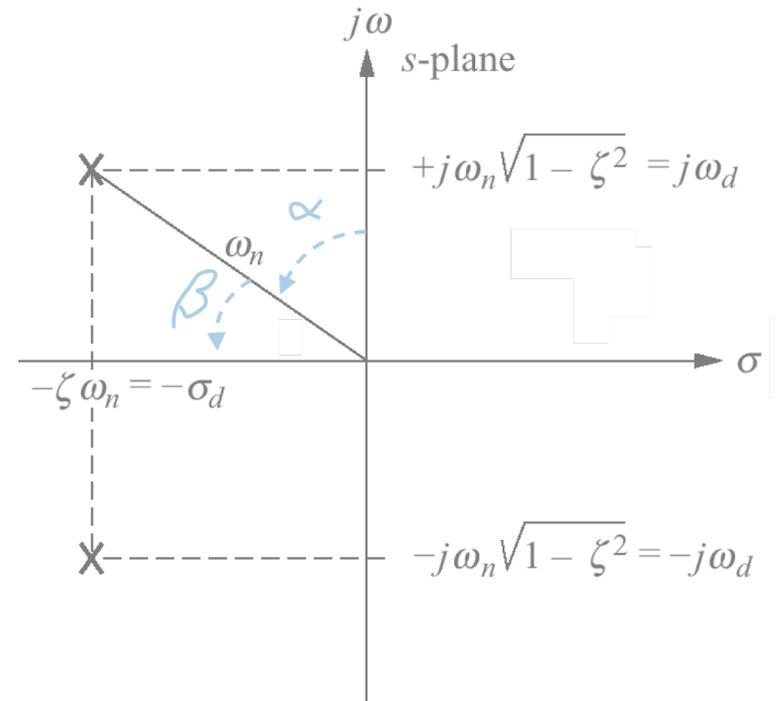


Fig. 4.17 Fator (Relação) de Amortecimento,

$$\cos(\beta) = \sin(\alpha) = \frac{\sigma_d}{\omega_n} = \zeta$$

Sistemas de 2ª Ordem

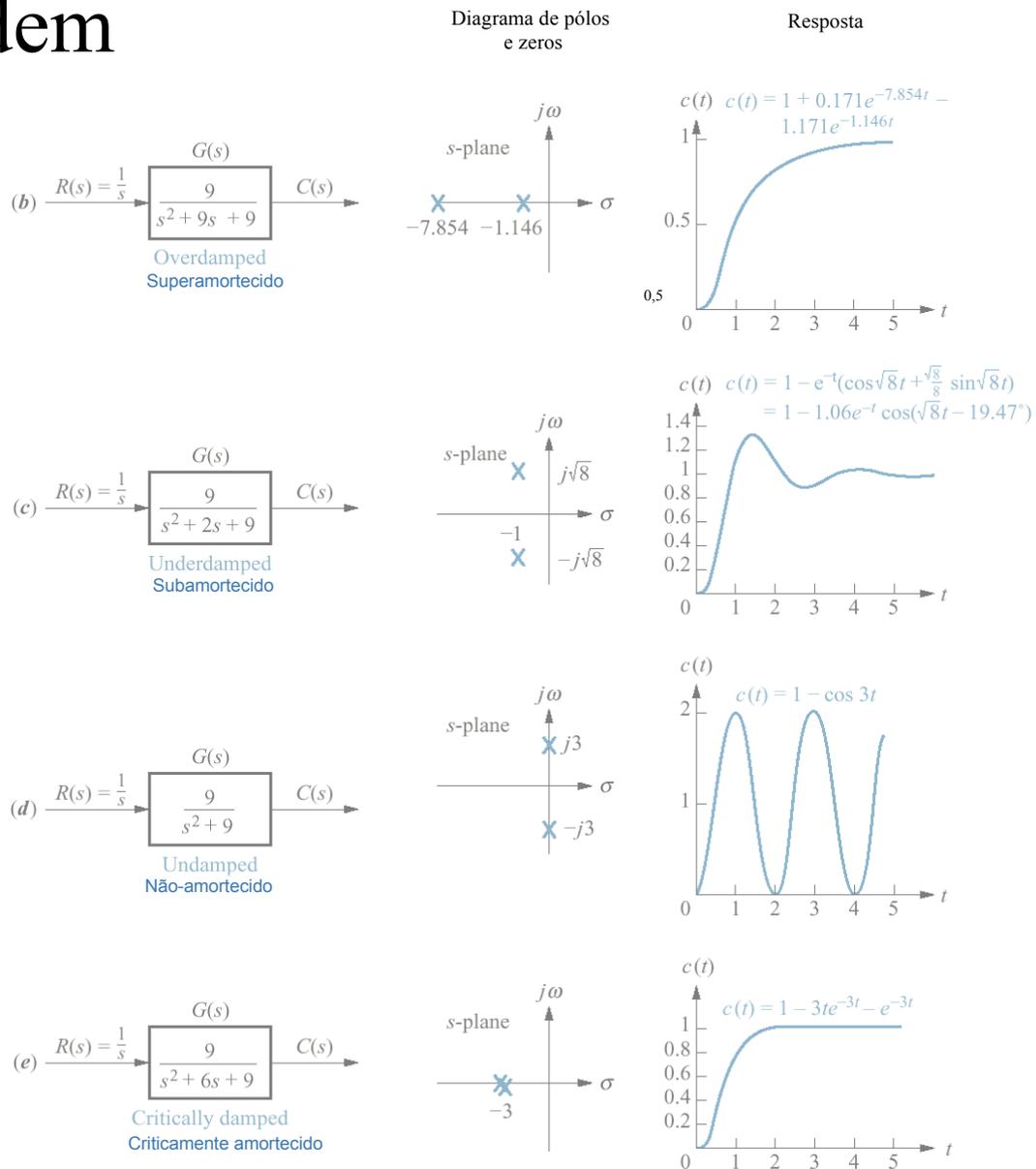
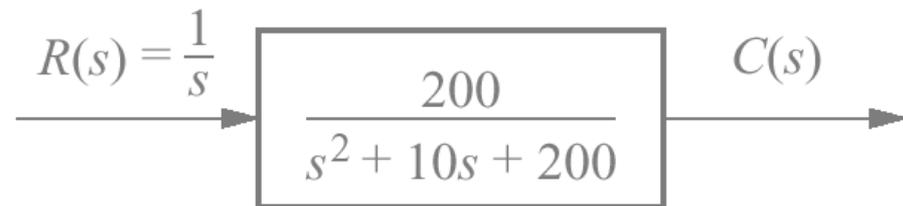


Fig. 4.7
Sistemas de 2ª ordem,
pólos no plano-s
e respostas ao degrau

Ex. Resposta de Sistema de 2ª Ordem

Fig. 4.9
Exemplo 4.2



Solução

- 1) forma da resposta forçada do sistema é um degrau.
- 2) forma da resposta natural: pólos $s = -5 \pm j13,23$.
- 3) parte real, -5, é a componente exponencial da resposta = constante de tempo do decaimento das oscilações.

Parte imaginária, 13,23, é a frequência das oscilações, ω_d

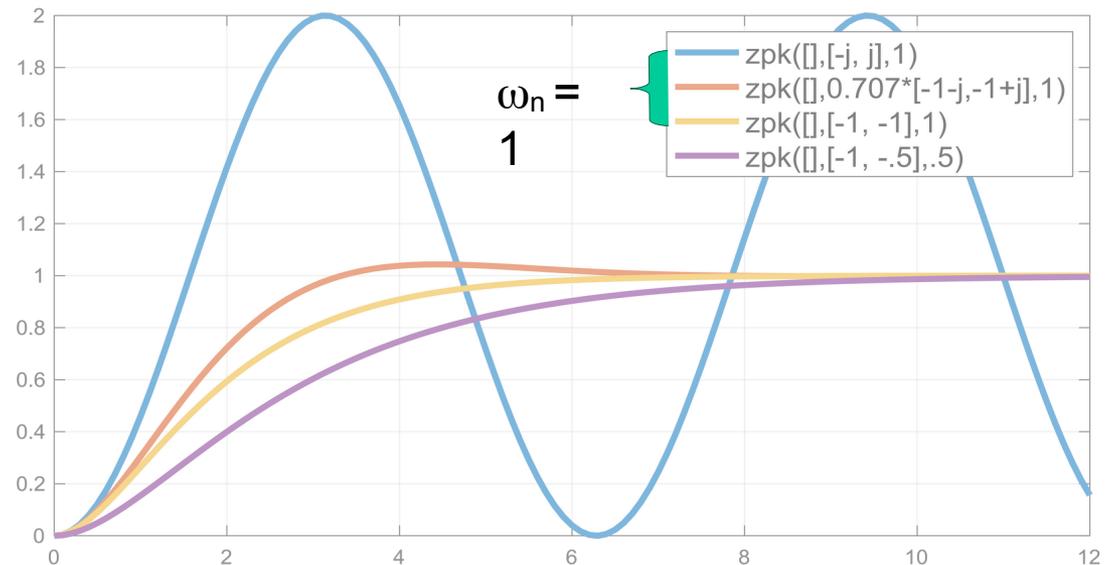
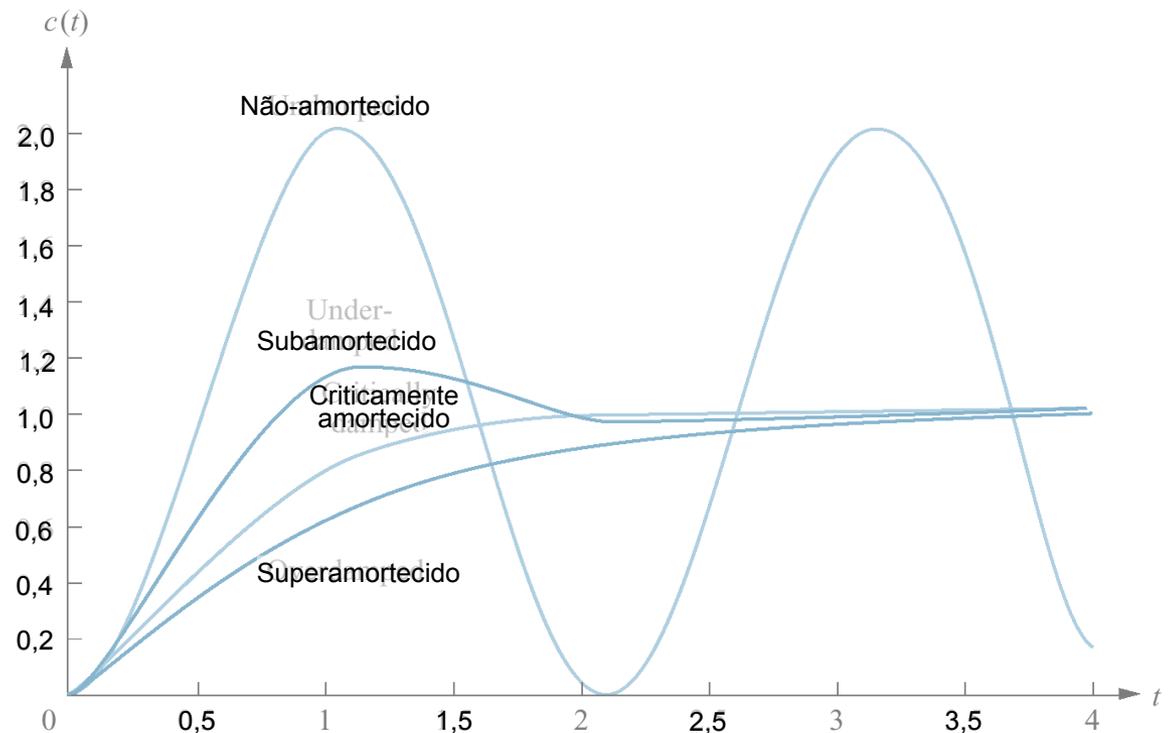
Portanto: $c(t) = K_1 + e^{-5t}(K_2 \cos 13,23t + K_3 \sin 13,23t)$

$$= K_1 + e^{-5t} K_4 \cos(13,23t - \theta)$$

Resposta Submorteada em função de ζ

Fig. 4.10

Respostas ao degrau de sistemas de segunda ordem para diferentes fatores de amortecimento



Resposta em função de ζ

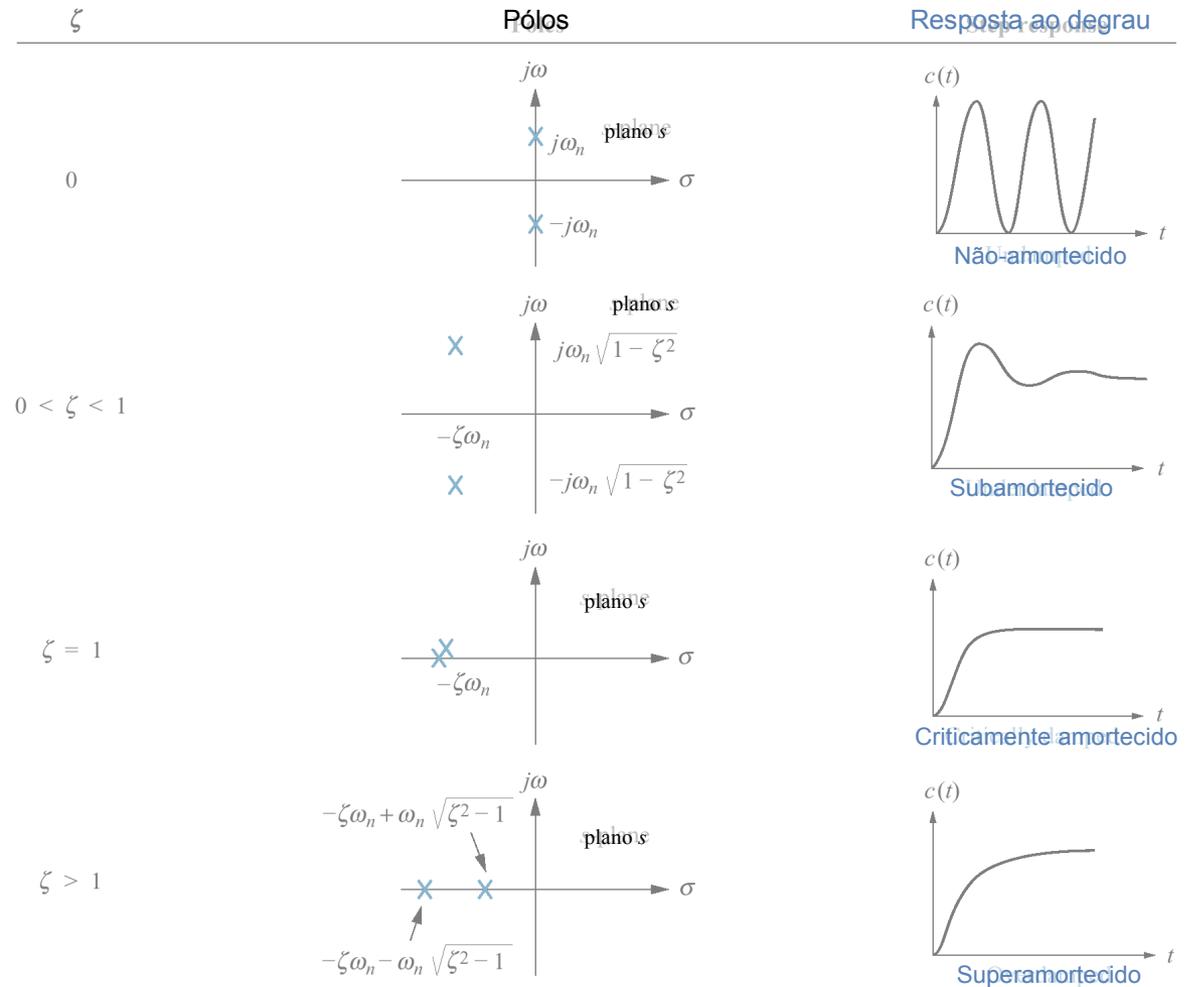
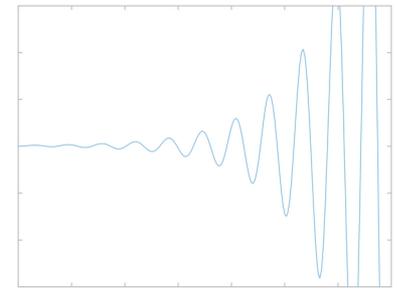
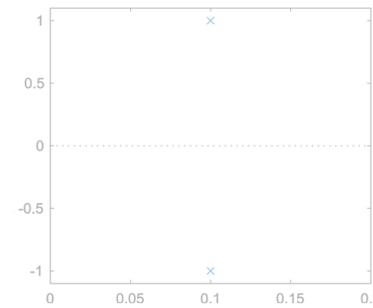


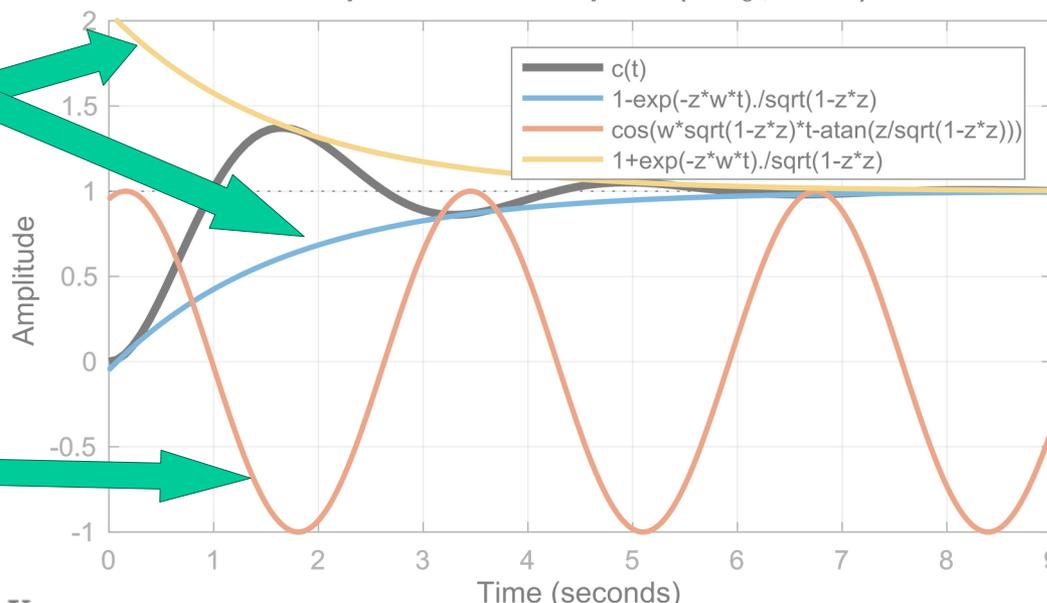
Fig. 4.11
Respostas de segunda ordem em função da relação de amortecimento

Resposta de Sistema de 2ª Ordem Submortecido

Componentes da resposta ($z = \zeta$, $w = \omega$)

Envoltória (decaimento exponencial) gerada pela parte real do par de polos complexos

Oscilação senoidal gerada pela parte imaginária do par de polos complexos



$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{sen } \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \right)$$

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{(s + \zeta\omega_n) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)}$$

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t - \phi)$$

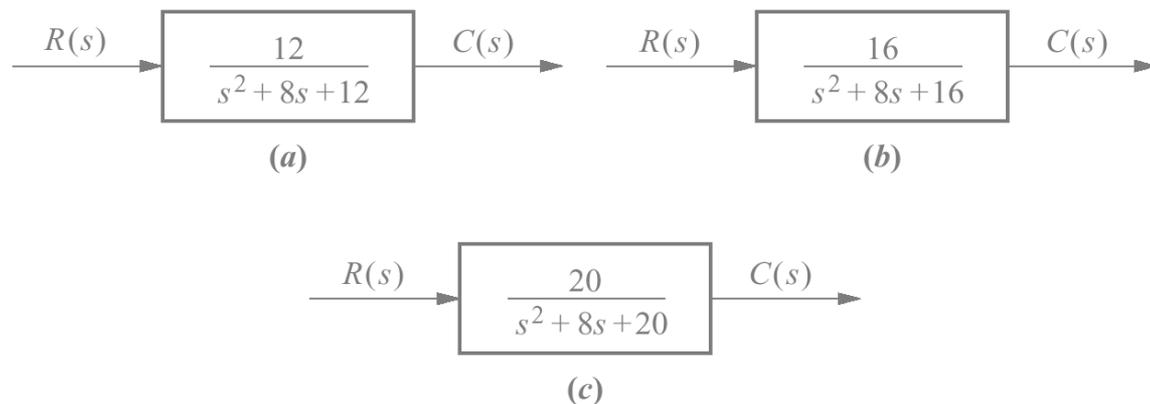
$$\phi = \text{tg}^{-1}(\zeta / \sqrt{1 - \zeta^2})$$

Calcular ζ e ω_n : $G(s) = \frac{36}{s^2 + 4,2s + 36}$ $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$

Solução: $\omega_n^2 = 36$, de onde $\omega_n = 6$. Além disso. $2\omega_n\zeta = 4,2$.

Portanto, $\zeta = 0,35$.

Ex 4.4 Caracterize a resposta com base no valor de ζ



Solução uma vez que

$$\omega_n = \sqrt{b} \quad a = 2\zeta\omega_n$$

Obtemos $\zeta = 1,155$ (a) => superamortecido.

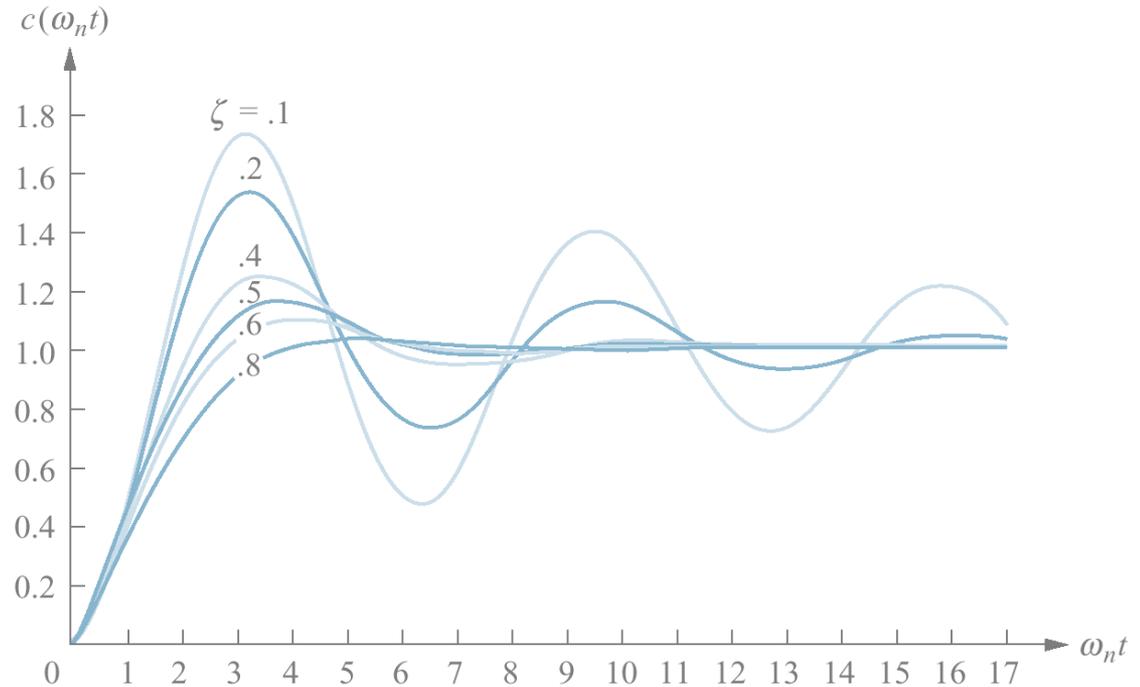
$\zeta = 1$ (b) => criticamente amortecido

$\zeta = 0,894$ (c) => subamortecido

Respostas Subamortecidas

Fig. 4.13

Respostas de segunda ordem subamortecidas com os valores da relação de amortecimento



$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t - \phi)$$

Resposta Subamortecida

– Sobrepasso %

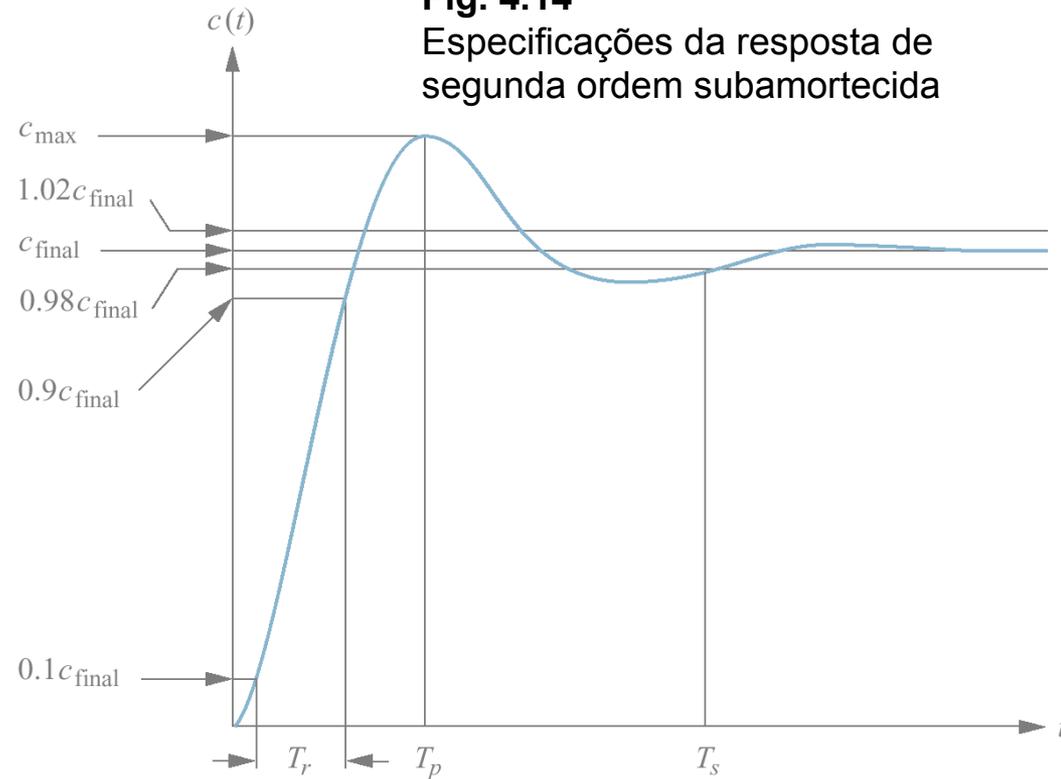
$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)$$

$$\dot{c}(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen } \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$c_{\text{máx}} = c(T_p) = 1 - e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \left(\cos \pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen } \pi \right) = 1 + e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})}$$

Fig. 4.14
Especificações da resposta de segunda ordem subamortecida



$$\%UP = \frac{c_{\text{máx}} - c_{\text{final}}}{c_{\text{final}}} \times 100$$

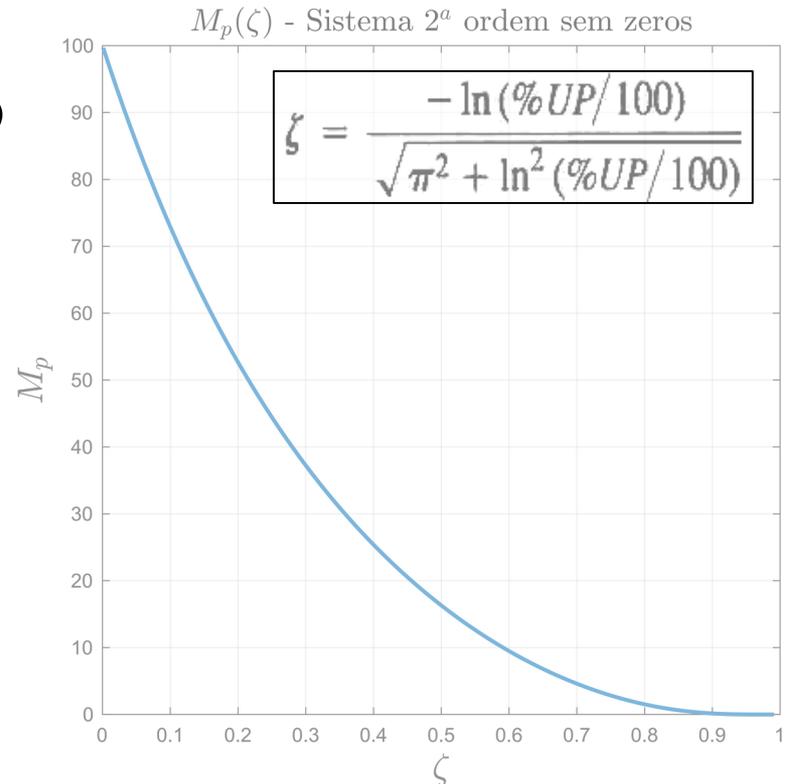
$$\%UP = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100$$

Resposta Subamortecida

– Tempo de Acomodação

$$\%UP = e^{-(\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2})} \times 100$$

Fig. 4.15
Ultrapassagem percentual (M_p) em função da relação de amortecimento



Tempo de acomodação de 2% – envoltória!

$$e^{-\zeta\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0,02$$

$$T_s = \frac{-\ln(0,02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n}$$

$$T_{s(2\%)} = 4/\sigma$$

Especificações da Resposta Subamortecida

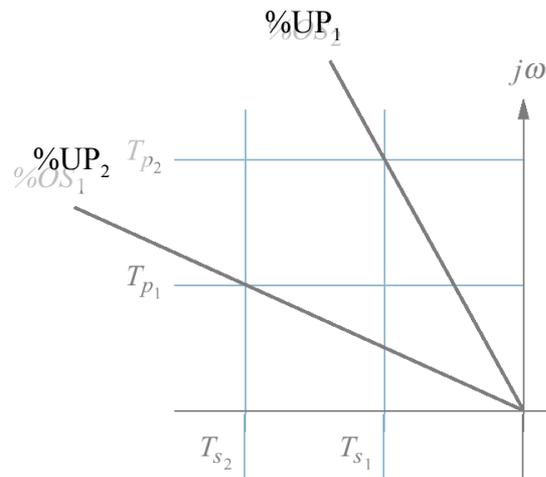
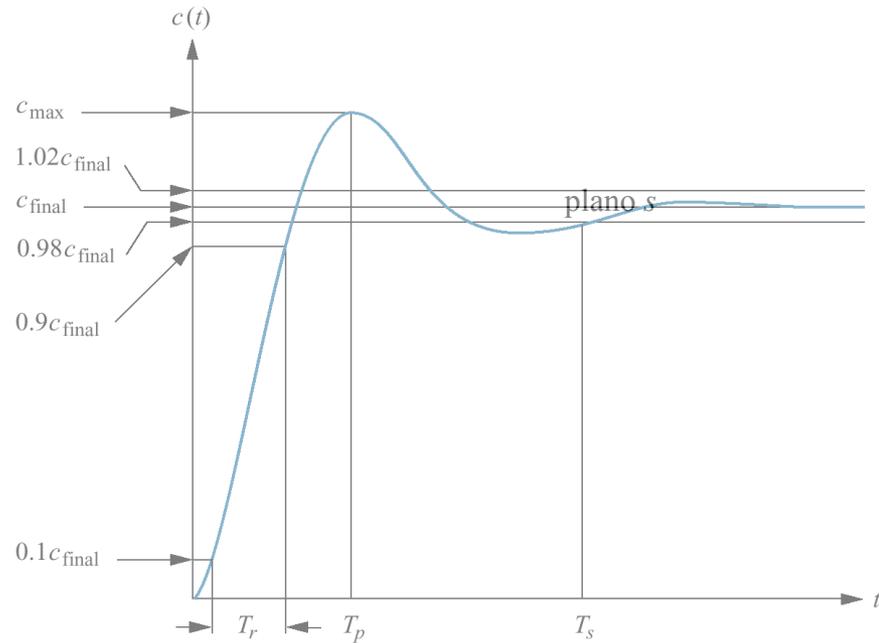
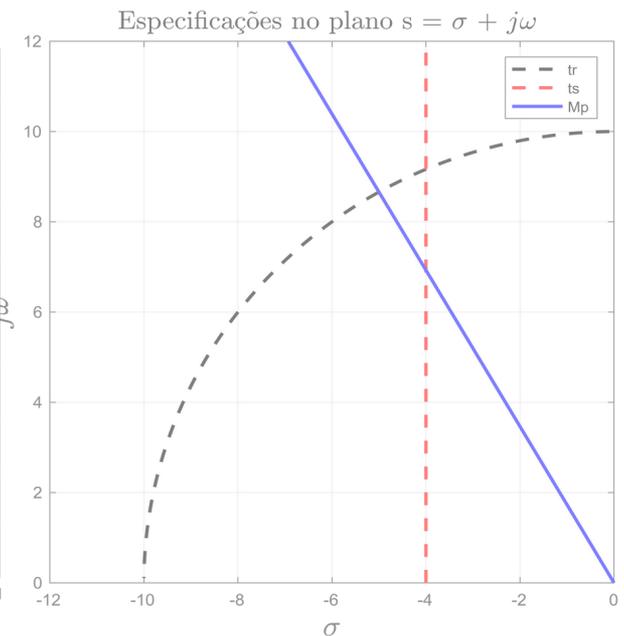
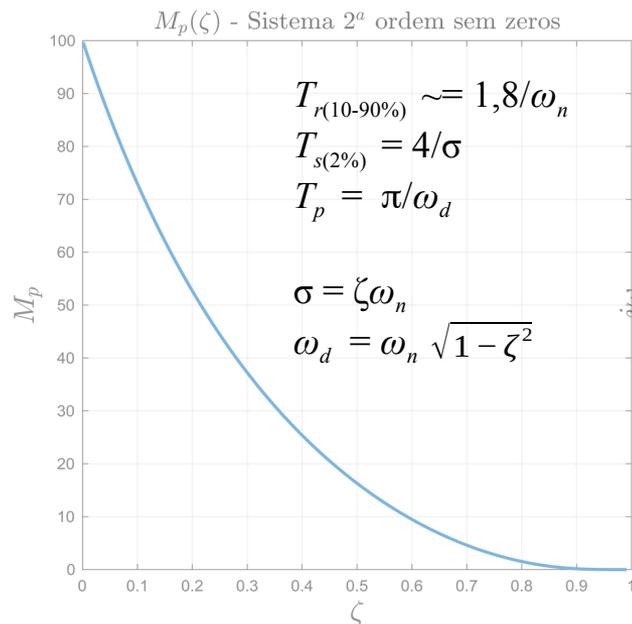


Fig. 4.18

Linhas de valores constantes para tempo de pico, T_p , tempo de assentamento, T_s , e ultrapassagem percentual, %UP
 Nota: $\%UP_1 > \%UP_2$



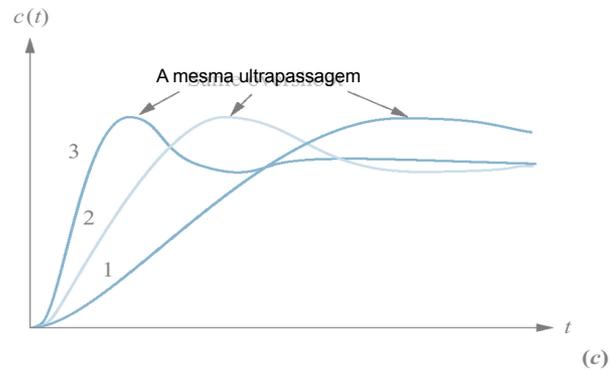
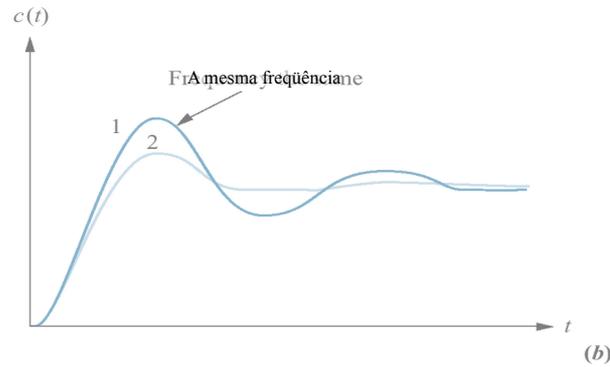
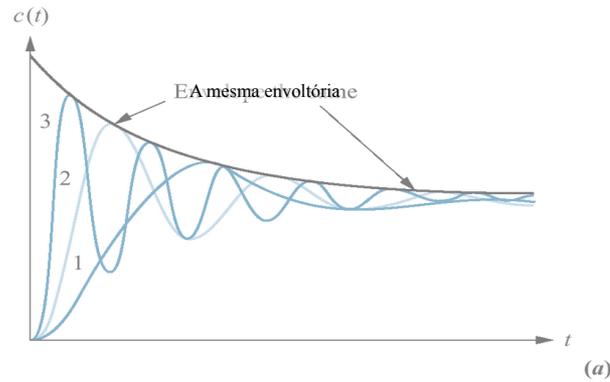


Fig. 4.19

Respostas ao degrau de sistemas de segunda ordem subamortecidos à medida que os pólos se movem:

- a.** com parte real constante;
- b.** com parte imaginária constante;
- c.** com relação de amortecimento constante.

Ex. 4.6

T_p , T_s , %UP

a partir dos polos

$$\omega_d = \sqrt{7^2 + 3^2} = 7,616.$$

$$\zeta = \cos \theta = \cos[\arctg(7/3)] = 0,394.$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{7} = 0,449 \text{ segundo}$$

$$\%UP = e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \times 100 = 26 \%$$

$$T_s = \frac{4}{\sigma_d} = \frac{4}{3} = 1,333 \text{ segundo}$$

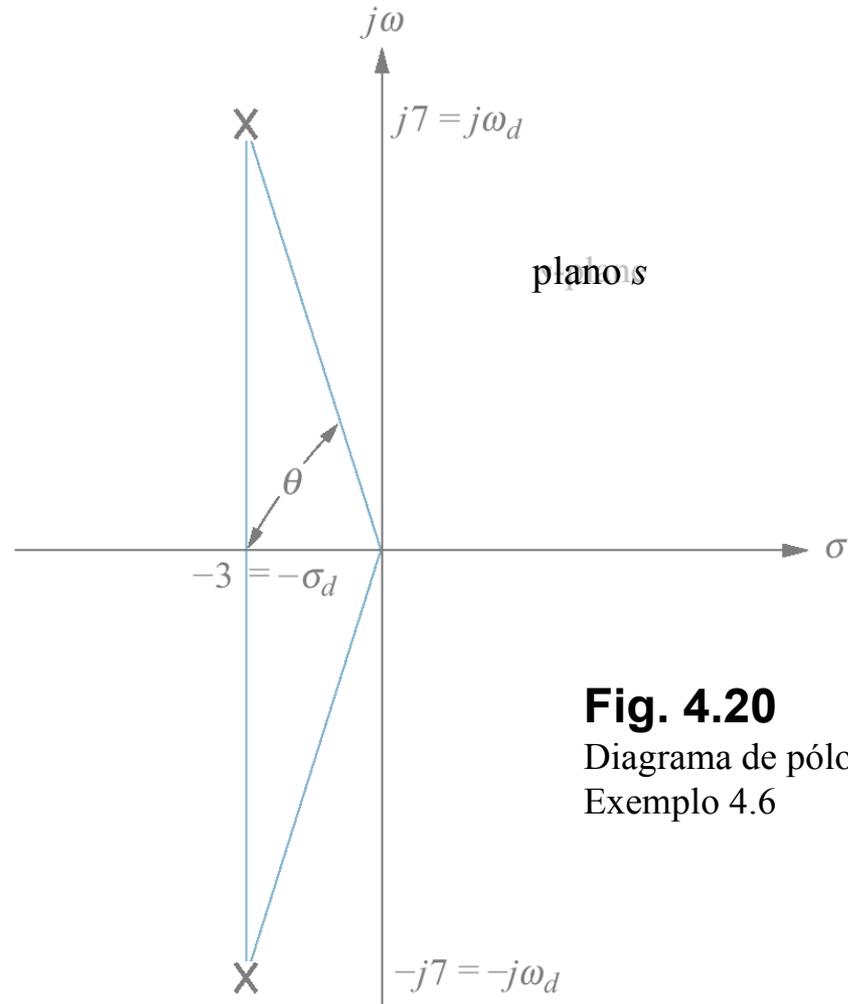


Fig. 4.20

Diagrama de polos para o Exemplo 4.6

Ex. 4.7

J e D tais que

$$T_s = 2 \text{ s} \quad \%UP = 20\%$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}}$$

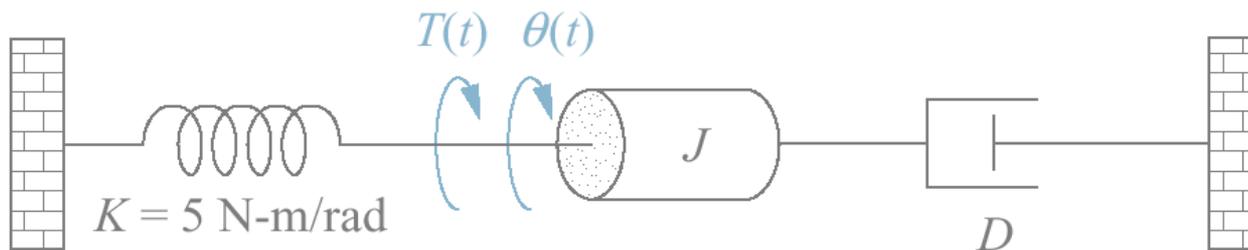
$$2\zeta\omega_n = \frac{D}{J}$$

Fig. 4.21

Sistema mecânico em rotação para o Exemplo 4.7

$$G(s) = \frac{1/J}{s^2 + \frac{D}{J}s + \frac{K}{J}}$$

$$T_s = 2 = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$



$$2\zeta\omega_n = 4 = \frac{D}{J}$$

$$D = 1,04 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad} \text{ e } J = 0,26 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\zeta = \frac{4}{2\omega_n} = 2\sqrt{\frac{J}{K}}$$

Resposta Subamortecida com 3º polo

$$C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B(s + \zeta\omega_n) + C\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \frac{D}{s + \alpha_r}$$

$$c(t) = Au(t) + e^{-\zeta\omega_n t} (B \cos \omega_d t + C \sin \omega_d t) + De^{-\alpha_r t}$$

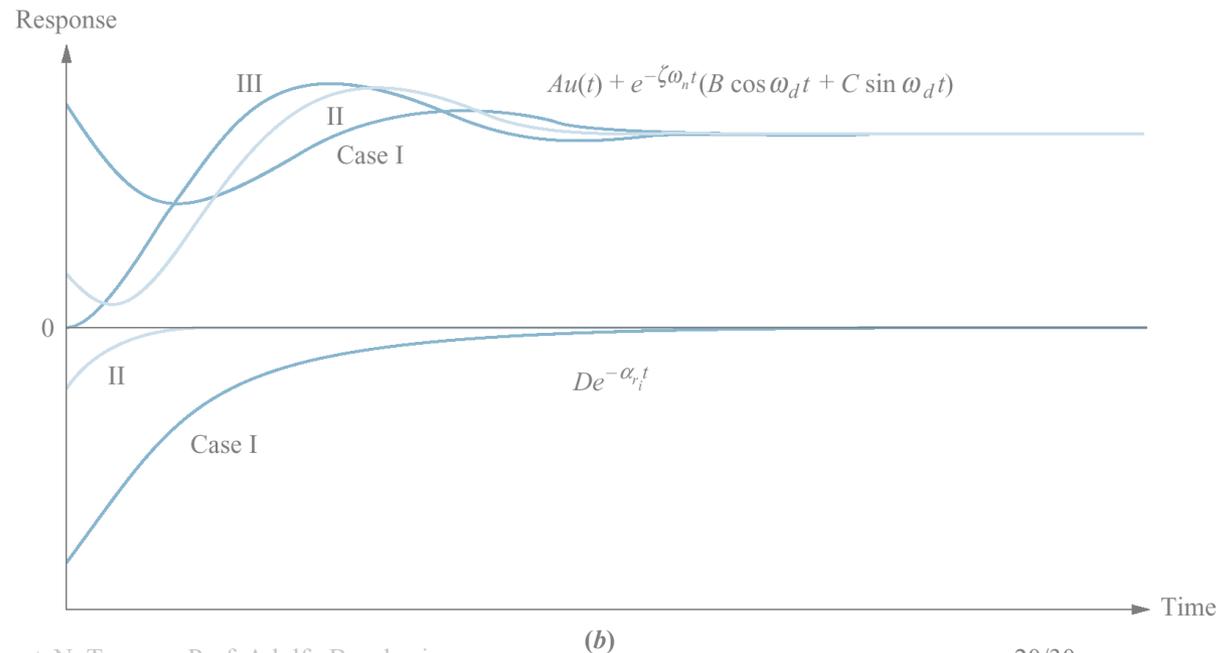
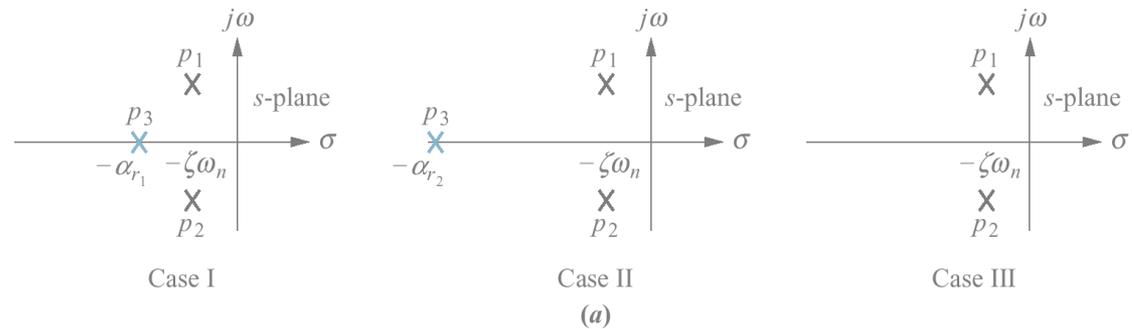
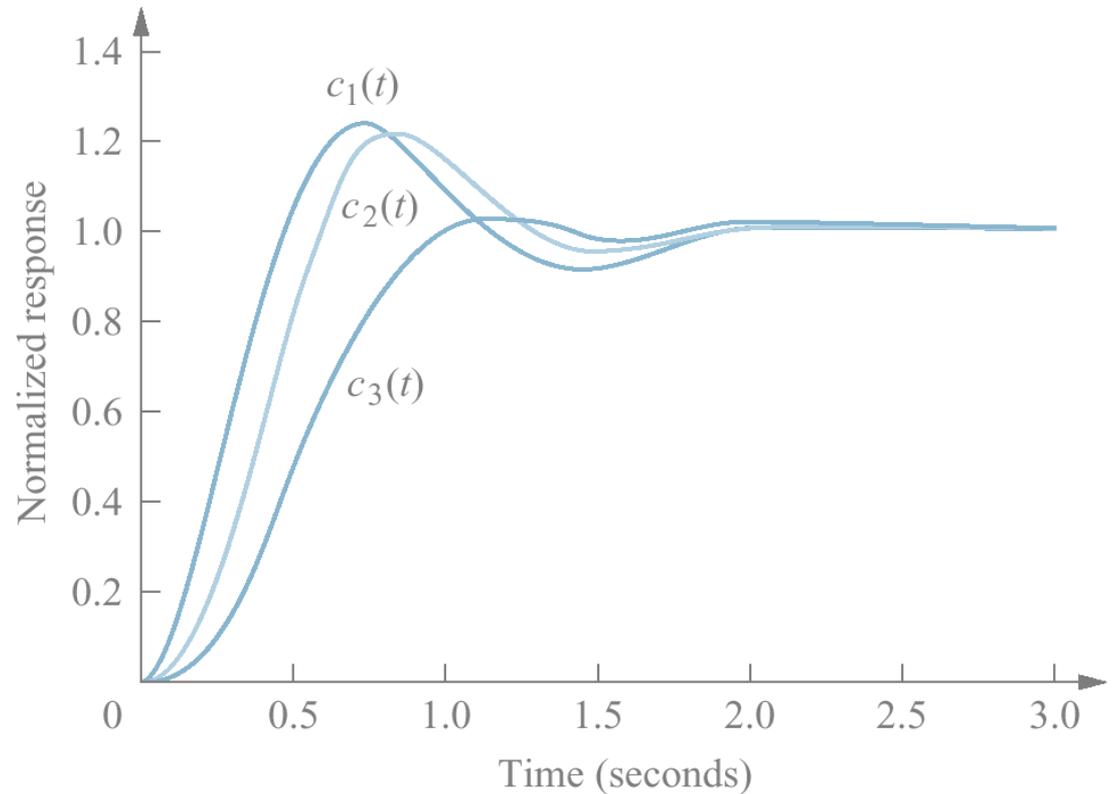


Fig. 4.23

Respostas dos componentes de um sistema com três pólos:
a. diagrama de pólos;
b. respostas dos componentes: o pólo não-dominante está próximo de um par de segunda ordem dominante (Caso I), longe do par (Caso II) e no infinito (Caso III)

Fig. 4.24
Respostas ao degrau dos
sistemas $T_1(s)$, $T_2(s)$ e $T_3(s)$



$$T_1(s) = \frac{24,542}{s^2 + 4s + 24,542}$$

$$T_2(s) = \frac{245,42}{(s + 10)(s^2 + 4s + 24,542)}$$

$$T_3(s) = \frac{73,626}{(s + 3)(s^2 + 4s + 24,542)}$$

Resposta Subamortecida com zero

$$T(s) = \frac{(s + a)}{(s + b)(s + c)} = \frac{A}{s + b} + \frac{B}{s + c}$$

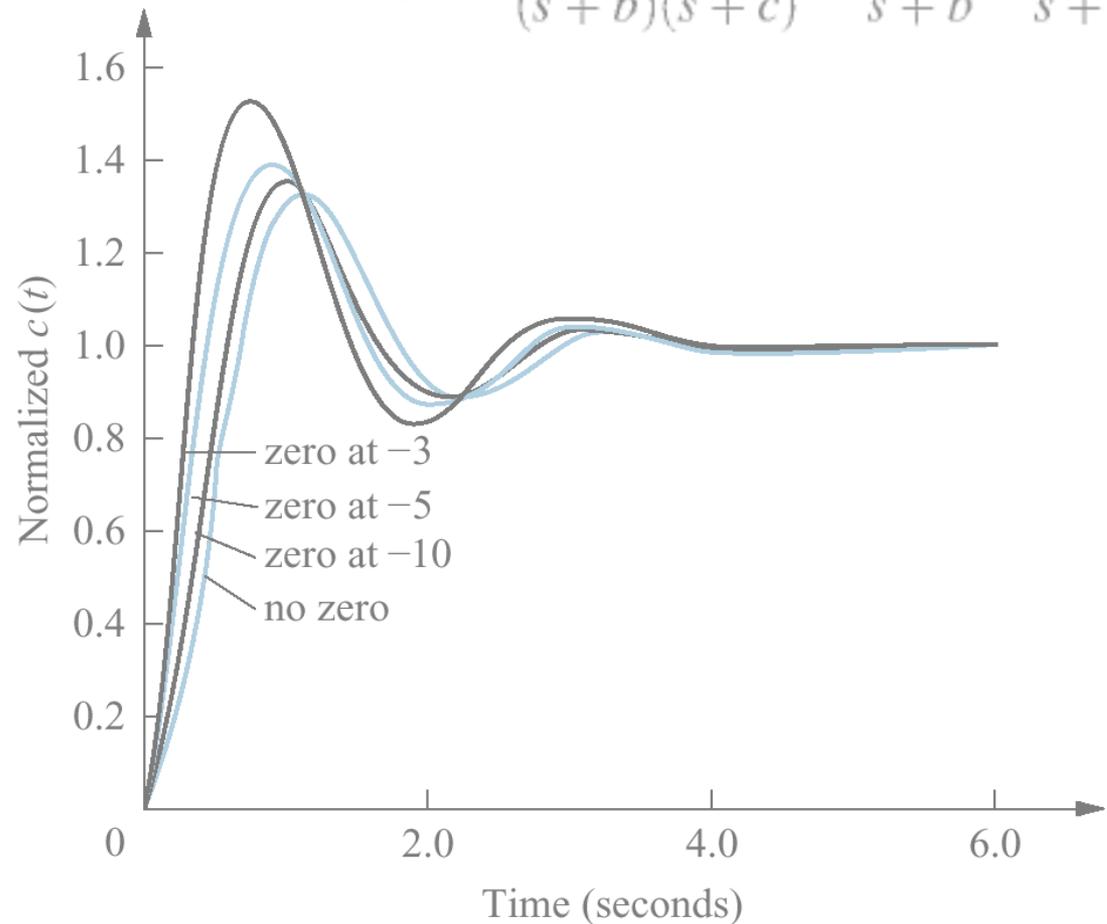


Fig. 4.25

Efeito de adicionar um zero a um sistema com dois pólos

O zero torna a resposta mais rápida:
(soma a derivada à resposta sem zeros)

Sistemas de Fase Não-Mínima

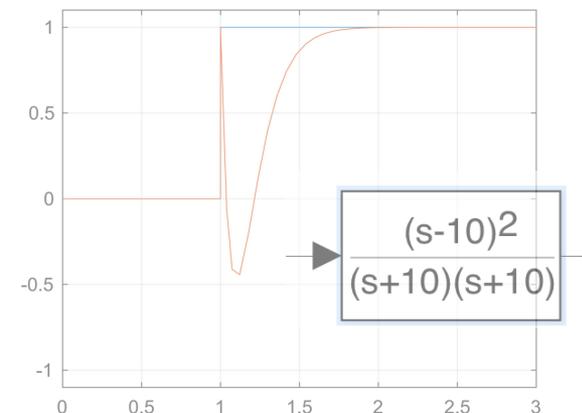
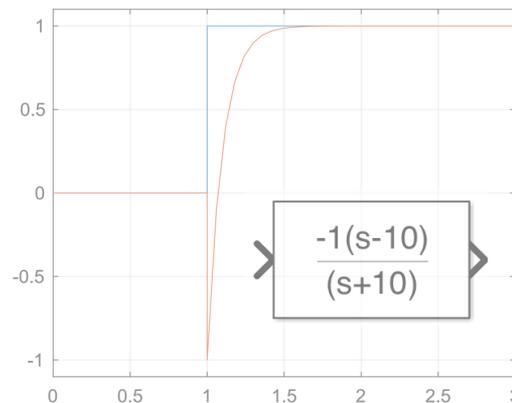
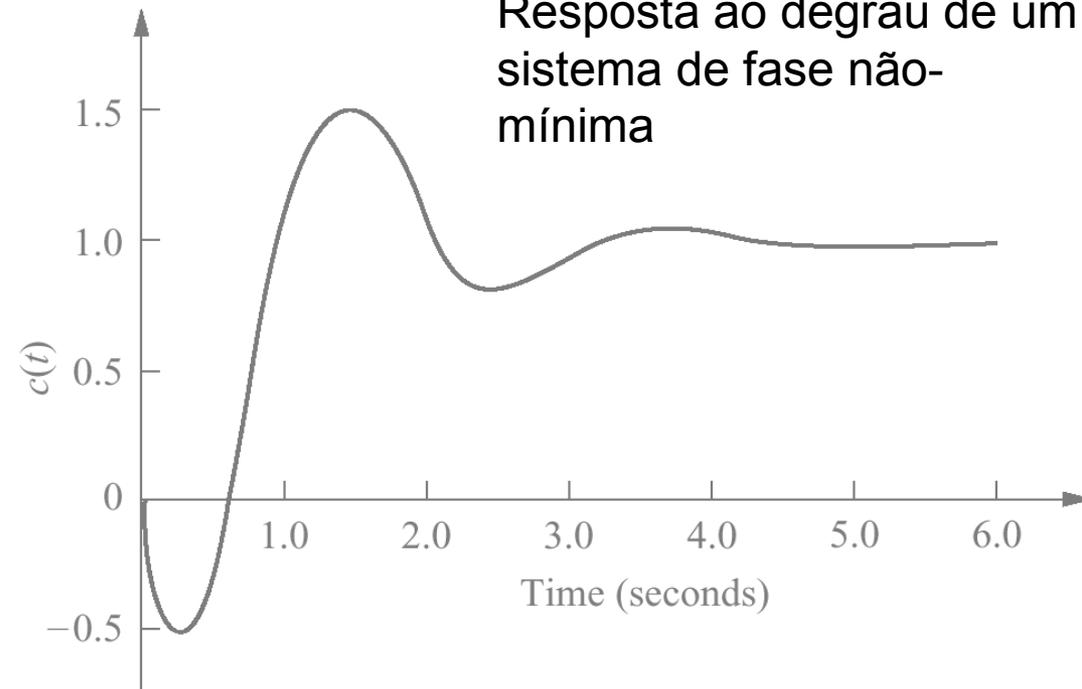
polos ou
zeros no SPD
(Fase no Bode)

Se a resposta começa indo para o lado “errado” é fase não-minima.

Mas nem todo Sistema de fase não-minima se comporta assim!

Fig. 4.26

Resposta ao degrau de um sistema de fase não-mínima



Inclinação inicial da resposta ao degrau de Sistemas Dinâmicos

$$\frac{b}{s^2 + as + b}$$

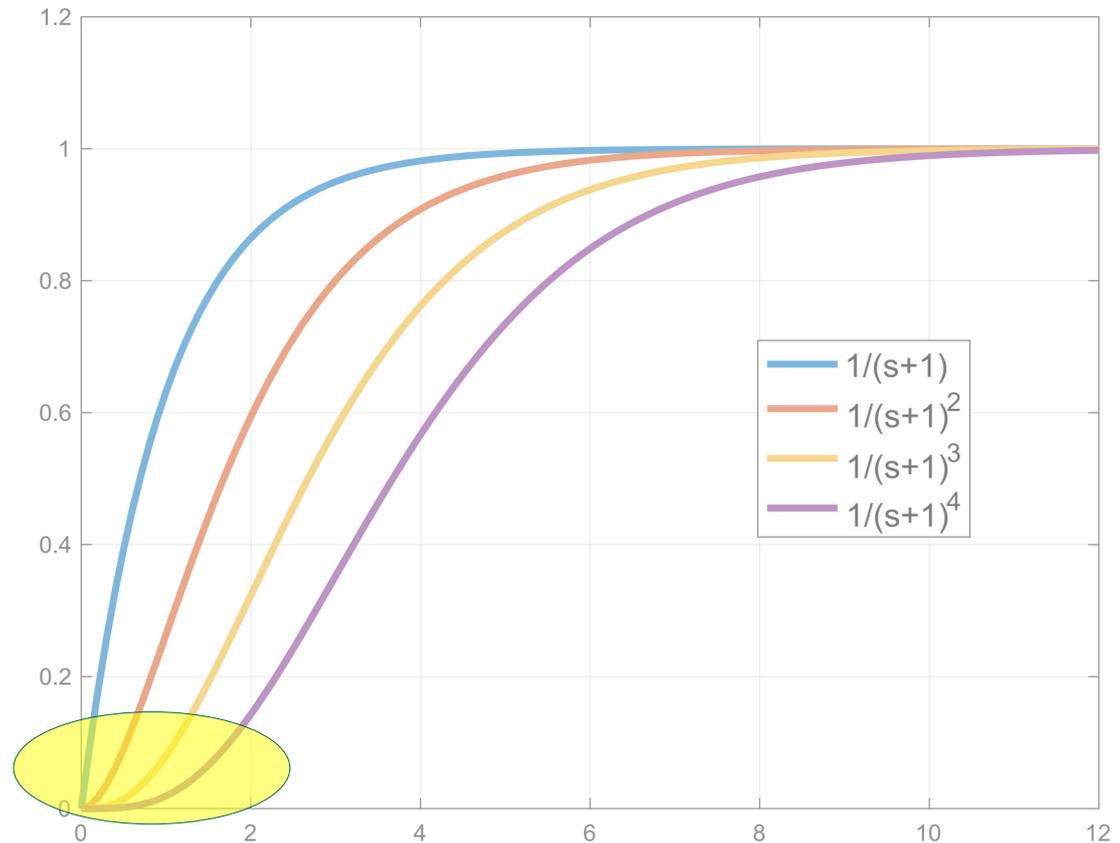
Inclinação Inicial

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot 1/s.(.) = 0$$

$$y'(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot s \cdot 1/s.(.) =$$

$$y'(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{bs}{s^2 + as + b} = 0$$

$$y''(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{bs^2}{s^2 + as + b} = b$$



Teorema do valor inicial

%%

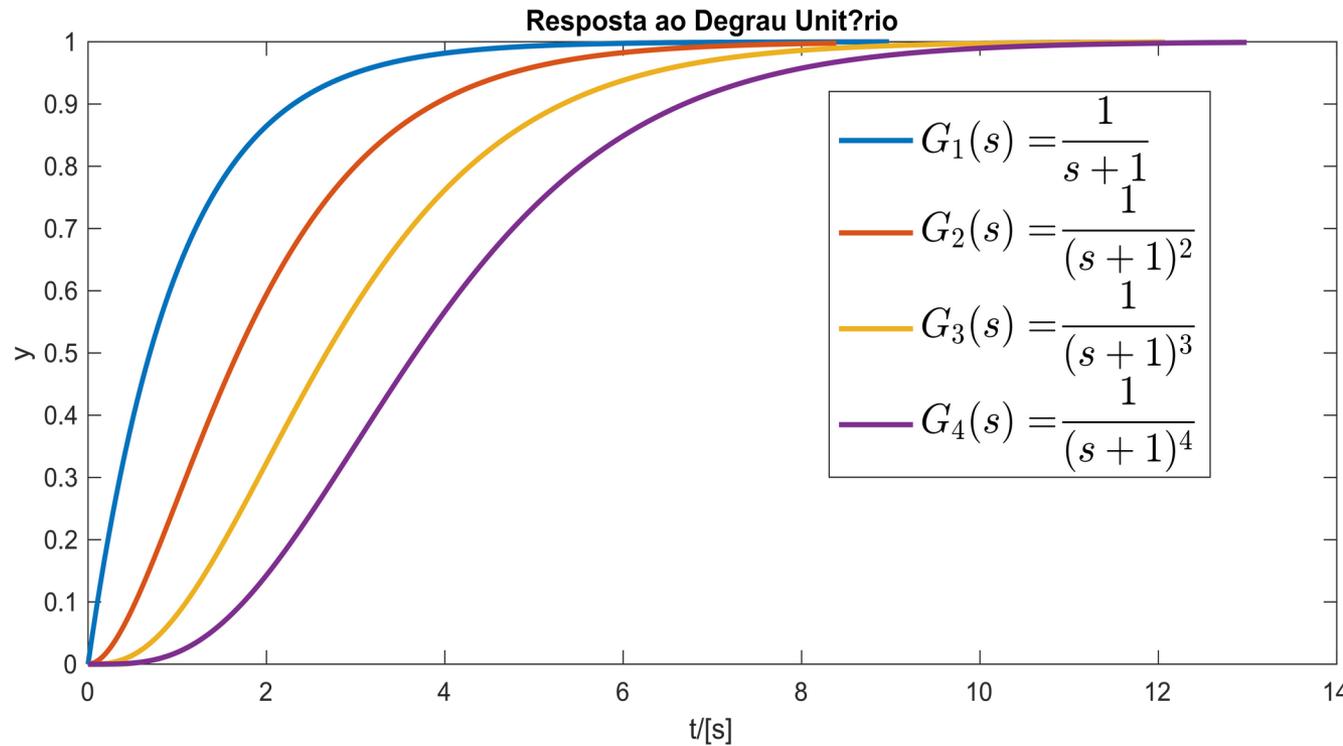
s=sym('s')

g1s=1/(s+1)

g2s=1/(s+1)^2

g3s=1/(s+1)^3

g4s=1/(s+1)^4



Respostas no tempo

$$\text{ilaplace}(1/s * g1s) = 1 - \exp(-t)$$

$$\text{ilaplace}(1/s * g2s) = 1 - t * \exp(-t) - \exp(-t)$$

$$\text{ilaplace}(1/s * g3s) = 1 - t * \exp(-t) - (t^2 * \exp(-t))/2 - \exp(-t)$$

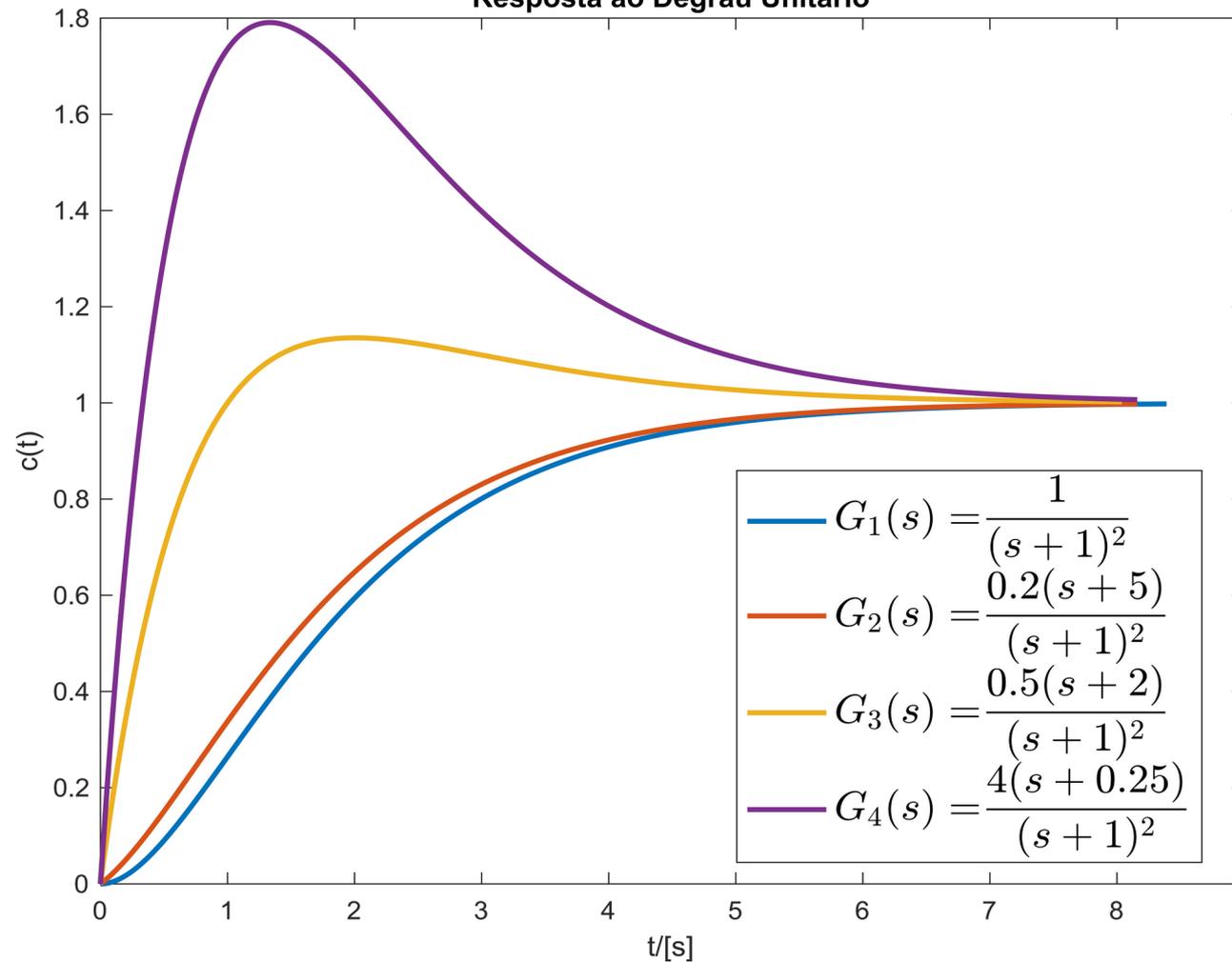
$$\text{ilaplace}(1/s * g4s) = 1 - t * \exp(-t) - (t^2 * \exp(-t))/2 - (t^3 * \exp(-t))/6 - \exp(-t)$$

i) Maior ordem

→ Maior tempo de resposta

Respostas no tempo

ii) Zeros lentos tornam o sistema subamortecido



$$\text{ilaplace}(1/s * g1s) = 1 - t * \exp(-t) - \exp(-t)$$

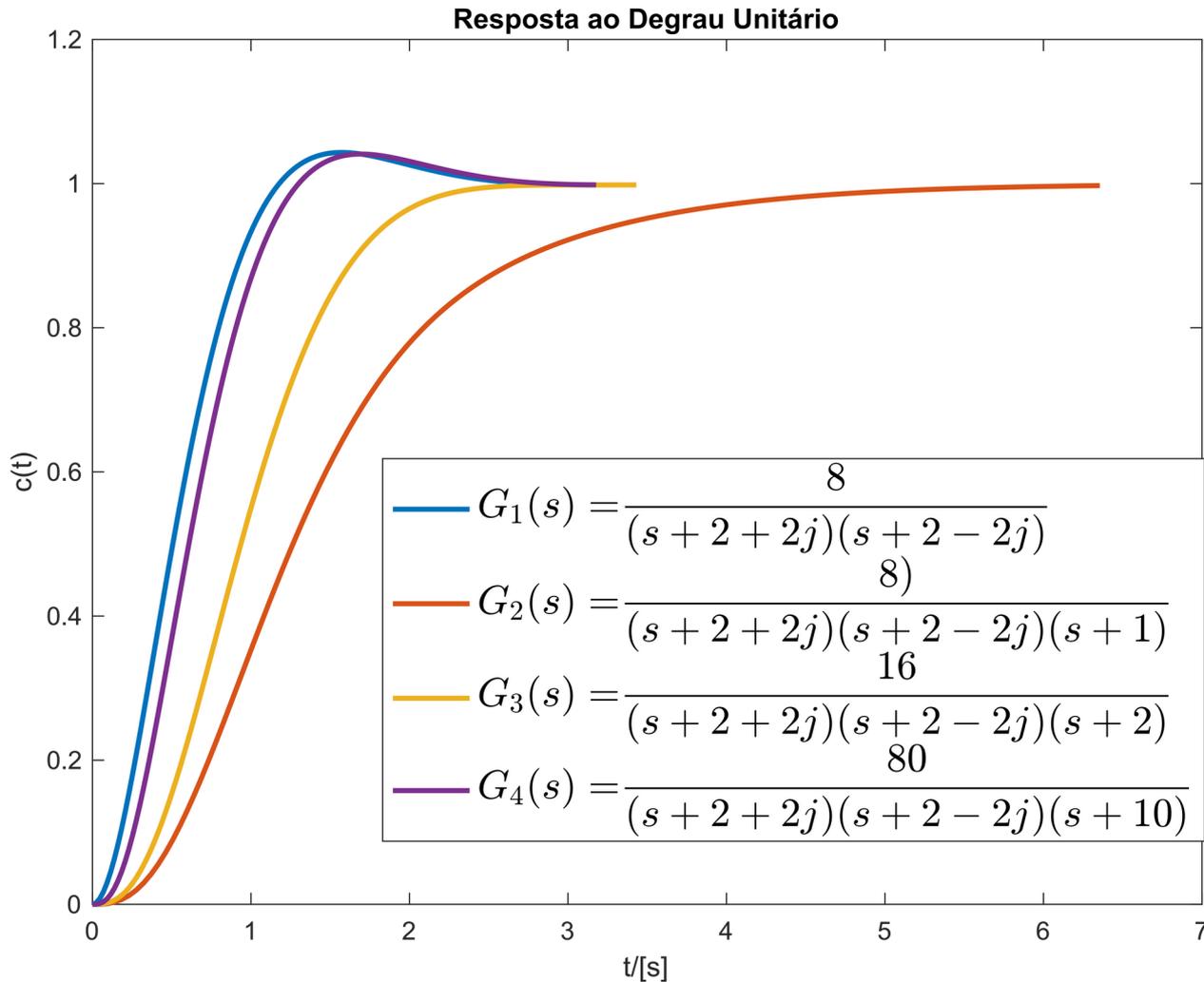
$$\text{ilaplace}(1/s * g2s) = 1 - (4 * t * \exp(-t)) / 5 - \exp(-t)$$

$$\text{ilaplace}(1/s * g3s) = 1 - (t * \exp(-t)) / 2 - \exp(-t)$$

$$\text{ilaplace}(1/s * g4s) = 1 + 3 * t * \exp(-t) - \exp(-t)$$

Respostas no tempo

iii) Polos Dominantes aproximam a a resposta



Polos Lentos !!

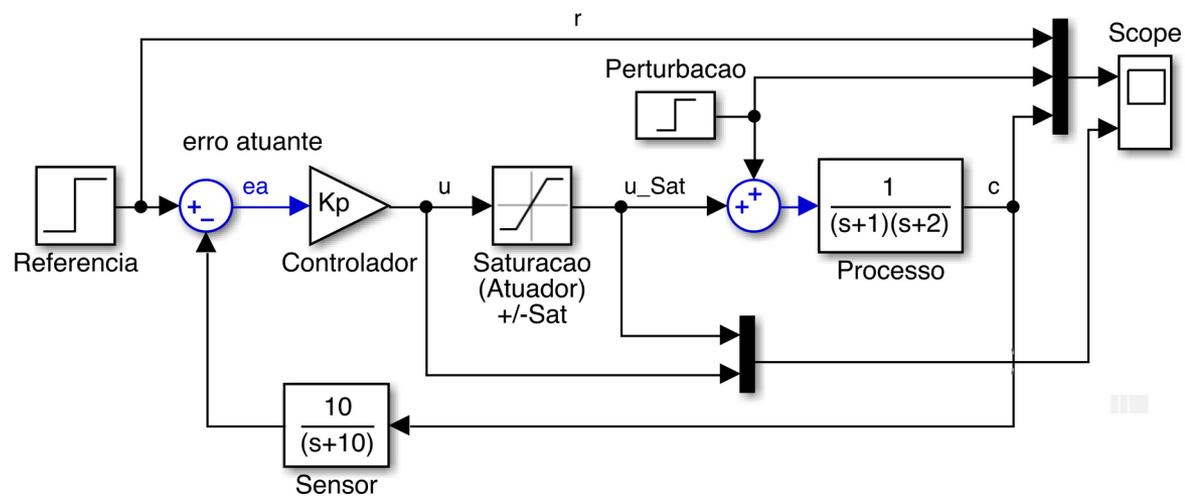
G_4 aproxima G_1

Dinâmica Dominante de 2a

Ordem

iv) Resposta $W(s)/R(s)$

Todo processo físico tem perturbações (modeladas/refletidas na entrada do processo)



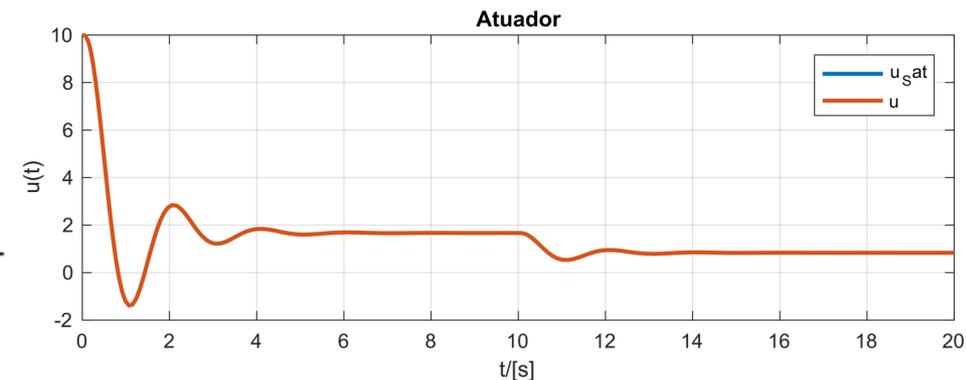
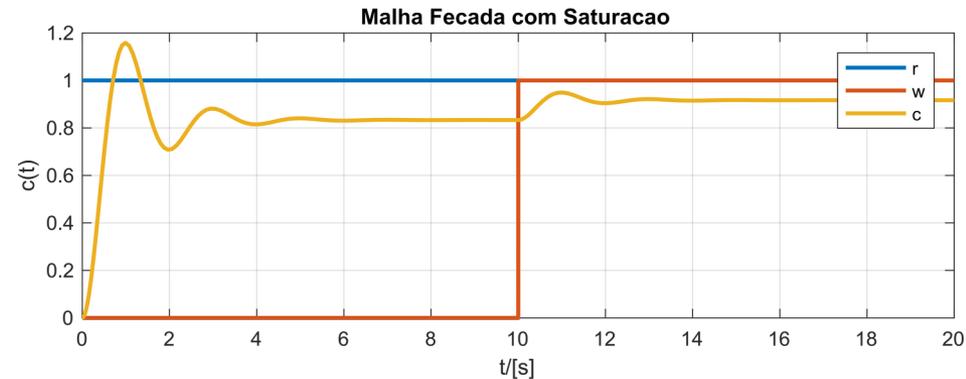
$$K_p=10; \text{ Sat} = 10;$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_p}{(s+1)(s+2)}}{1 + \frac{K_p}{(s+1)(s+2)} \frac{10}{(s+10)}}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p(s+10)}{(s+1)(s+2)(s+10) + 10K_p}$$

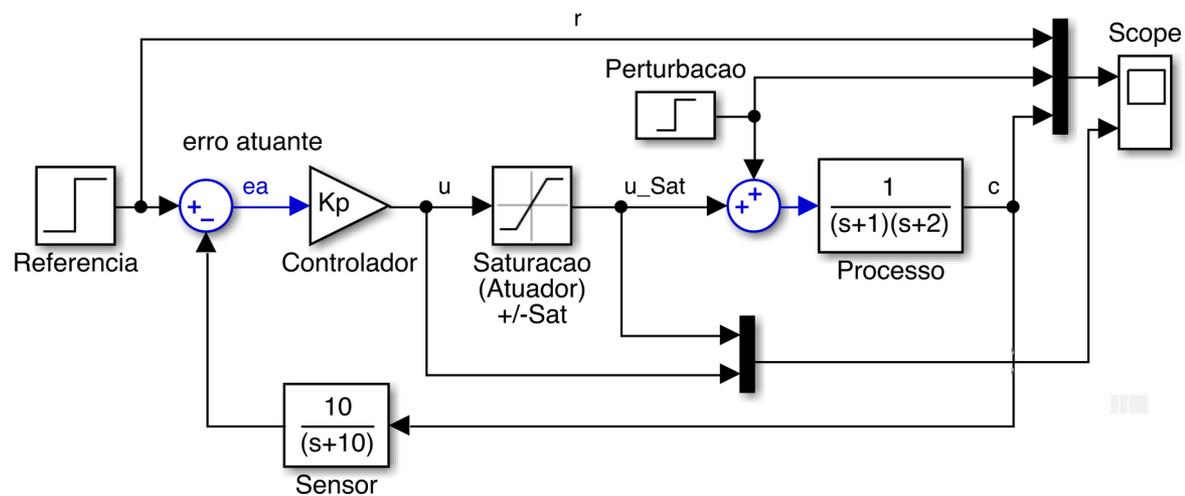
$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{\frac{1}{(s+1)(s+2)}}{1 + \frac{K_p}{(s+1)(s+2)} \frac{10}{(s+10)}}$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = G_w(s) = \frac{(s+10)}{(s+1)(s+2)(s+10) + 10K_p}$$



iv) Resposta $U(s)/R(s)$

Todo processo físico tem saturação



$$\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{1 + \frac{K_p}{(s+1)(s+2)} \frac{10}{(s+10)}}$$

$$\frac{U(s)}{R(s)} = G_u(s) = \frac{K_p(s+1)(s+2)(s+10)}{(s+1)(s+2)(s+10) + 10K_p}$$

Teorema do valor inicial

$$R(s) = 1/s$$

$$U(s) = R(s)G_u(s)$$

$$u(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{1}{s} \frac{K_p(s+1)(s+2)(s+10)}{(s+1)(s+2)(s+10) + 10K_p} = K_p$$

Degaus unitários produzem $u(0^+) = K_p$

Para não haver saturação de u : $K_p < \text{Sat}$

Se $r < R_{\max} \Rightarrow K_p < \text{Sat}/R_{\max}$

iv) Resposta $U(s)/R(s)$
é importante

Todo processo
físico tem saturação

