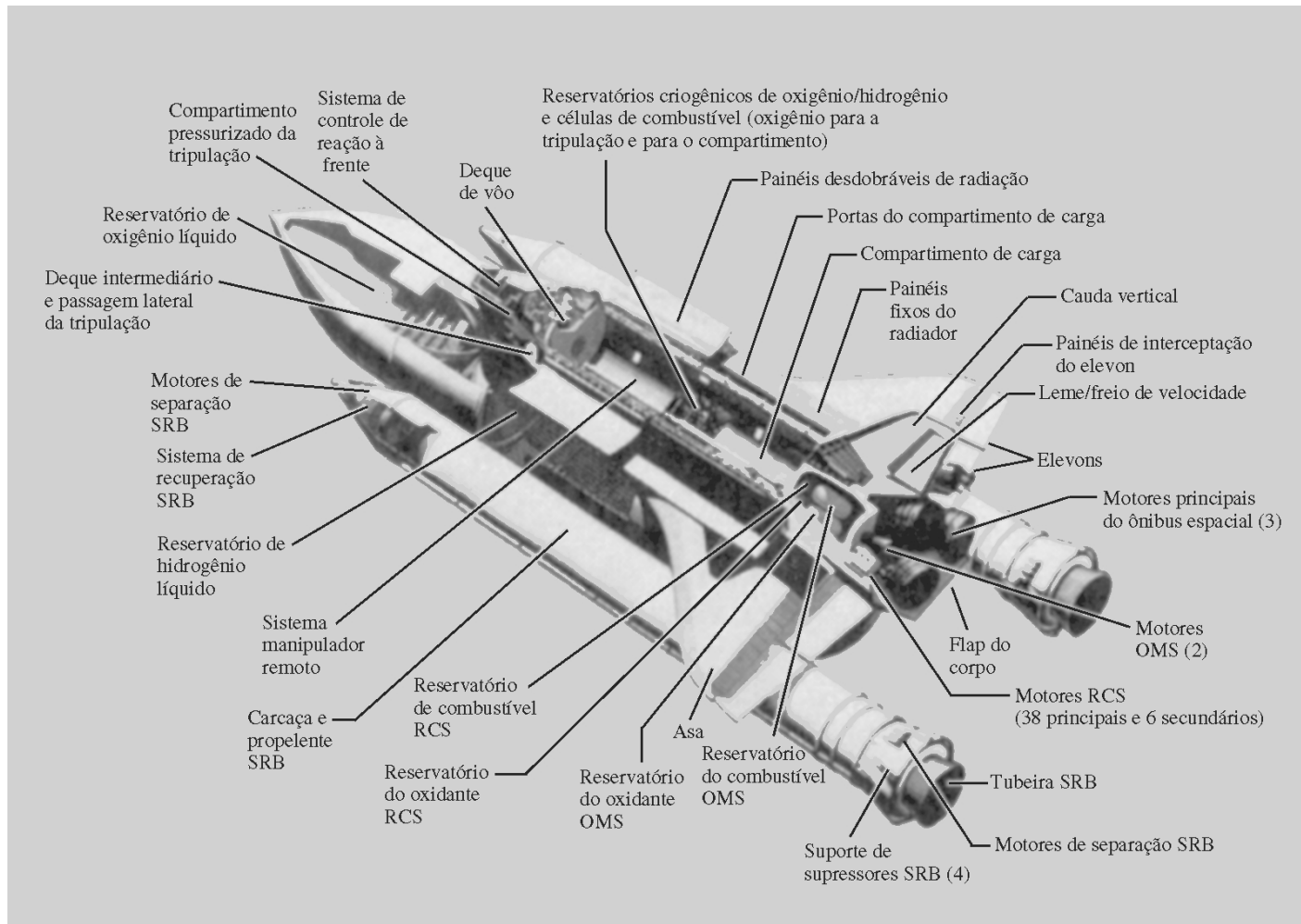


# Controle de Sistemas Dinâmicos

## CSD5 – Álgebra de Blocos

Prof. Adolfo Bauchspiess  
ENE/UnB

Obs: slides assinalados com \* : material extra (não será objeto de Lex/Tav)  
(Material de aula *Complementar*, adaptado parcialmente de Nise – Eng. de Sist. de Controle)



**\* Fig. 5.1**

© NASA-Houston.

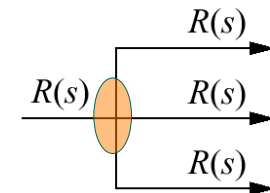
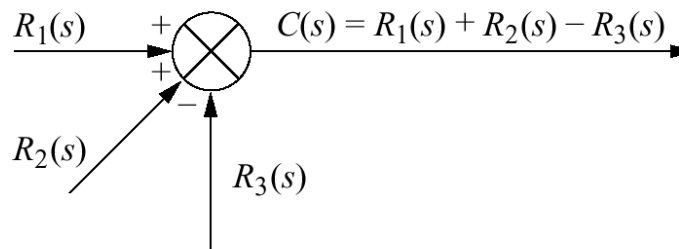
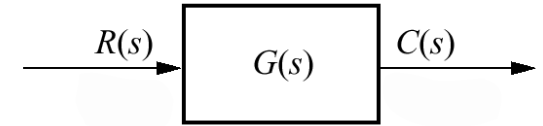
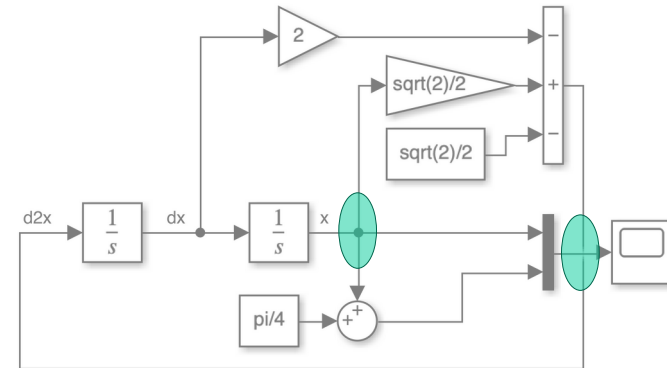
O ônibus espacial é constituído de diversos subsistemas.

Você consegue identificar quais são do sistema controlado x sistema de controle?

# 5.2 Diagramas de Blocos

Interligação de subsistemas:

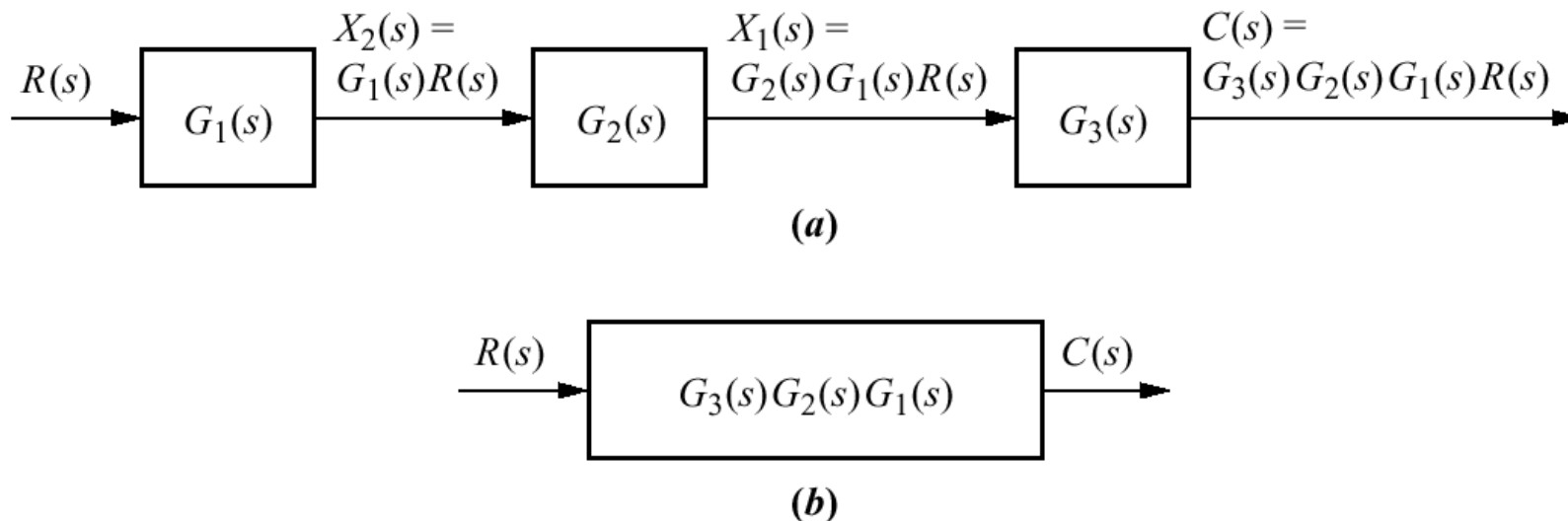
- Soma de sinais
- pontos de coleta de sinal (ideal)



**Fig. 5.2**  
Componentes de um diagrama de blocos de um sistema linear e invariante no tempo

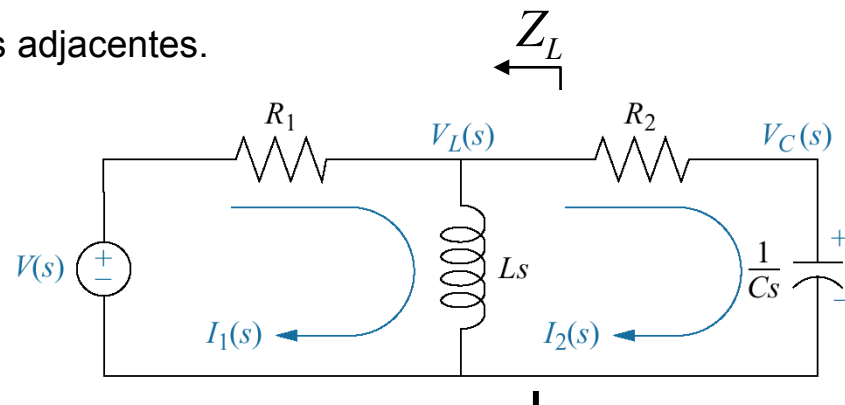
**Fig. 5.3**

Subsistemas em cascata;



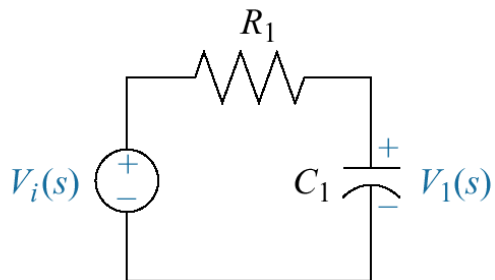
Assume-se: subsistemas interconectados não afetam os adjacentes.

Senão: carregamento,  
e a função de transferência equivalente não é mais  
o produto das funções de transferência individuais.

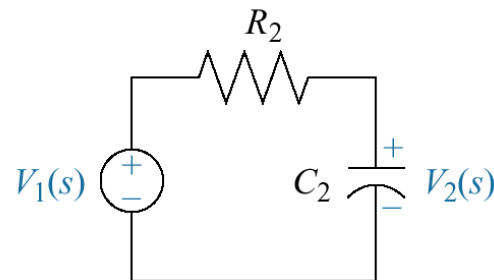


**Fig. 5.4**

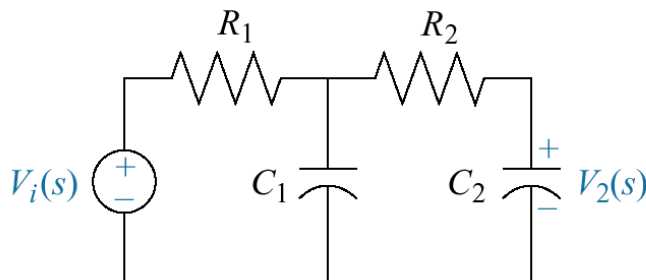
Efeito de carga em sistemas em cascata



$$G_1(s) = \frac{V_1(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{s + \frac{1}{R_1 C_1}}$$

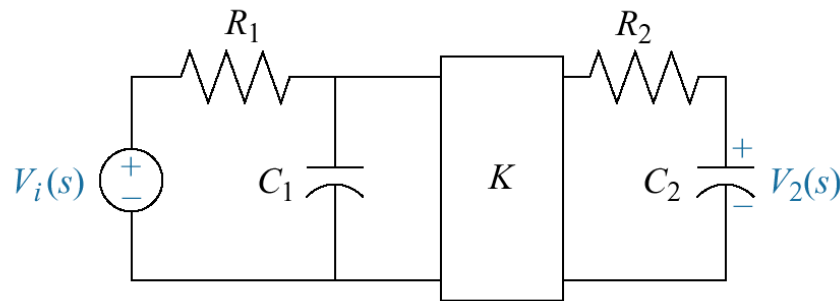


$$G_2(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{s + \frac{1}{R_2 C_2}}$$



$$G_T(s) = \frac{V_2(s)}{V_i(s)} \neq G_2(s)G_1(s)$$

$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1}\right)s + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}}$$



$$G_T(s) = \frac{V_2(s)}{V_i(s)} = KG_2(s)G_1(s)$$

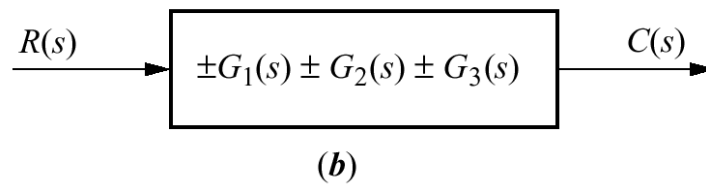
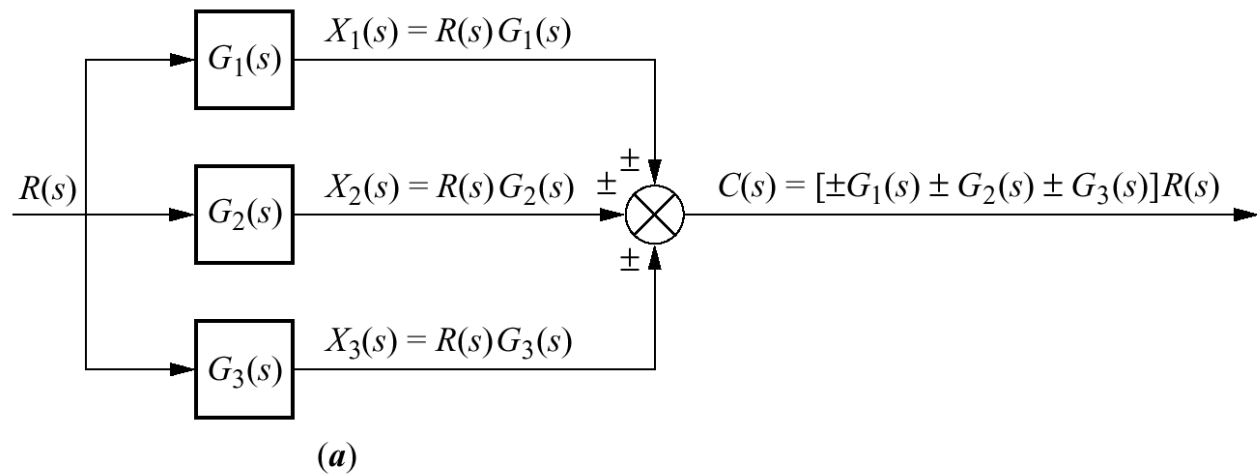
$$G(s) = G_2(s)G_1(s) = \frac{1}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2}\right)s + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}}$$

$$\frac{V_2(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + s(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) + 1}$$

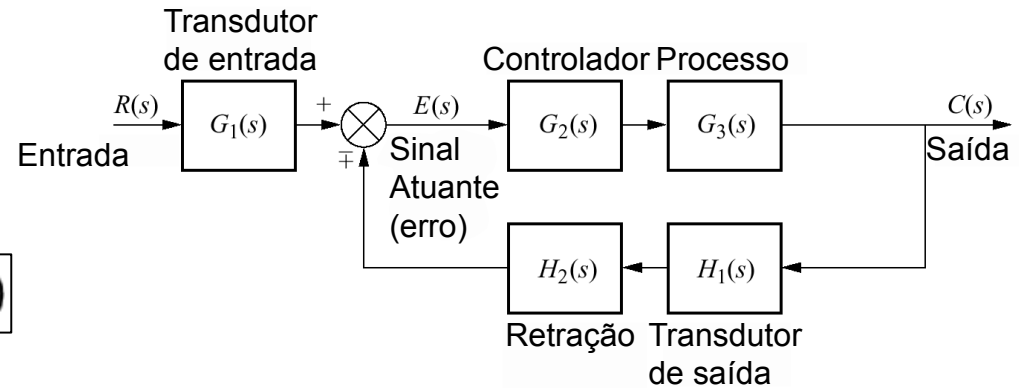
Diagrama de blocos com carregamento?

## Fig. 5.5

- a. Subsistemas em paralelo;
- b. Função de transferência equivalente



# Sistemas de controle com retroação



(a)

Pelo diagrama de blocos,

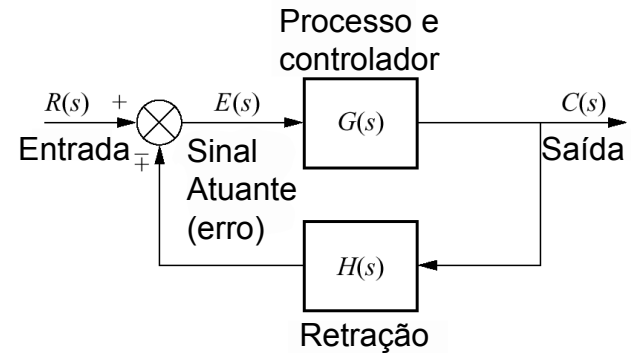
$$E(s) = R(s) \mp C(s)H(s)$$

Mas como  $C(s) = G(s)E(s)$ ,

$$E(s) = \frac{C(s)}{G(s)}$$

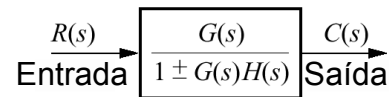
Substituindo teremos:

$$\begin{aligned} C(s)/G(s) &= R(s) - C(s)H(s) \\ C(s) &= R(s)G(s) - C(s)G(s)H(s) \\ C(s)(1 + G(s)H(s)) &= R(s)G(s) \end{aligned}$$



(b)

$$G_e(s) = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$



(c)

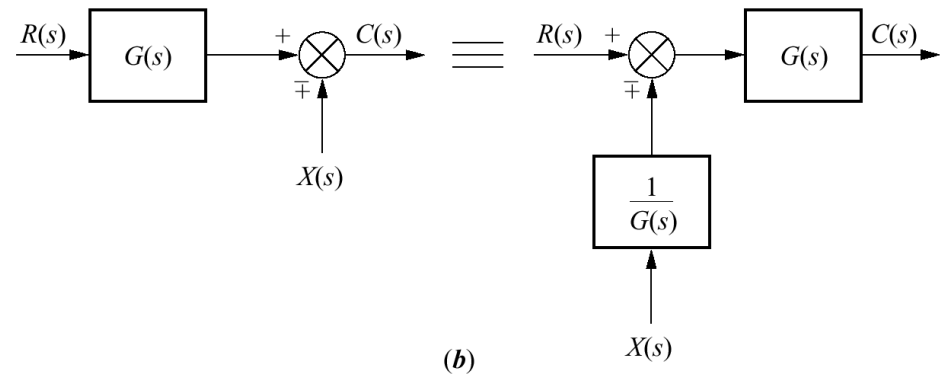
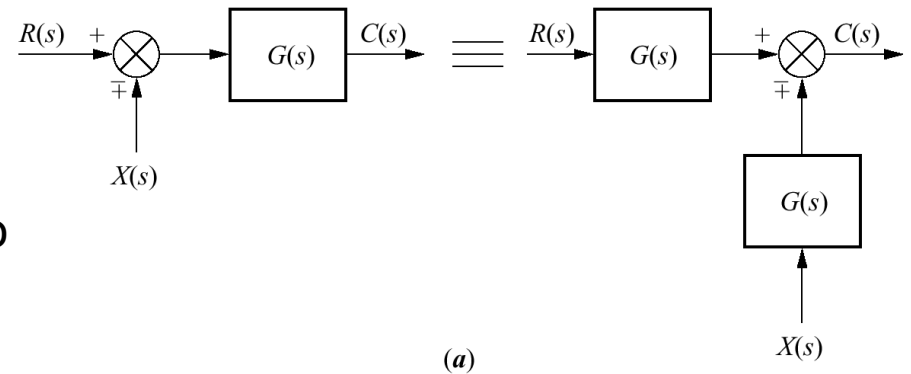
O produto  $G(s)H(s)$  é chamado de *função de transferência em malha aberta*, ou *ganho de malha*

# Álgebra de diagrama de blocos

Junções de soma –  
formas equivalentes de deslocar um blo

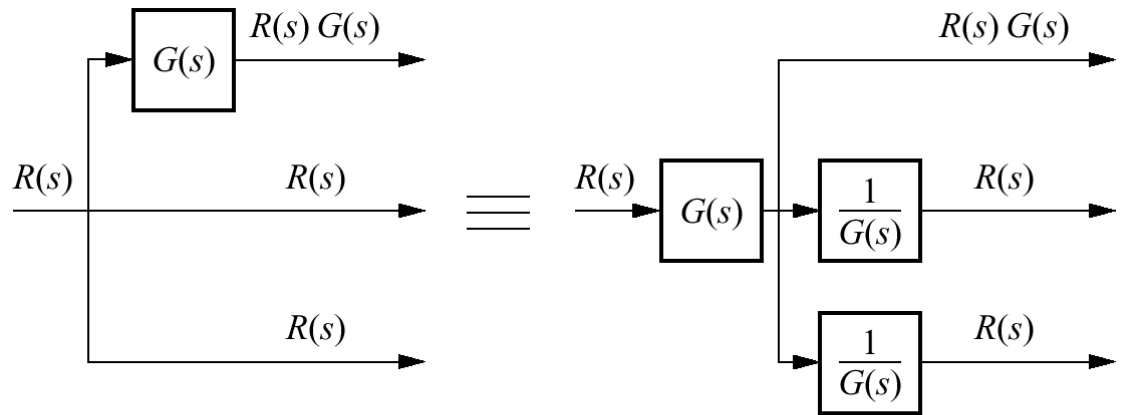
a. à esquerda da junção somadora;

b. à direita da junção somadora





# Álgebra de diagrama de blocos

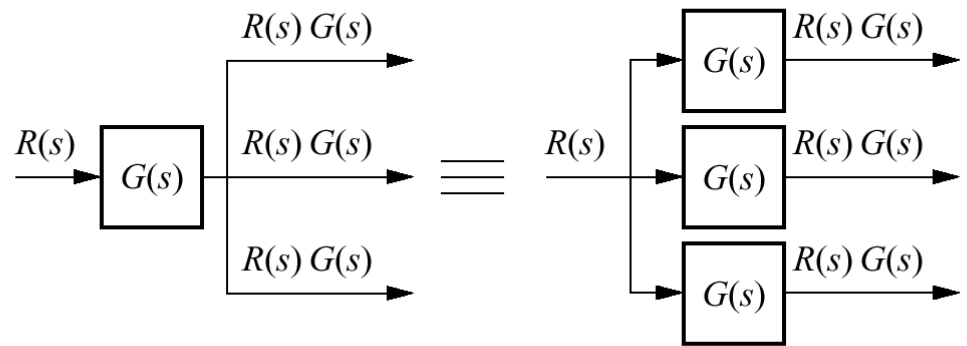


(a)

Junções de aquisição de sinais -  
formas equivalentes de deslocar um bloco

a. à esquerda da junção

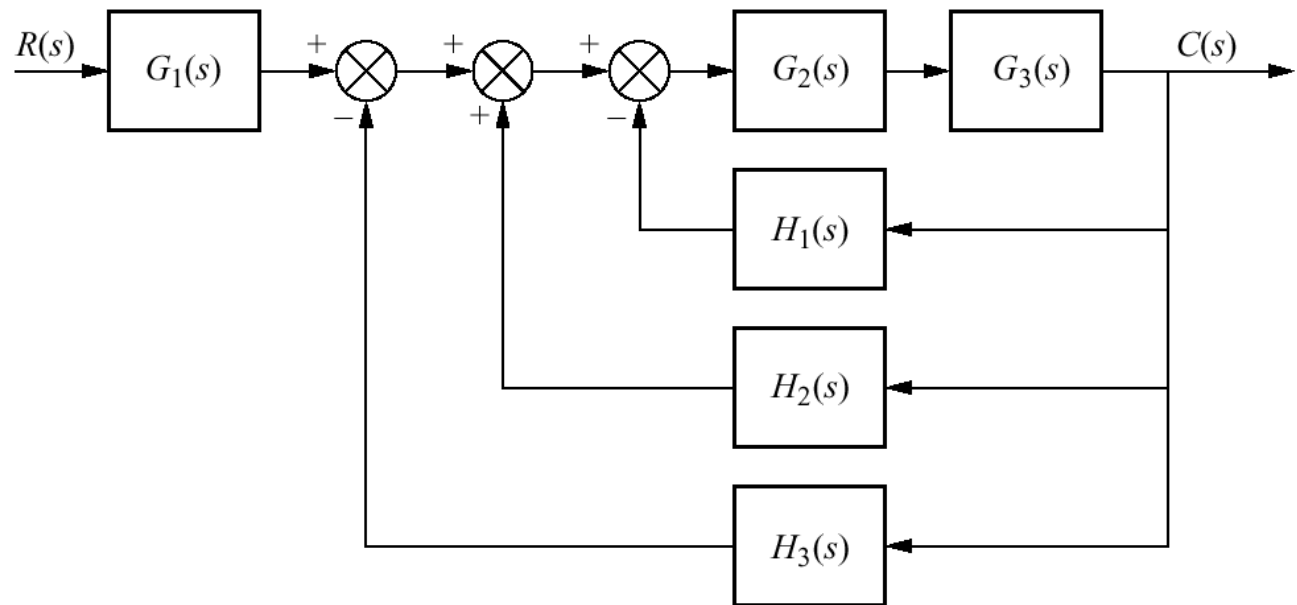
b. á direita da junção

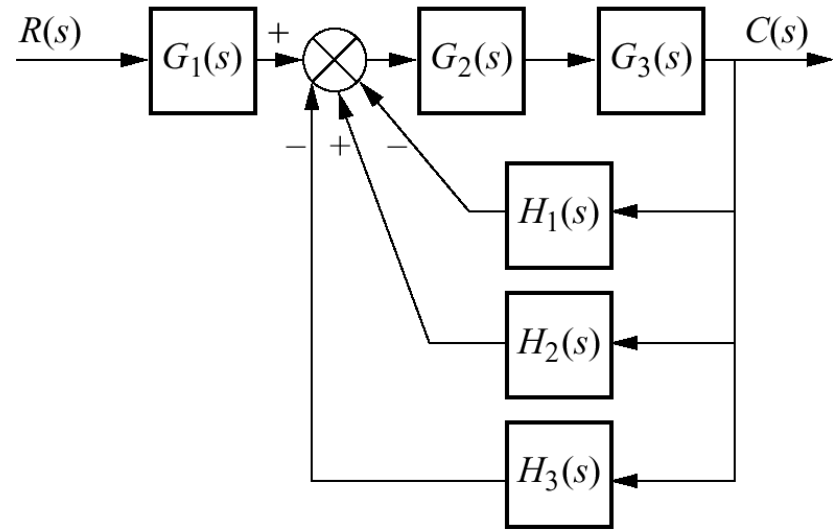


(b)

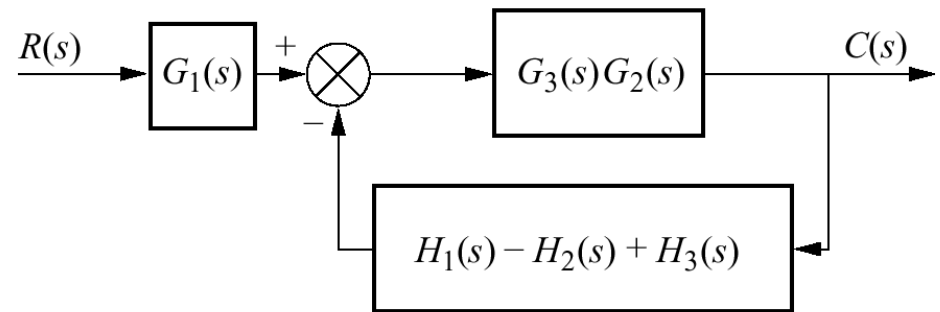
**Fig. 5.9**

Diagramas de blocos para o Exemplo 5.1

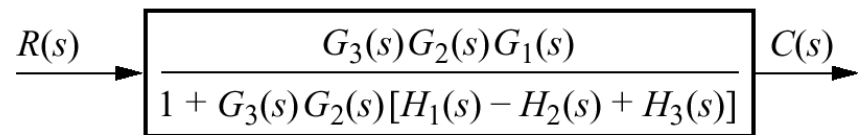




(a)



(b)



(c)

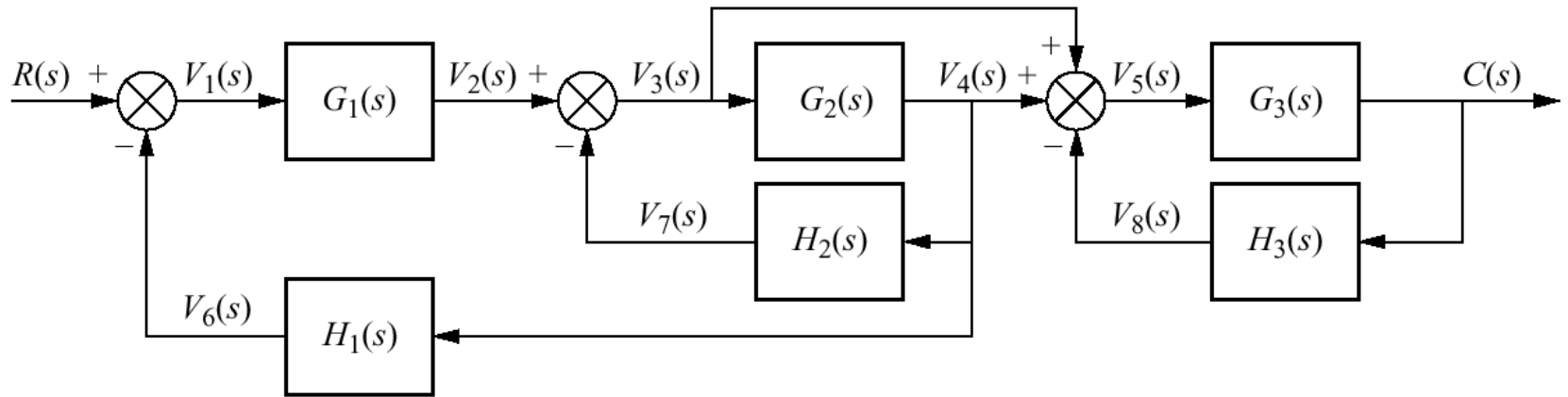
**Fig. 5.10**

Etapas na solução do Exemplo:

- a. reunir as junções de soma em uma única;
- b. formar o sistema em cascata equivalente no canal de ação à frente e o sistema paralelo equivalente no canal de retroação;
- c. formar o sistema como retroação equivalente e multiplicar por  $G_1(s)$  em cascata.

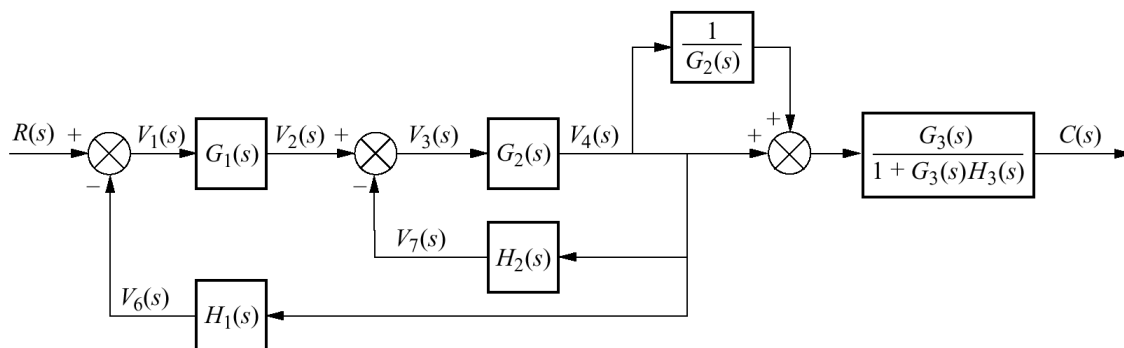
**Fig. 5.11**

Diagrama de blocos para o Exemplo 5.2

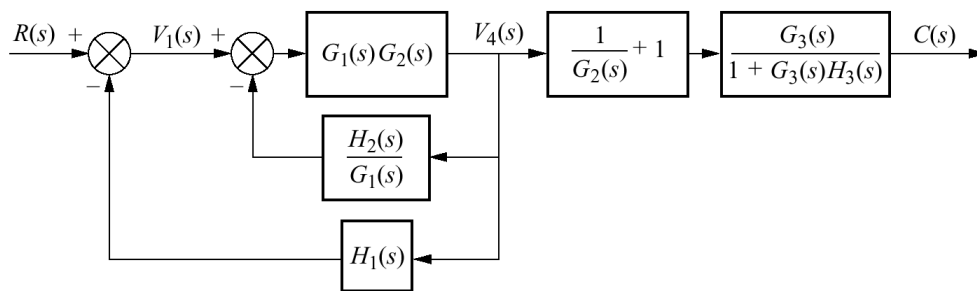


**Fig. 5.12**

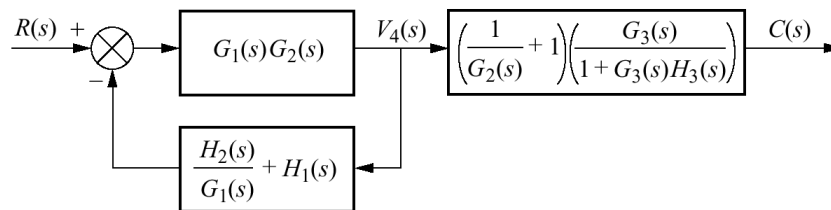
Etapas na redução do diagrama de blocos para o Exemplo 5.2



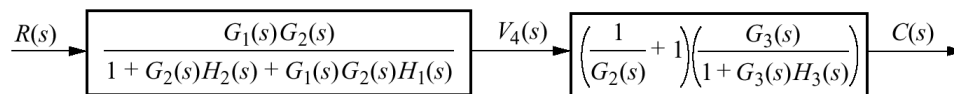
(a)



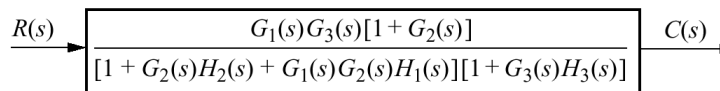
(b)



(c)



(d)



(e)

# Construção de diagramas de blocos

## 1. Identificar os sinais

(correntes, tensões, deslocamentos, velocidades, forças ou análogos) como:

- i. Entradas
- ii. Saídas
- iii. Sinais Intermediários:

Dar preferência a voltagem em capacitores, corrente em indutores, velocidade de massas, compressão de molas ou análogos.

## 2. Escrever as equações dos componentes utilizando apenas os sinais já definidos.

Todas as saídas e sinais intermediários devem ser gerados a partir destes.

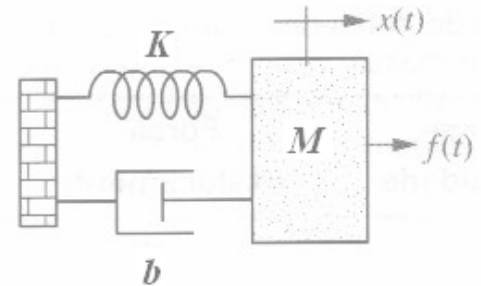
## 3. Tomar a transformada de Laplace admitindo condições iniciais nulas

## 4. Montagem dos blocos representativos iniciando pelas entradas à esquerda, sinais intermediários, pela ordem de geração até as saídas à direita.

Fazer todas as interconexões.

# Construção de diagramas de blocos

## Exemplo 2: Sistema Mecânico



- 1) Sinais:
  - Entrada:  $f(t)$
  - Saída:  $x(t)$
  - Sinais Intermediários:  $v(t)$  (velocidade da massa)
- 2) Equações e T. de Laplace

(1 equação para cada subsistema intermediário, 1 equação para cada saída)

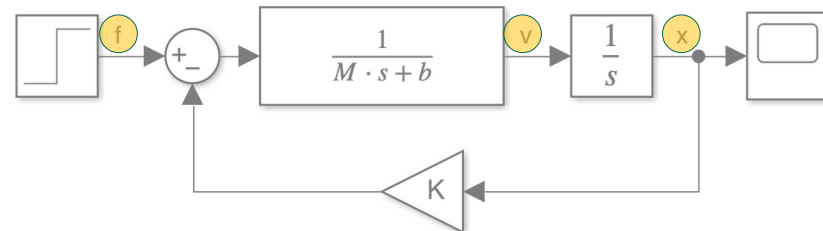
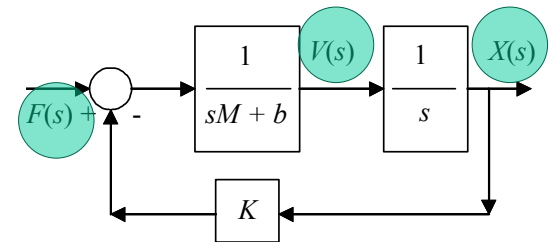
$$M \frac{dv(t)}{dt} = f(t) - bv(t) - Kx(t)$$

$$V(s) = \frac{1}{sM + b} \{F(s) - KX(s)\}$$

$$x(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$$

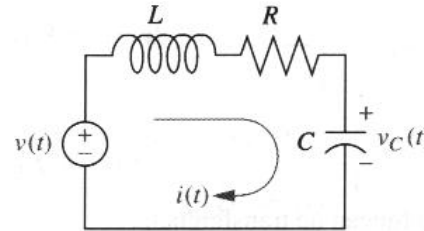
$$X(s) = \frac{1}{s} V(s)$$

### 3) Diagrama



# Construção de diagramas de blocos

## Exemplo 1: Circuito RLC



1) Sinais:

- Entrada:  $v(t)$
- Saída:  $v_C(t)$
- S. Intermediários:  $i(t)$  (observe que a tensão no capacitor já foi considerada)

2) Equações e T. de Laplace (1 equação para cada S. Intermediário, 1 equação para cada saída)

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + v_C(t) = v(t)$$

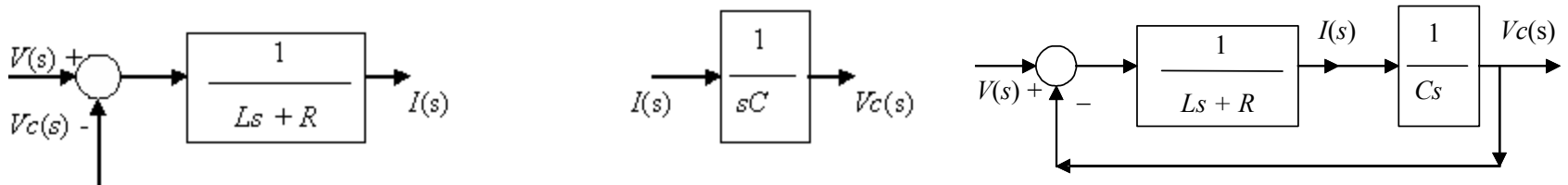
$$LsI(s) + RI(s) + V_C(s) = V(s)$$

$$I(s) = \frac{1}{Ls + R} (V(s) - V_C(s))$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$V_C(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

4) Montagem





# \* Construção de diagramas de blocos

## Exemplo 3: Circuito R2CL

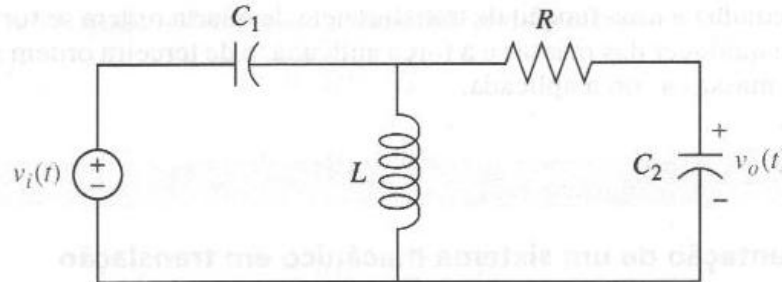
1) Sinais:

- Entrada:  $v_i(t)$
- Saída:  $v_o(t)$
- S. Intermediários:  $v_{C1}(t)$ ,  $i_R(t)$ ,  $i_L(t)$

2) Equações e T. de Laplace (1 equação para cada S.

Intermediário, 1 equação para cada saída)

4) Diagrama



$$v_i(t) = v_{C1}(t) + L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$0 = -L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_R(t) + v_o(t)$$

$$v_o(t) = \frac{1}{C_2} \int_0^t i_R(\tau) d\tau$$

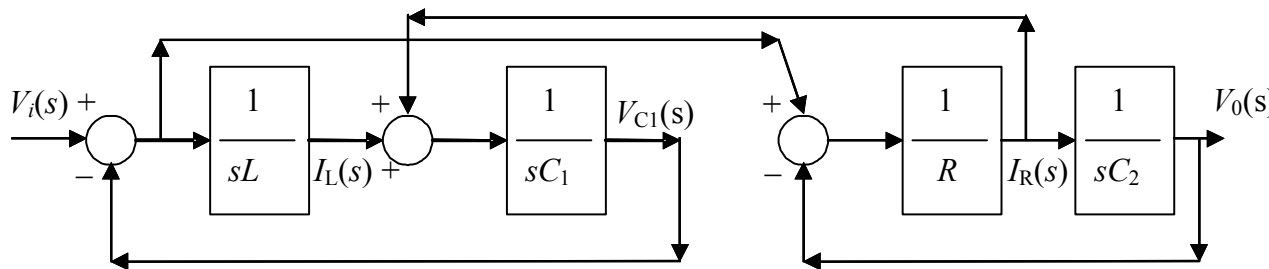
$$v_{C1}(t) = \frac{1}{C_1} \int_0^t [i_L(\tau) + i_R(\tau)] d\tau$$

$$I_L(s) = \frac{1}{sL} [V_i(s) - V_{C1}(s)]$$

$$I_R(s) = \frac{1}{R} [sLI_L(s) - V_o(s)]$$

$$V_o(s) = \frac{1}{sC_2} I_R(s)$$

$$V_{C1}(s) = \frac{1}{sC_1} [I_L(s) + I_R(s)]$$



$$sLI_L(s) = V_i(s) - V_{C1}(s)$$

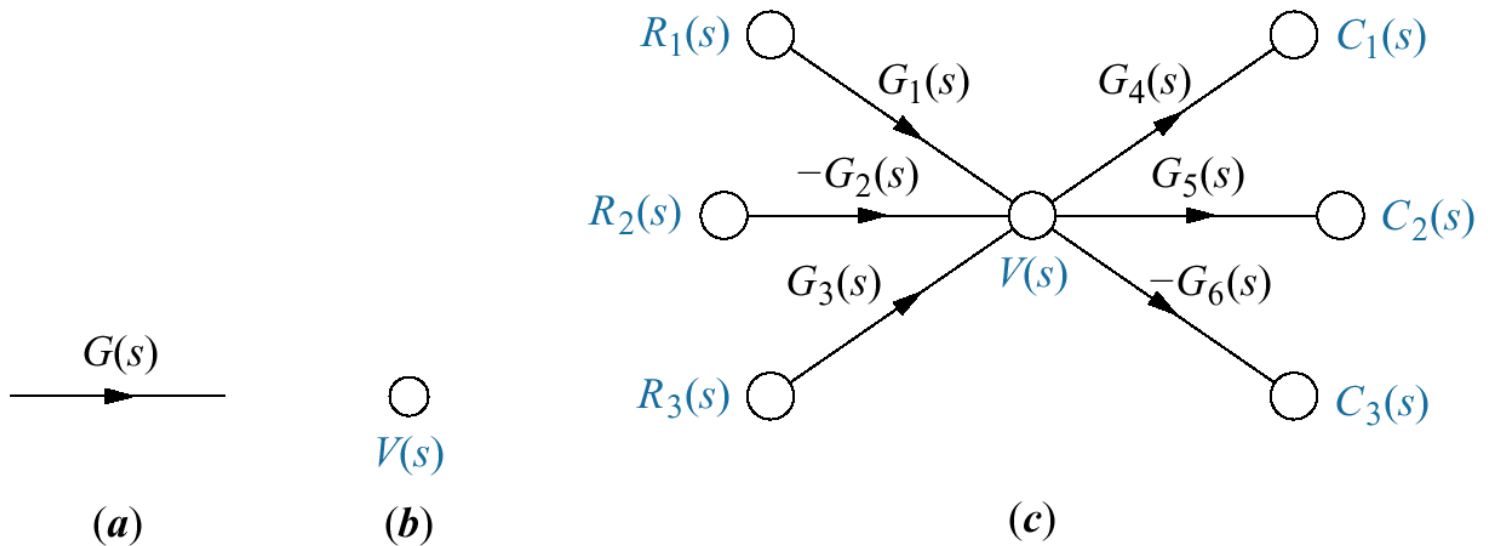
$$I_R(s) = \frac{1}{R} [V_i(s) - V_{C1}(s) - V_o(s)]$$

Onde  $I_R(s)$  foi gerado pela junção das duas primeiras equações

## Fig. 5.17

Componentes de um **diagrama de fluxo de sinal**:

- a. sistema;
- b. sinal;
- c. interconexão de sistemas e sinais



**Fig. 5.18**

Construindo diagramas de fluxo de sinal:

a. nós de sistemas em cascata

b. diagrama de fluxo de sinal com sistemas em cascata;

c. nós de sistemas em paralelo

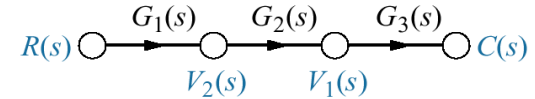
d. diagrama de fluxo de sinal com sistemas em paralelo;

e. nós de sistemas com retroação

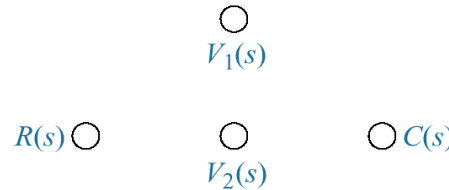
f. diagrama de fluxo de sinais de sistema com retroação



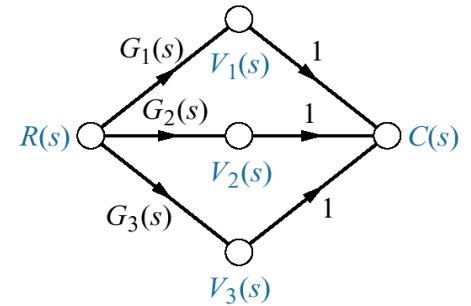
(a)



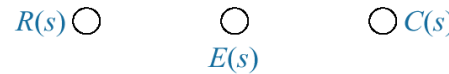
(b)



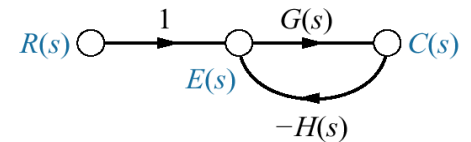
(c)



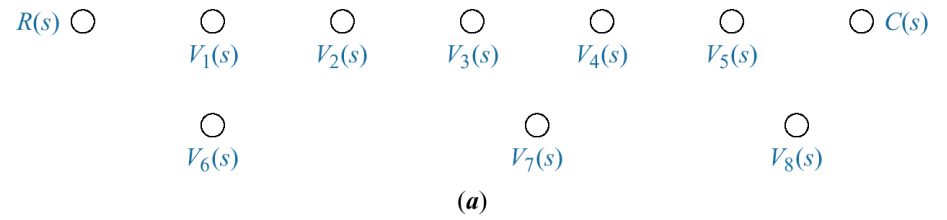
(d)



(e)



(f)



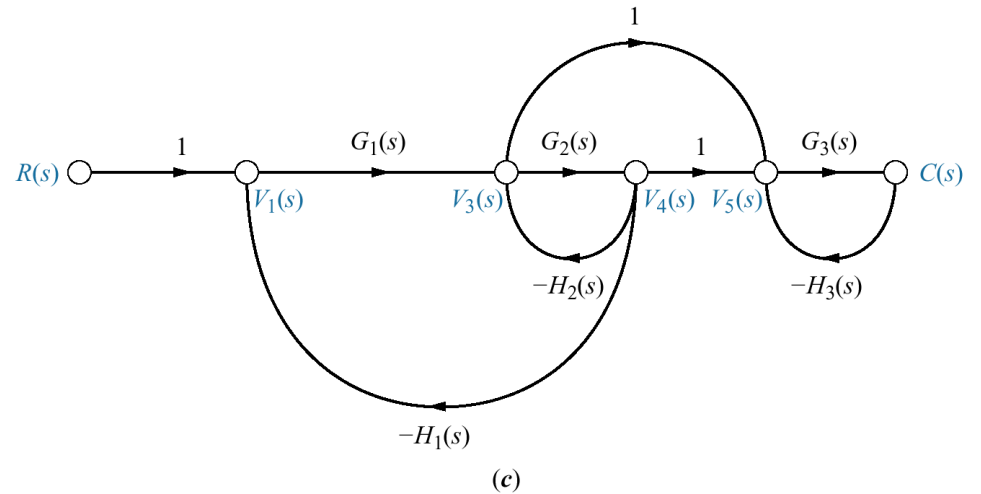
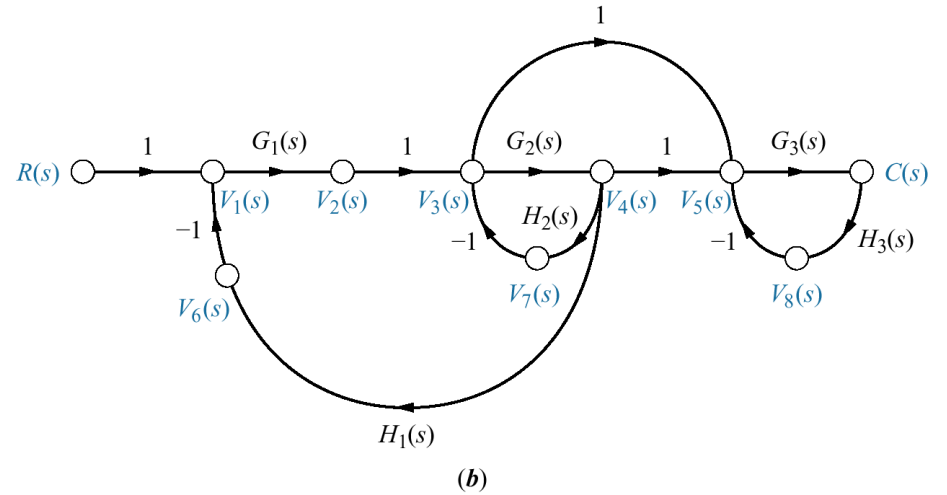
**Fig. 5.19**

Desenvolvimento de diagramas de fluxo de sinal:

a. nós de sinal;

b. diagrama de fluxo de sinal;

c. diagrama de fluxo de sinal amplificado



# Regra de Mason

$$G(s) = \frac{\sum T_k \Delta_k}{\Delta}$$

Onde

$k$  - número de percursos diretos, entre  $R(s)$  e  $C(s)$ .

$T_k$  = ganho do  $k$ -ésimo percurso direto

$\Delta = 1 - \Sigma$  ganhos de malha

+  $\Sigma$  ganhos de malhas disjuntas duas a duas

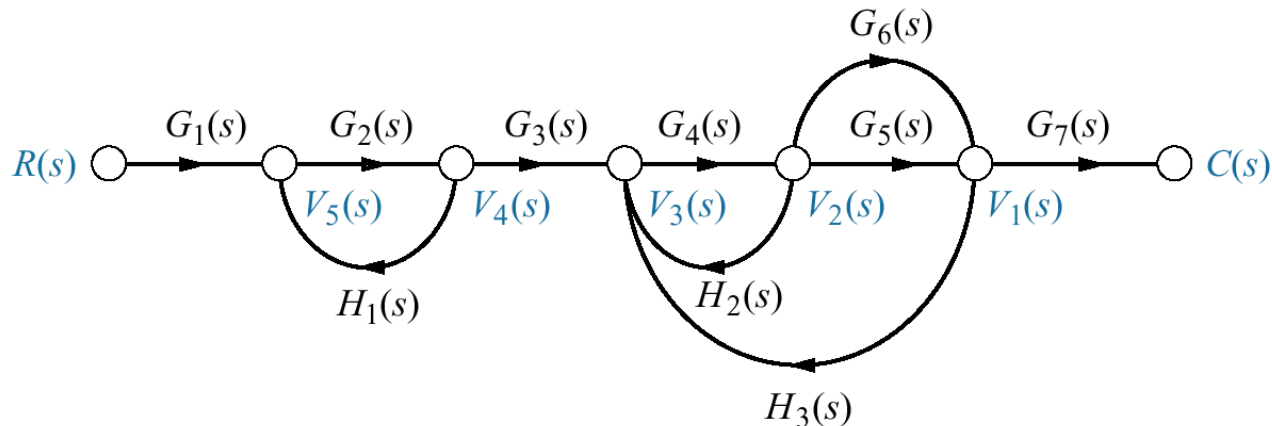
-  $\Sigma$  ganhos de malhas disjuntas três a três

+  $\Sigma$  ganhos de malhas disjuntas quatro a quatro - ...

$\Delta_k = \Delta - \Sigma$  ganhos de malha em  $\Delta$  que tocam o  $k$ -ésimo percurso avante.

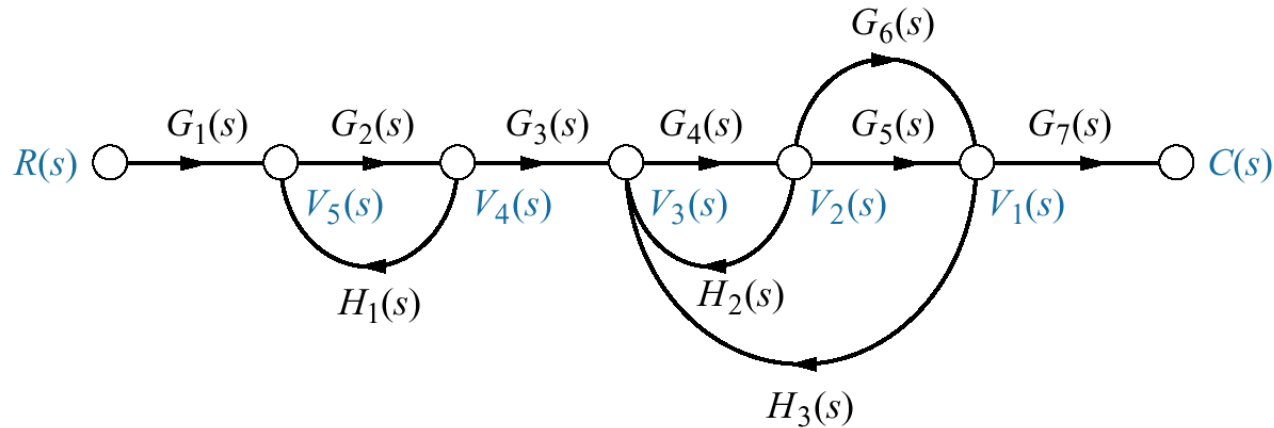
Em outras palavras  $\Delta_k$  é formado eliminando-se de  $\Delta$

os ganhos de malha que tocam o  $k$ -ésimo percurso à frente.



# Regra de Mason

$$G(s) = \frac{\sum T_k \Delta_k}{\Delta}$$



**Ganhos de percurso avante:**

1.  $G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)G_7(s)$
2.  $G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_6(s)G_7(s)$

**Ganho de malhas:**

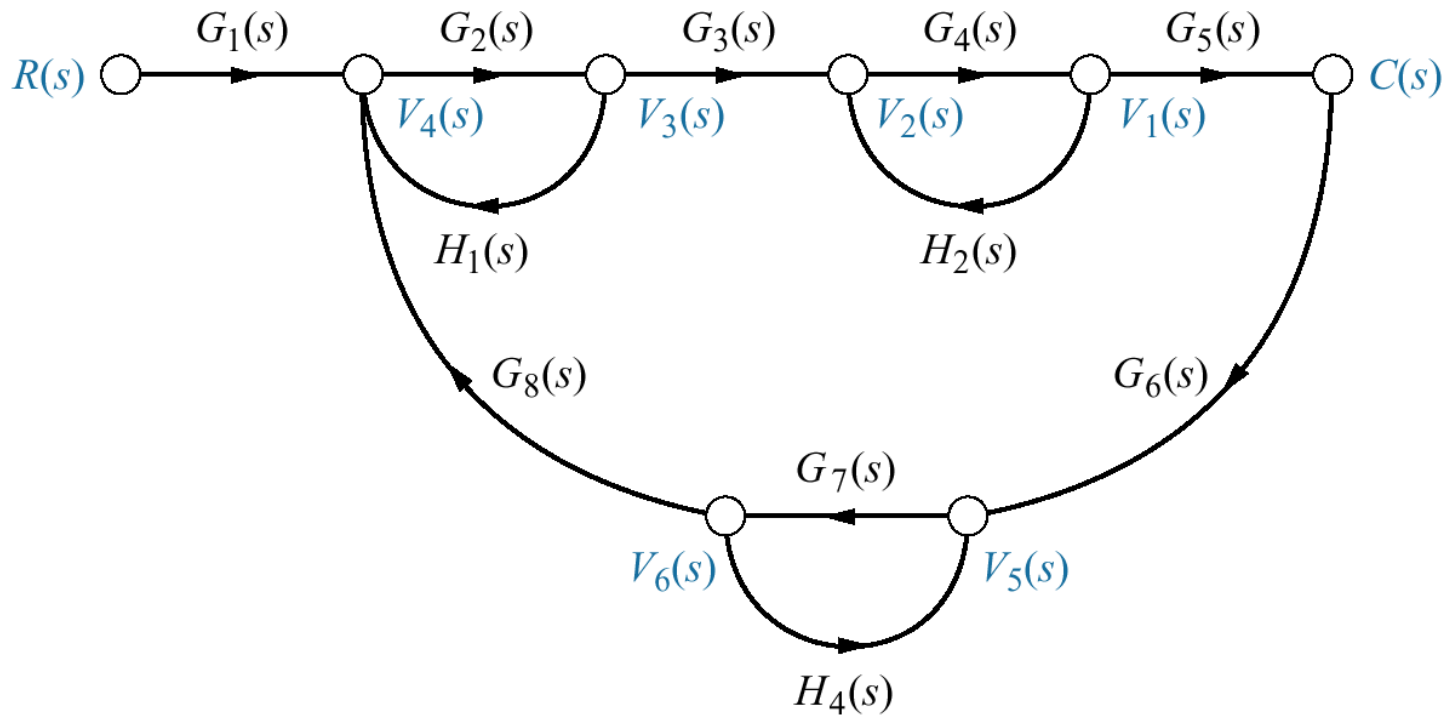
O produto dos ganhos dos ramos obtidos ao longo de um percurso que começa em um nó e termina no mesmo nó sem passar por nenhum outro nó mais de uma vez e segue o sentido do fluxo de sinal.

1.  $G_2(s)H_1(s)$ ,
2.  $G_4(s)H_2(s)$ ,
3.  $G_4(s)G_5(s)H_3(s)$ ,
4.  $G_4(s)G_6(s)H_3(s)$

**Ganho de malhas disjuntas:** O produto dos ganhos de malha de malhas disjuntas consideradas duas a duas, três a três, quatro a quatro, etc.

- |   |
|---|
| 1. $[G_2(s)H_1(s)][G_4(s)H_2(s)]$       |
| 2. $[G_2(s)H_1(s)][G_4(s)G_5(s)H_3(s)]$ |
| 3. $[G_2(s)H_1(s)][G_4(s)G_6(s)H_3(s)]$ |

**Fig. 5.21**  
Diagrama de  
fluxo de sinal  
para o Exempc



*Solução*

1) *Percurso avante*

2) *Malhas.*

1.  $G_2(s)H_1(s)$

2.  $G_4(s)H_2(s)$

3.  $G_7(s)H_4(s)$

4.  $G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)G_6(s)G_7(s)G_8(s)$

3) *identifique as malhas disjuntas duas a duas.*

Malha 1 e malha 2:

$$G_2(s)H_1(s)G_4(s)H_2(s)$$

Malha 1 e malha 3:

$$G_2(s)H_1(s)G_7(s)H_4(s)$$

Malha 2 e malha 3:

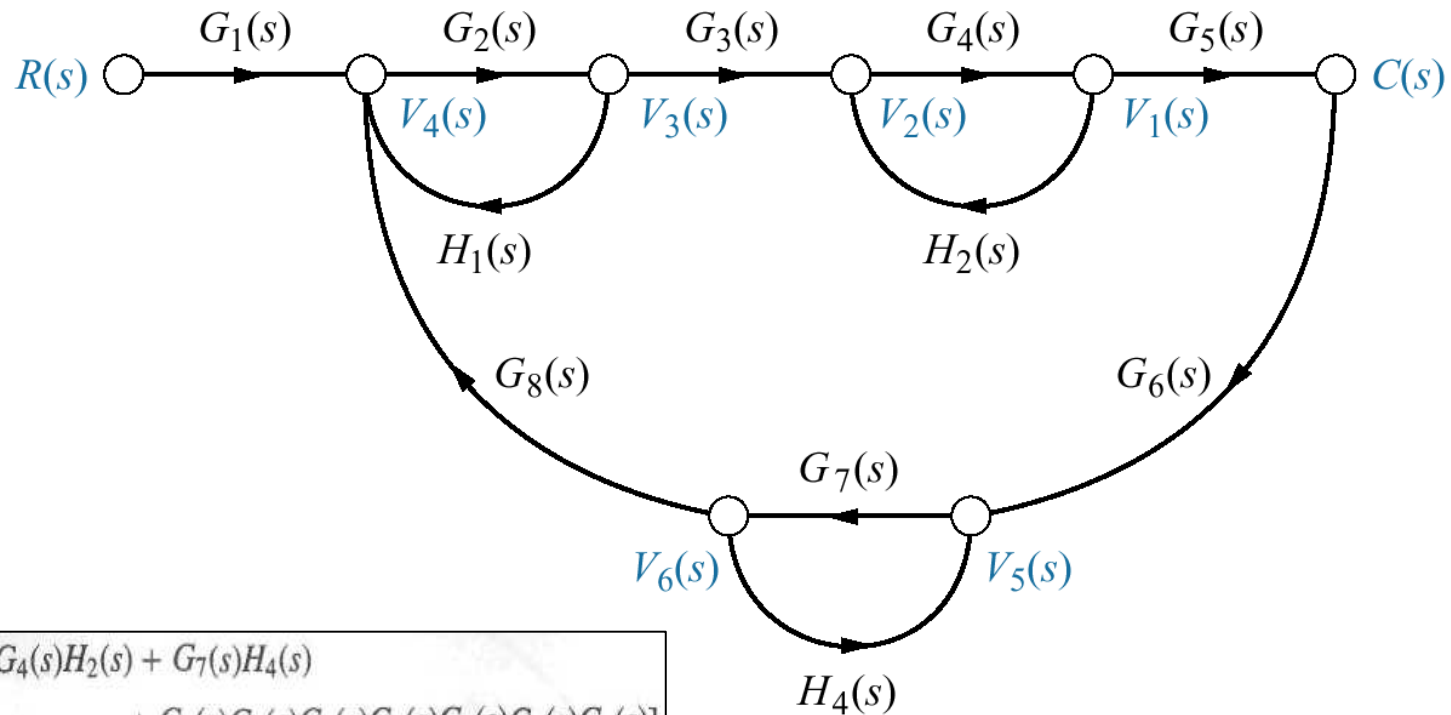
$$G_4(s)H_2(s)G_7(s)H_4(s)$$

4) *malhas disjuntas três a três são:*

Malhas 1,2 e 3:

$$G_2(s)H_1(s)G_4(s)H_2(s)G_7(s)H_4(s)$$

**Fig. 5.21**  
Diagrama de fluxo de sinal para o Exemplo para o Exemplo



Agora, com base nas definições,

$$\Delta = 1 - [G_2(s)H_1(s) + G_4(s)H_2(s) + G_7(s)H_4(s) + G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)G_6(s)G_7(s)G_8(s)] + [G_2(s)H_1(s)G_4(s)H_2(s) + G_2(s)H_1(s)G_7(s)H_4(s) + G_4(s)H_2(s)G_7(s)H_4(s)] - [G_2(s)H_1(s)G_4(s)H_2(s)G_7(s)H_4(s)]$$

$$\Delta_1 = 1 - G_7(s)H_4(s)$$

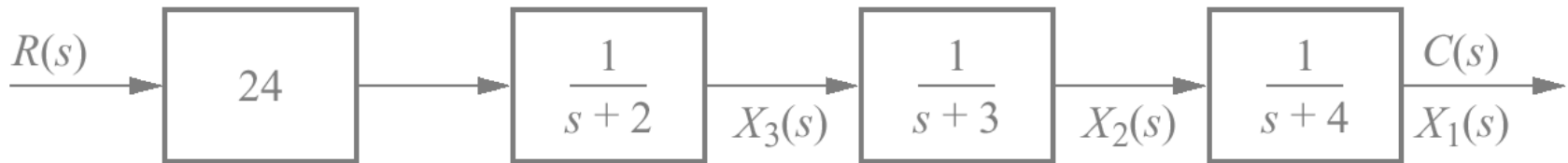
produzindo a função de transferência:

$$G(s) = \frac{T_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{[G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)G_5(s)][1 - G_7(s)H_4(s)]}{\Delta}$$



**Fig. 5.23**

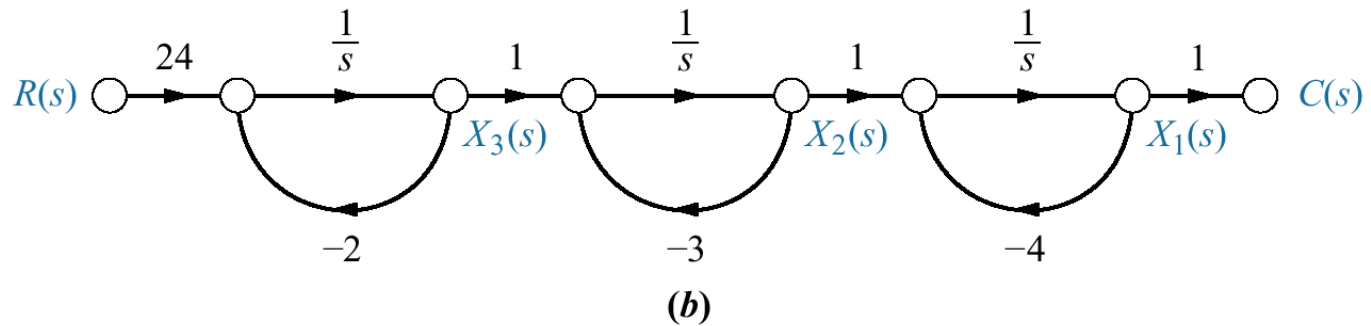
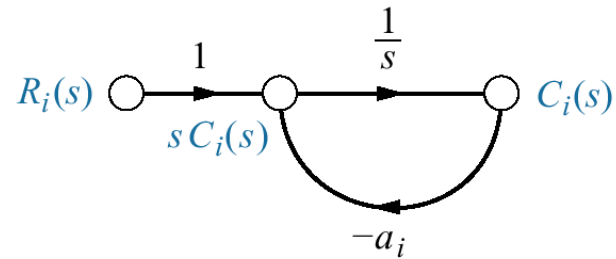
Representação do sistema da Fig. 3.10 com sistemas de primeira ordem em cascata



## Fig. 5.24

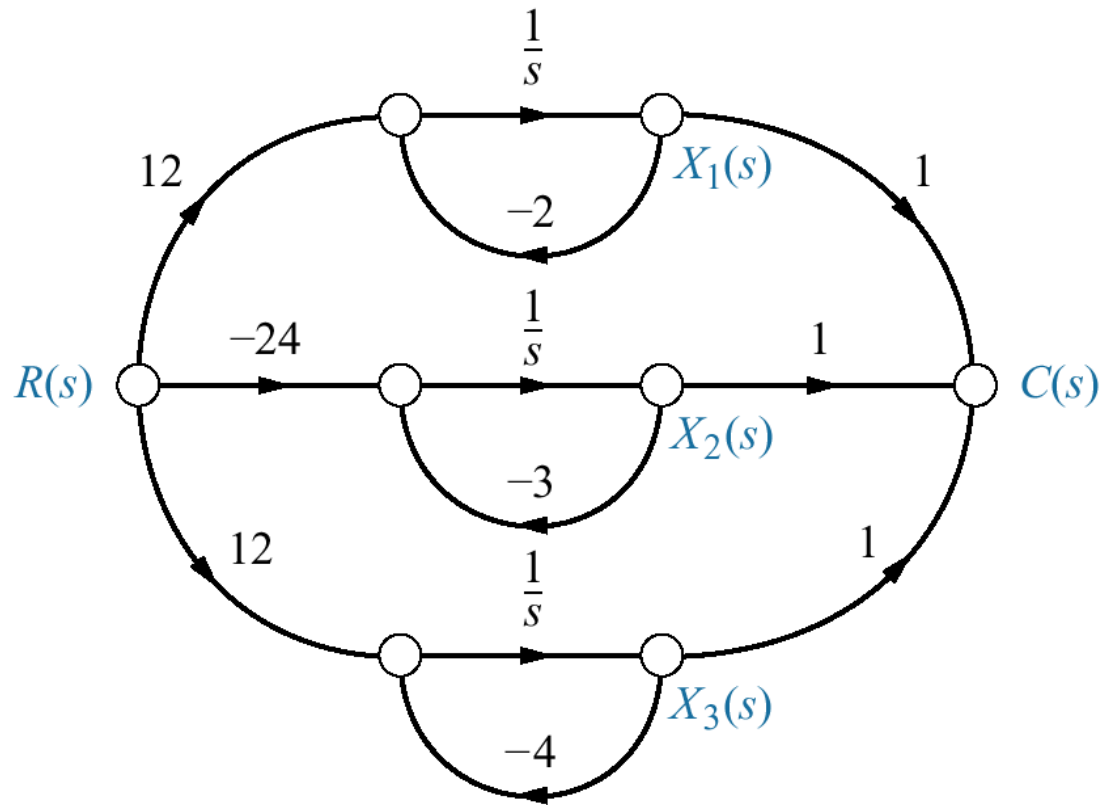
a. Subsistemas de primeira ordem;

b. diagrama de fluxo de sinal para o sistema da Fig. 5.23



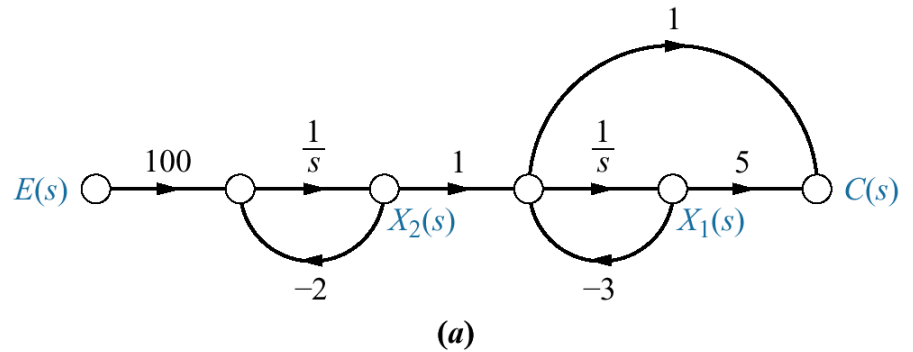
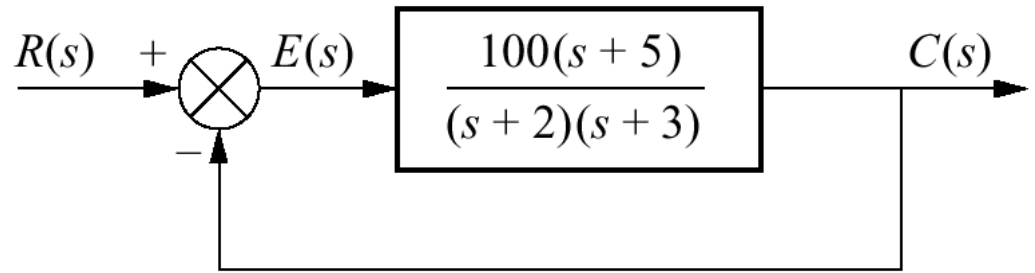
**Fig. 5.25**

Representação em diagrama de fluxo de sinal da Eq. (5.45)



\* **Fig. 5.29**

Sistema de controle com retroação para o Exemplo 5.8



**Fig. 5.30**

Criando um diagrama de fluxo de sinal para o sistema da Fig. 5.29:

a. função da transferência à frente;

b. sistema completo

