

Controle de Sistemas Dinâmicos

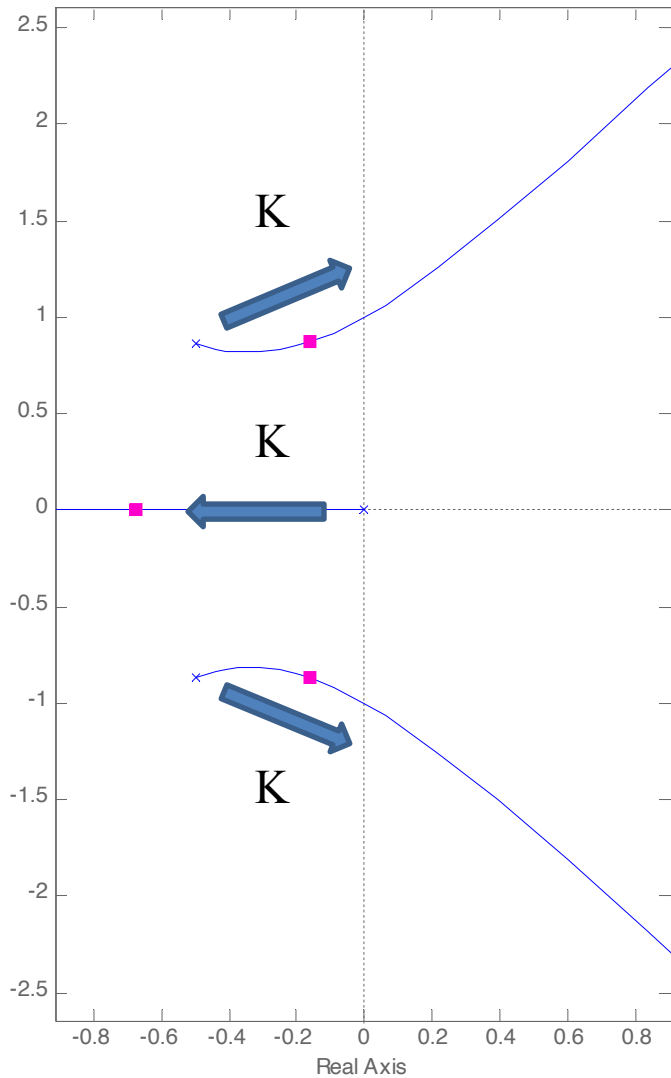
CSD8-Lugar Geométrico das Raízes



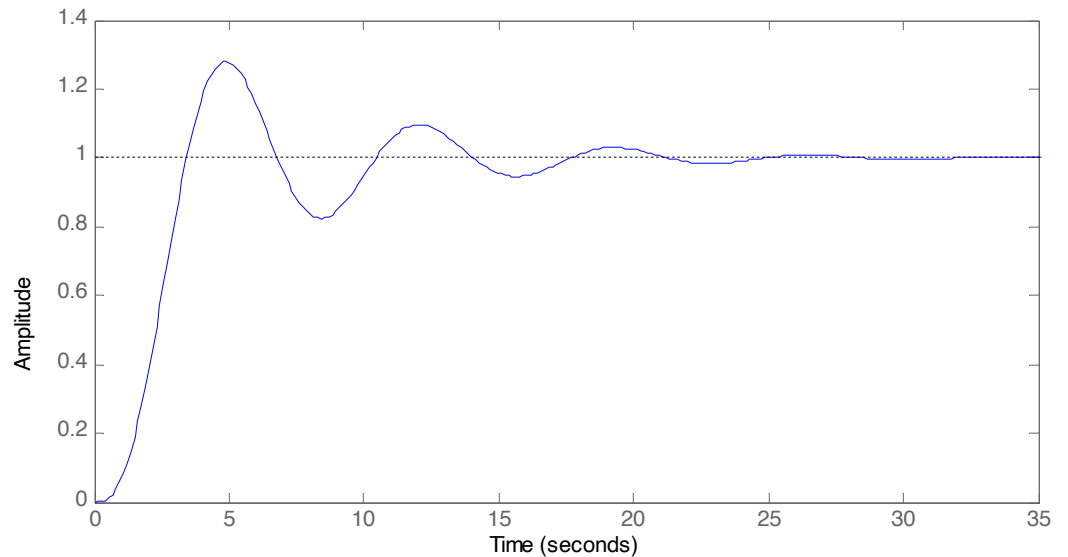
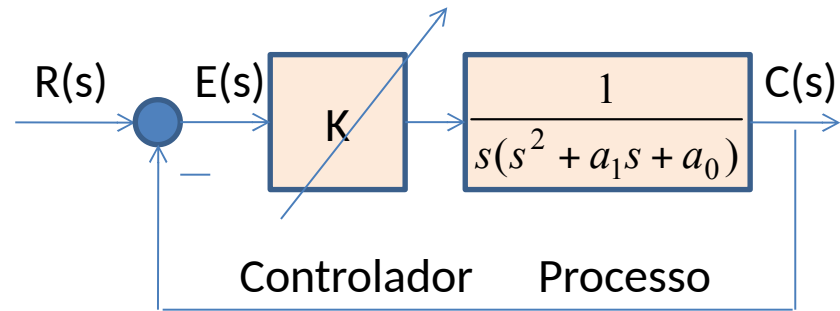
Prof. Adolfo Bauchspiess
ENE/UnB

Lugar Geométrico das Raízes - LGR

Root Locus Editor for Open Loop 1(OL1)



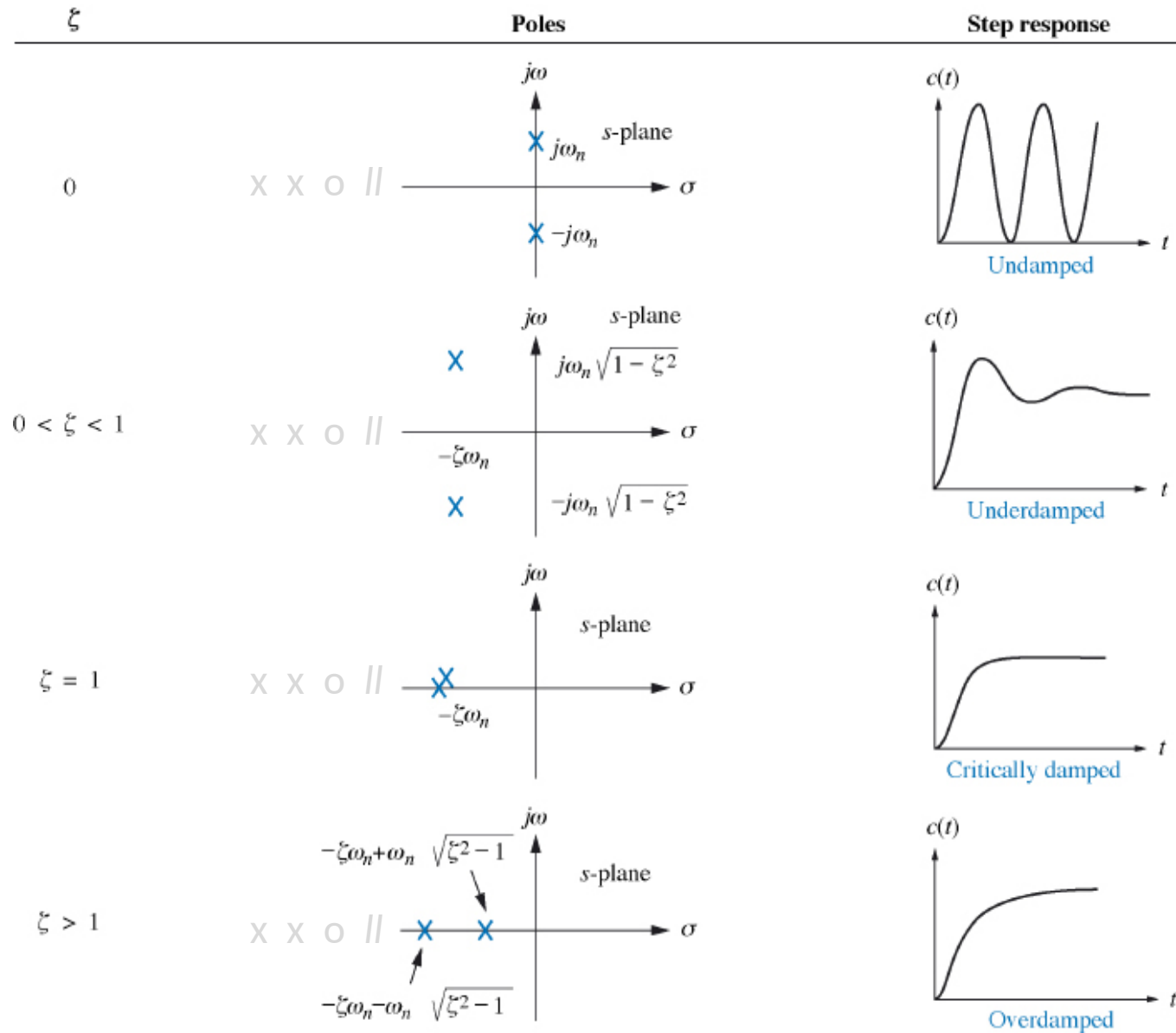
As raízes da equação característica em função de um parâmetro (K)



LGR

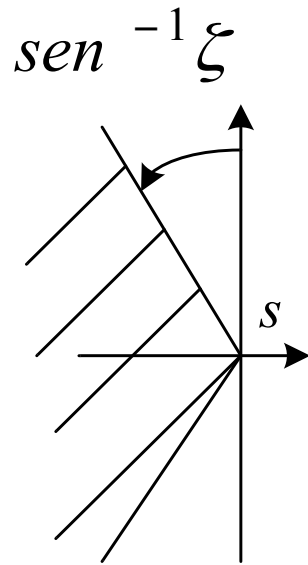
- A resposta é função dos **pólos dominantes** (mais lentos) $y \approx r$

→ ou aproximação de 2ª ordem!

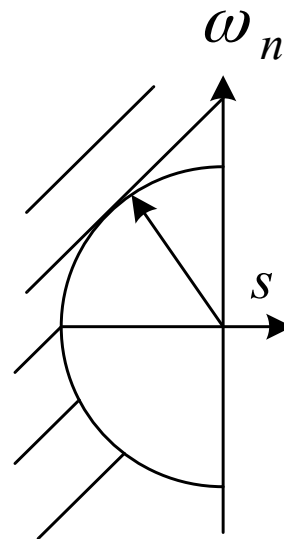


Especificações de Projeto

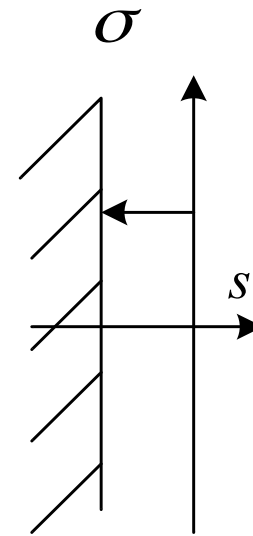
domínio-t \leftrightarrow domínio s



em t: $M_p = f(\zeta)$



$t_r = f(\omega_n)$

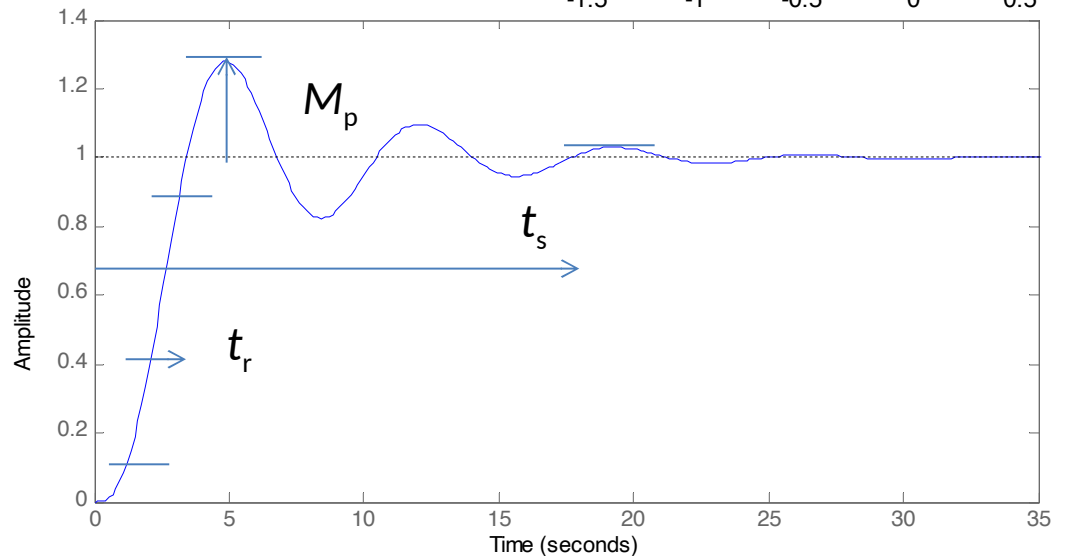
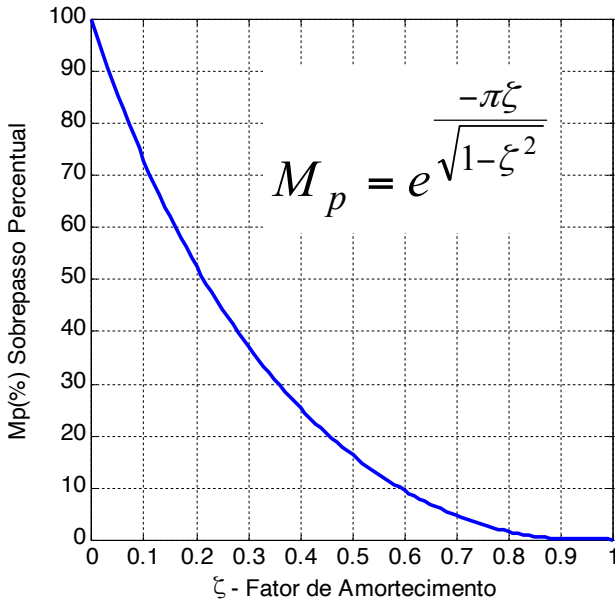
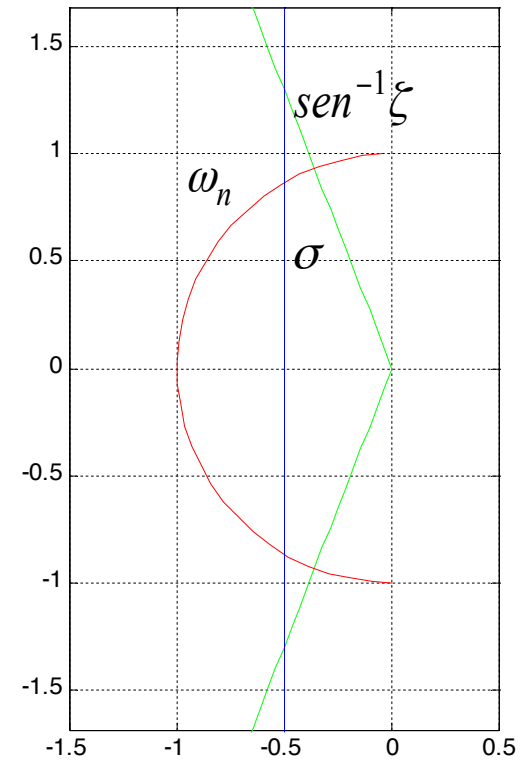
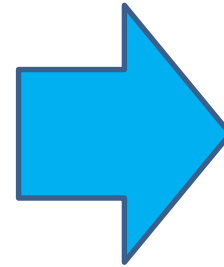


$t_s = f(\sigma)$

Especificações: $t \leftrightarrow s$

Aproximação para uma dinâmica dominante de 2ª ordem ($\sigma = \zeta\omega_n$):

- Tempo de acomodação (2%) $t_s = 4/\sigma$,
- Tempo de subida t_r (10-90%) = $1,8/\omega_n$,
- Sobrepasso percentual M_p



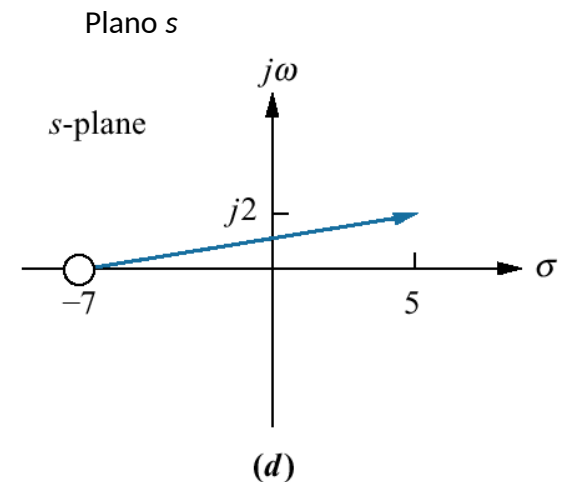
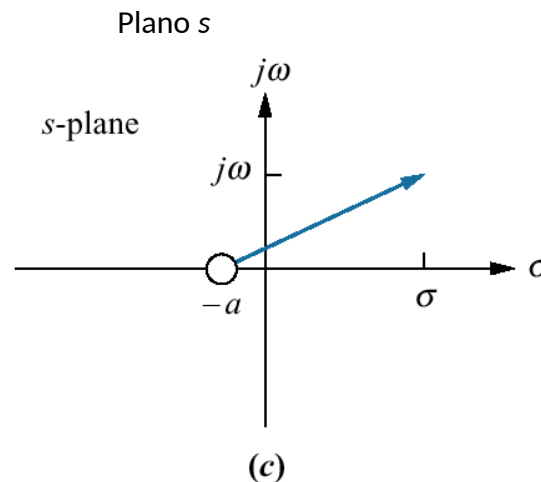
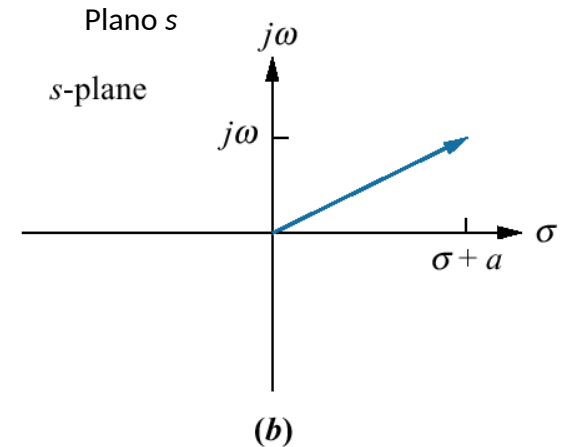
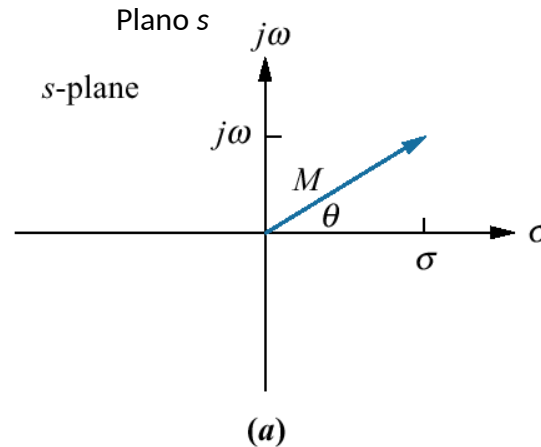
Representação vetorial de números complexos:

a. $s = \sigma + j\omega$;

b. $(s + a)$;

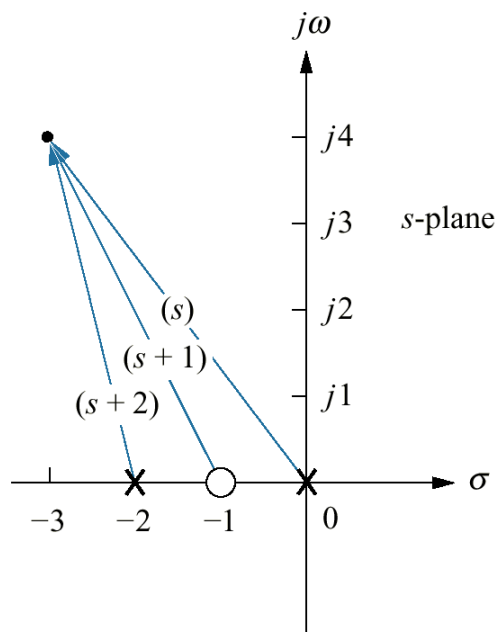
c. representação alternativa de $(s + a)$;

d. $(s + 7)|_{s \rightarrow 5 + j2}$



Representação Vetorial de Números Complexos

$$F(s) = \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)}$$

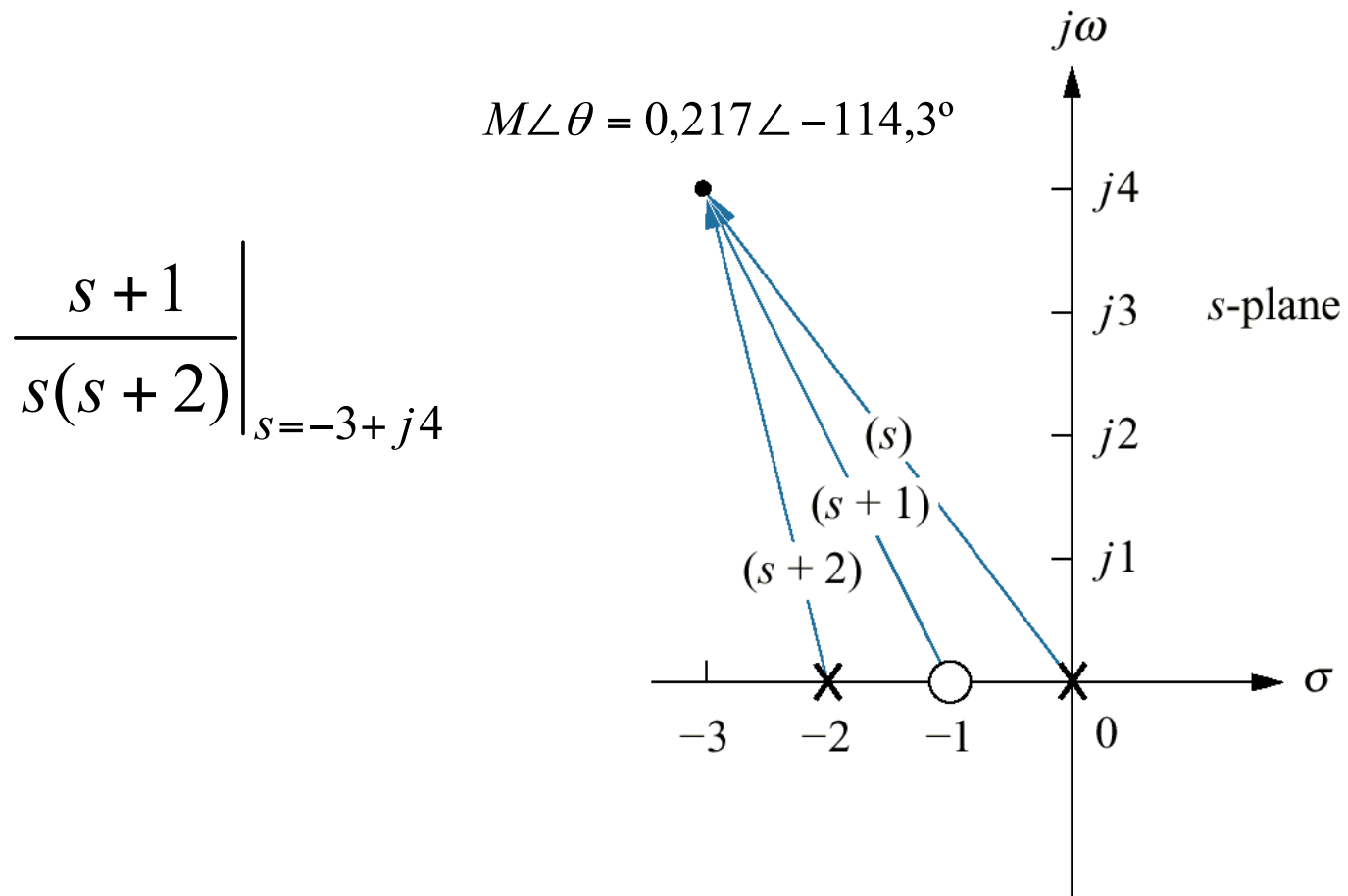


$$M = \frac{\prod \text{zero lengths}}{\prod \text{pole lengths}} = \frac{\prod_{i=1}^m |(s + z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(s + p_j)|}$$

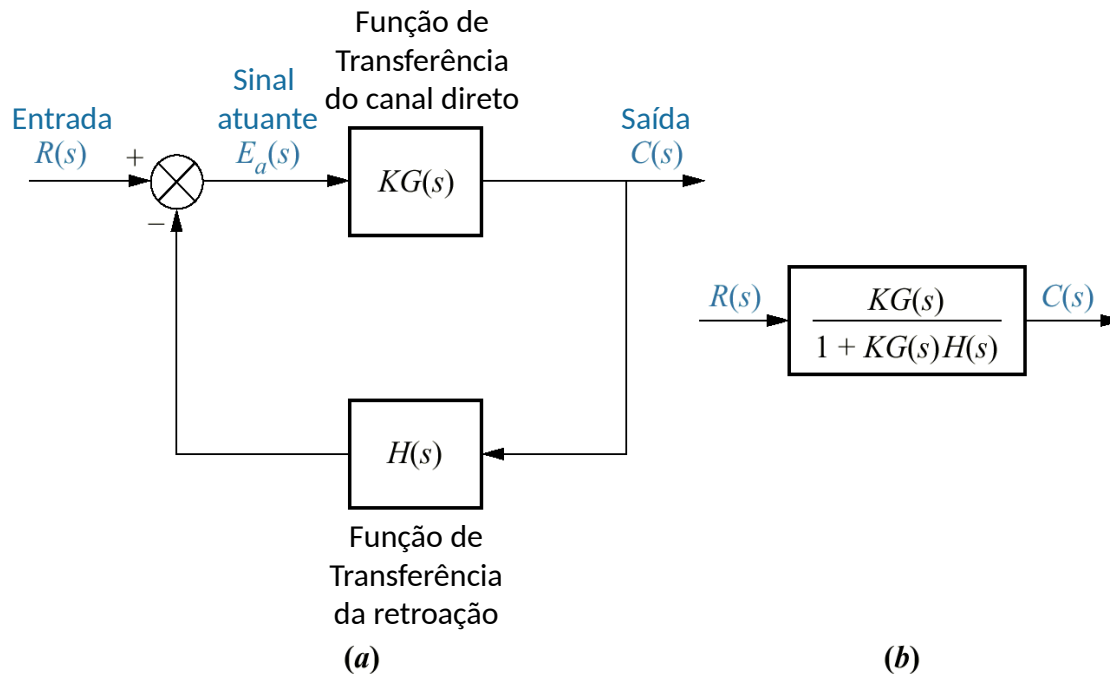
$$\theta = \sum \text{zero angles} - \sum \text{pole angles}$$

$$= \sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j)$$

Função complexa de um vetor



LGR – Sistema em Malha Fechada



Sistema em Malha Fechada

Função de Transferência Equivalente

Quais pontos no plano s podem ser LGR?

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} \quad \Rightarrow \quad \text{Eq. Característica}$$

$$KG(s)H(s) = -1 = 1 \angle (2k + 1)180^\circ \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$|KG(s)H(s)| = 1$$

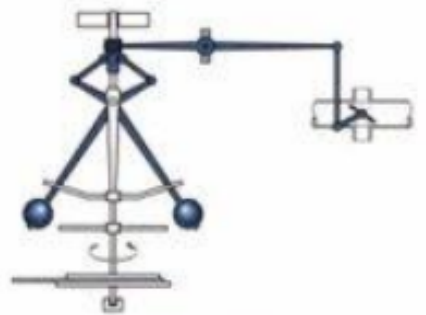
\Rightarrow Condição de Módulo

$$\angle KG(s)H(s) = (2k + 1)180^\circ$$

\Rightarrow Condição de Fase

Controle de Sistemas Dinâmicos

CSD8-Lugar Geométrico das Raízes



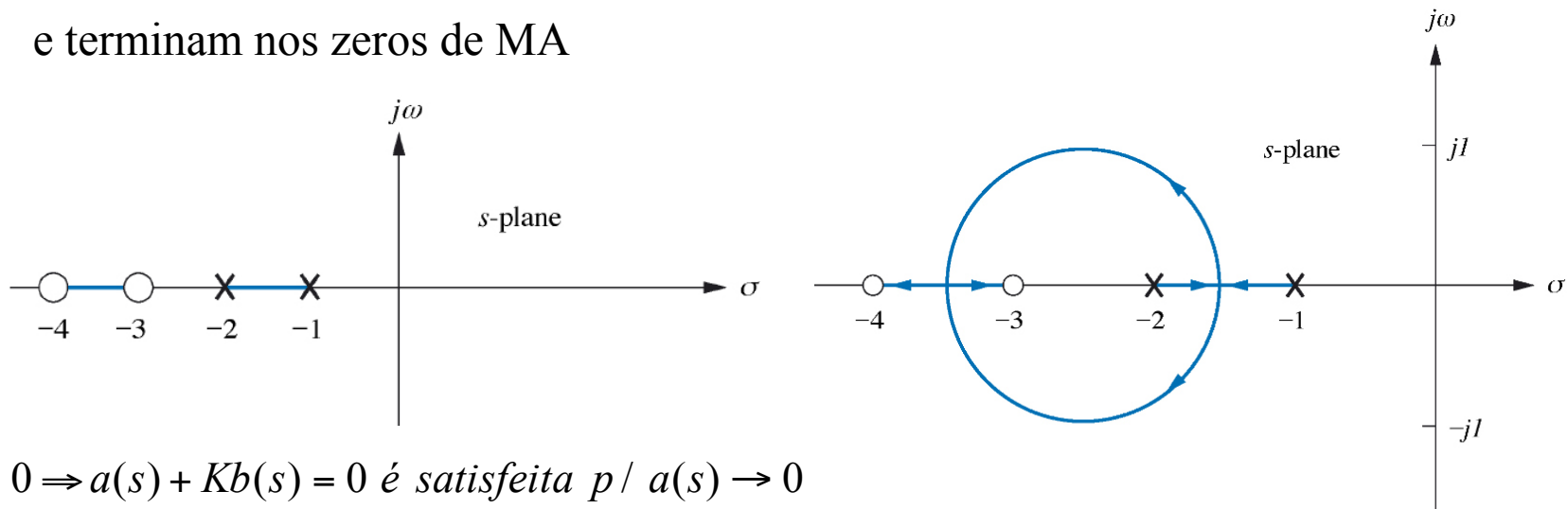
Regras para traçar o LGR

Regras para traçar o LGR

Equação característica em MF :

$$1 + KG(s) = 0 \text{ ou } 1 + K \frac{b(s)}{a(s)} = 0 \Rightarrow LGR \begin{cases} |KG(s)| = 1 \\ \angle KG(s) = 180^\circ + 360^\circ l \end{cases}$$

- Desenhar no plano s os pólos x e zeros o
 - Os segmentos do LGR começam nos pólos e terminam nos zeros de MA



$$K = 0 \Rightarrow a(s) + Kb(s) = 0 \text{ é satisfeita p/ } a(s) \rightarrow 0$$

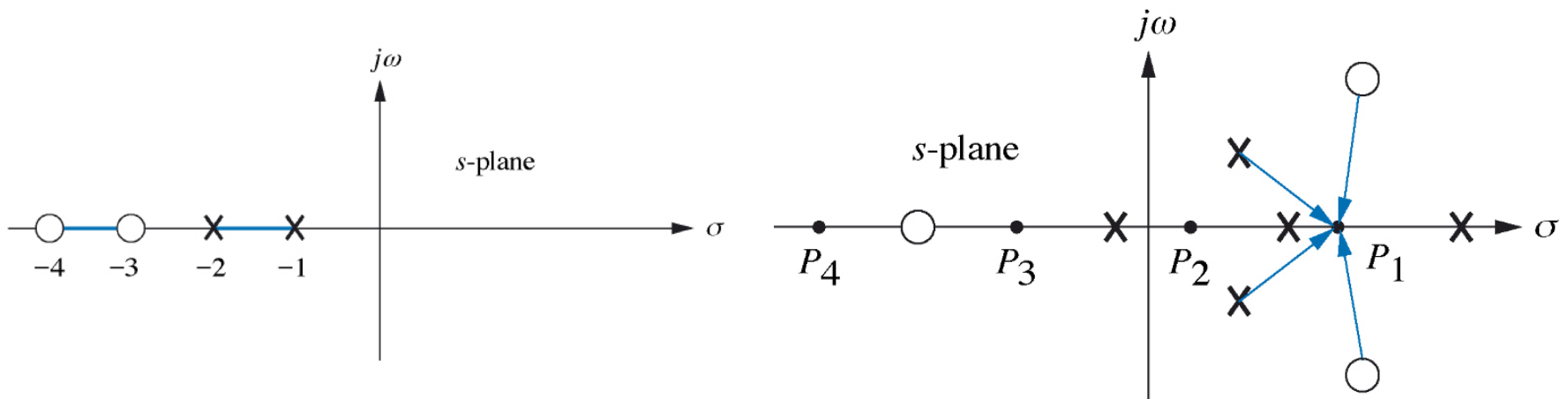
$$K = \infty \Rightarrow a(s) + Kb(s) = 0 \text{ é satisfeita p/ } b(s) \rightarrow 0$$

Regras para traçar o LGR

2. Parte real do LGR:

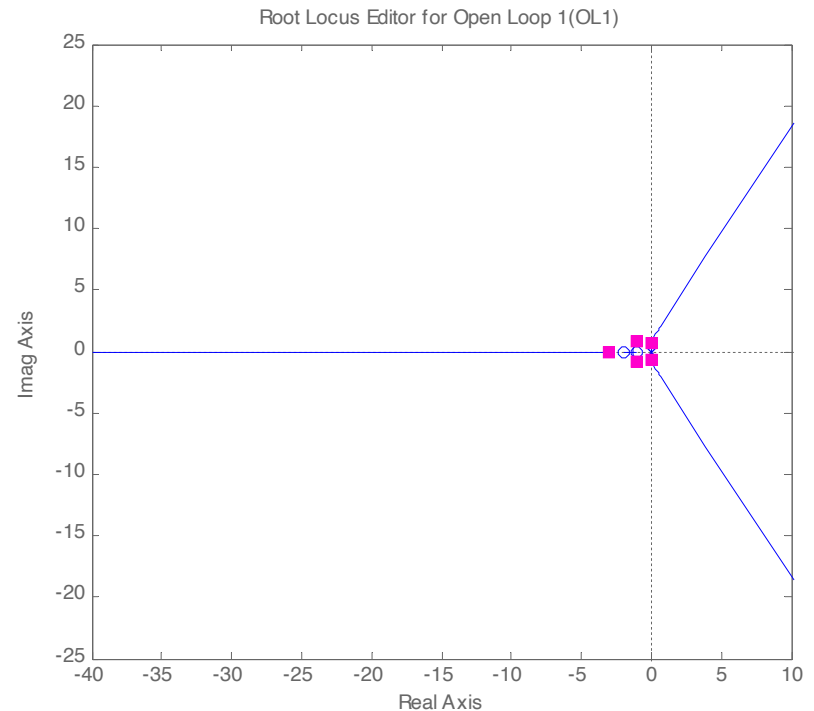
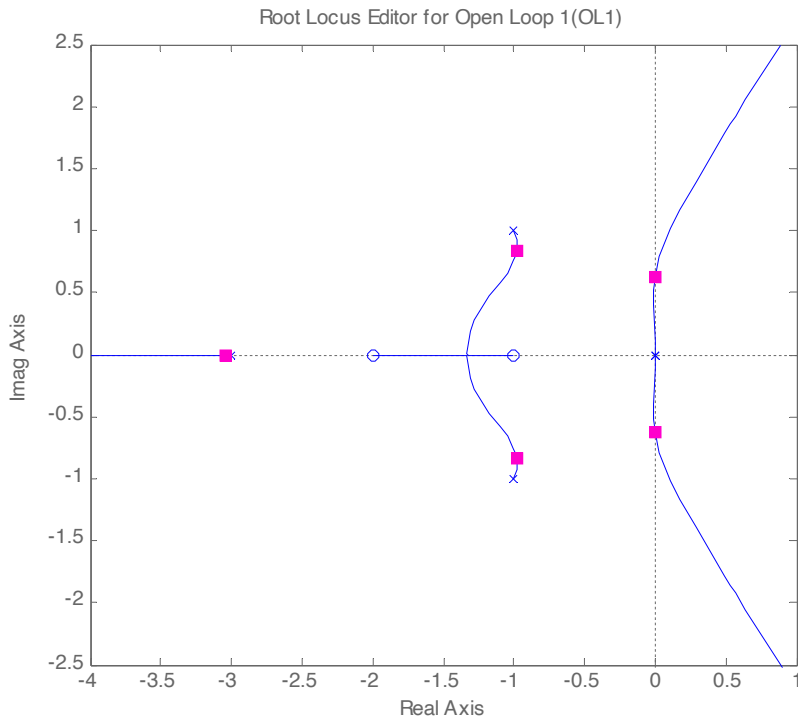
à esquerda de um número ímpar de pólos mais zeros reais

- ângulos de pólos ou zeros complexos conjugados se cancelam (condição de fase)



Regras para traçar o LGR (cont.)

3. Assíntotas para $K \rightarrow \infty$ ($1 + KG(s)=0$)



- De uma posição bem longe da origem:

m zeros cancelam m pólos e restam $n-m$ pólos (assíntotas)

Regras para traçar o LGR (cont.)

3. Assíntotas para $K \rightarrow \infty$ ($1 + KG(s)=0$)

$$G(s) = b(s)/a(s) = -1/K \rightarrow 0$$

Dois casos

a) $G(s) = 0$ se $b(s) = 0$ (ramos terminam nos zeros)

$$\text{b) } 1 + K \frac{b(s)}{a(s)} = 0 \quad 1 + K \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = 0$$

Sistema físico $n > m$ $G(s) \rightarrow 0$ se $s \rightarrow \infty$

$(n - m)$ pólos em $s = \alpha$

- De uma posição bem longe da origem

m zeros cancelam m pólos e restam $n-m$ pólos

Regras para traçar o LGR (cont.)

Para $s_0 = Re^{j\varphi}$ do LGR com R bem grande $(n - m)\phi_l = 180^\circ + 360^\circ l$

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ l}{n - m}$$

Há $(n - m)$ assíntotas radiais com ângulos
 $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (ou $l = 0, 1, 2, \dots, n-m-1$)

por exemplo $n-m = 3 \rightarrow \varphi_{1,2,3} = 60^\circ, 180^\circ e 300^\circ$

Regras para traçar o LGR (cont.)

- Centróide: $s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n = (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)$

Soma dos pólos $a_1 = \sum p_j$, e *soma dos zeros* $b_1 = \sum z_i$;

$$1 + K \frac{b(s)}{a(s)} = 0 \Rightarrow s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n + K(s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m) = 0$$

se $m < n - 1 \rightarrow \sum p_j$ independe de K

\rightarrow é a soma dos pólos (tanto em MA como em MF!)

r_j – raízes da eq. Característica: pólos $\rightarrow \infty$ +
pólos \rightarrow zeros

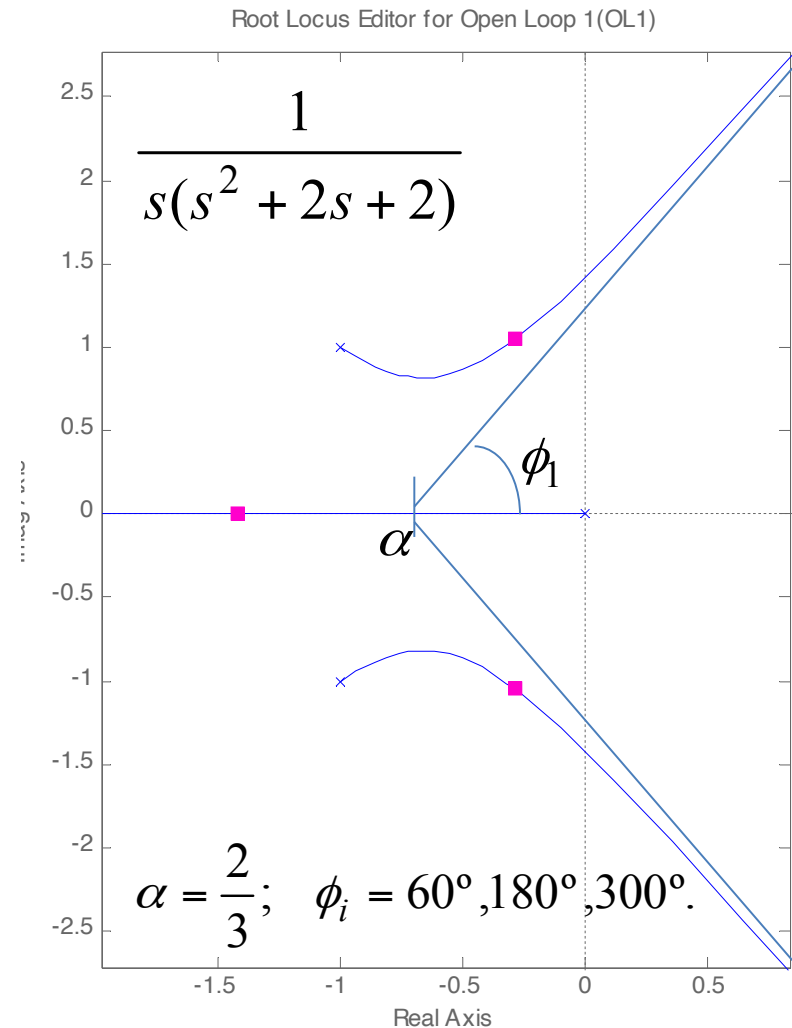
Regras para traçar o LGR (cont.)

r_j – raízes da eq. Característica

alguns pólos $\rightarrow \infty$; os demais pólos \rightarrow zeros

$$\sum_{MF} r_j = (n - m)\alpha + \sum_{MA} z_i = \sum_{MA} p_j$$

$$\text{Centróide } \alpha = \frac{\sum p_j - \sum z_i}{n - m}$$



Regras para traçar o LGR (cont.)

4 - Ângulos de chegada (o) e partida (x)

Ponto bem próximo ao pólo:

$$\sum \psi_i - \sum \phi_j = 180^\circ + 360^\circ l$$
$$\phi_{part} = \sum \psi_i - \sum_{j \neq part} \phi_j - 180^\circ - 360^\circ l$$

onde $\sum \psi_i \rightarrow$ somatório dos ângulos dos zeros
 $\sum_{j \neq part} \phi_j \rightarrow$ somatório dos ângulos dos demais pólos

Ângulo de partida, de q pólos:

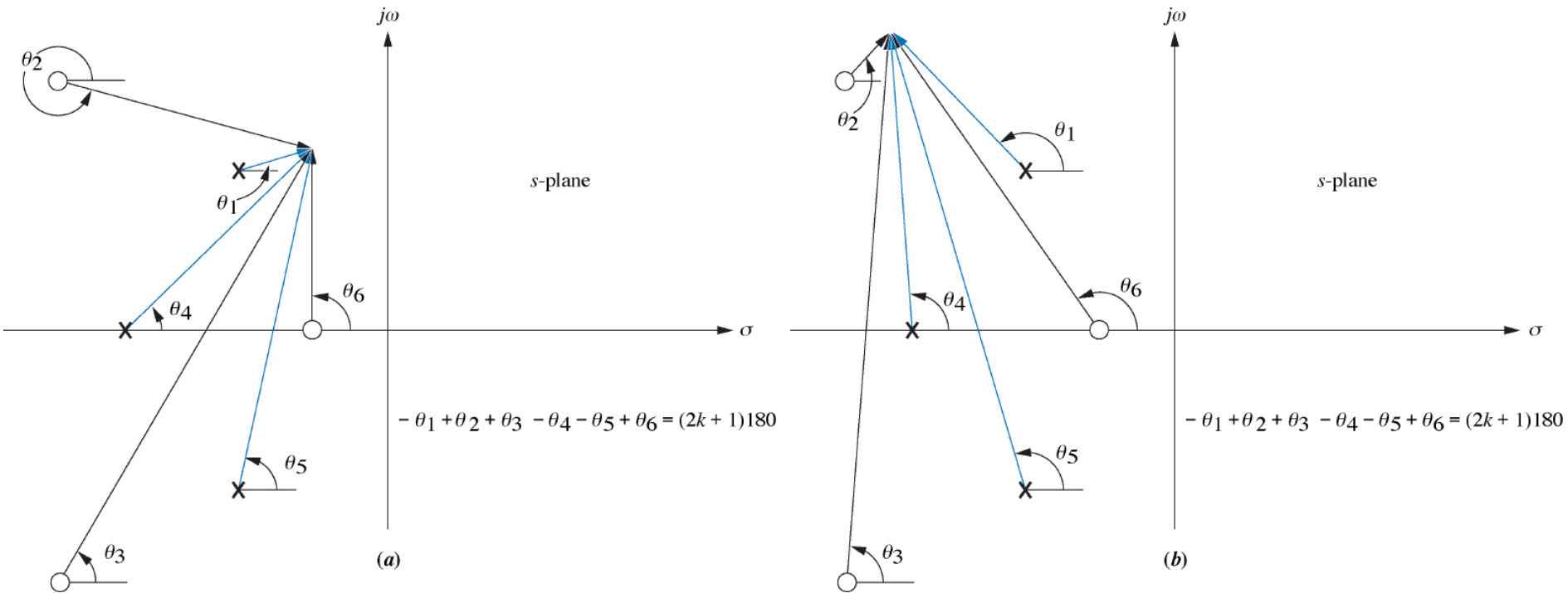
$$q\phi_{part} = \sum \psi_i - \sum_{j \neq part} \phi_j - 180^\circ - 360^\circ l$$

Ângulo de chegada, em q zeros:

$$q\psi_{cheg} = \sum \phi_j - \sum_{i \neq cheg} \psi_i + 180^\circ + 360^\circ l$$

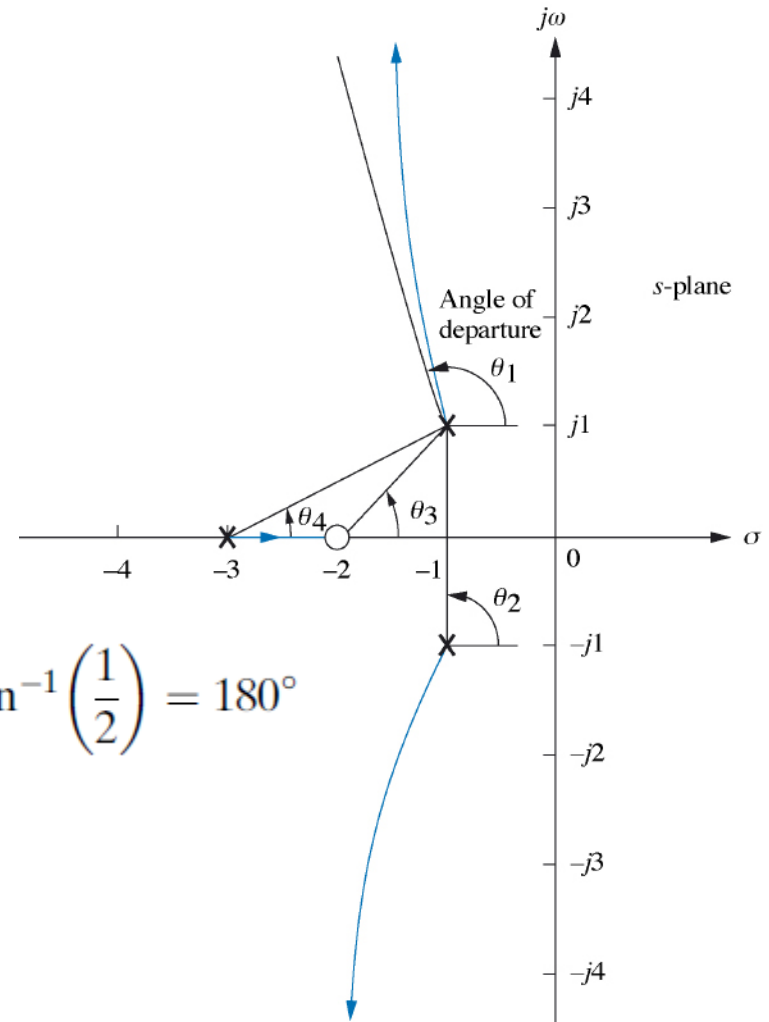
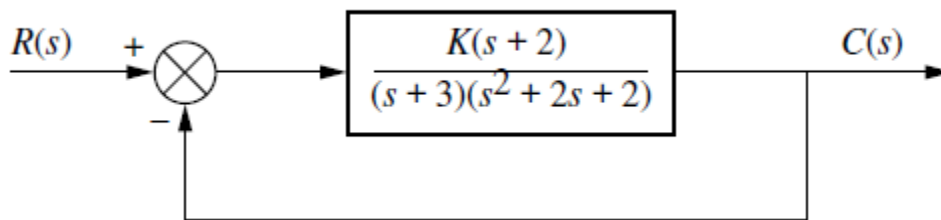
Regras para traçar o LGR (cont.)

Utilizar pontos de teste “bem” próximo aos zeros (o) e aos pólos (x)



Regras para traçar o LGR (cont.)

Ex: Ângulos de partida (x)



$$-\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 = -\theta_1 - 90^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 180^\circ$$

$$\theta = -251.6^\circ = 108.4^\circ$$

Regras LGR – Interseção com $j\omega$

5 – Interseção com o eixo imaginário

Critério de Routh ($s = j\omega$)

$$\text{Ex.: } 1 + \frac{K}{s[(s+4)^2 + 16]} = 0$$

$$\Rightarrow s^3 + 8s^2 + 32s + K = 0$$

Arranjo de Routh:

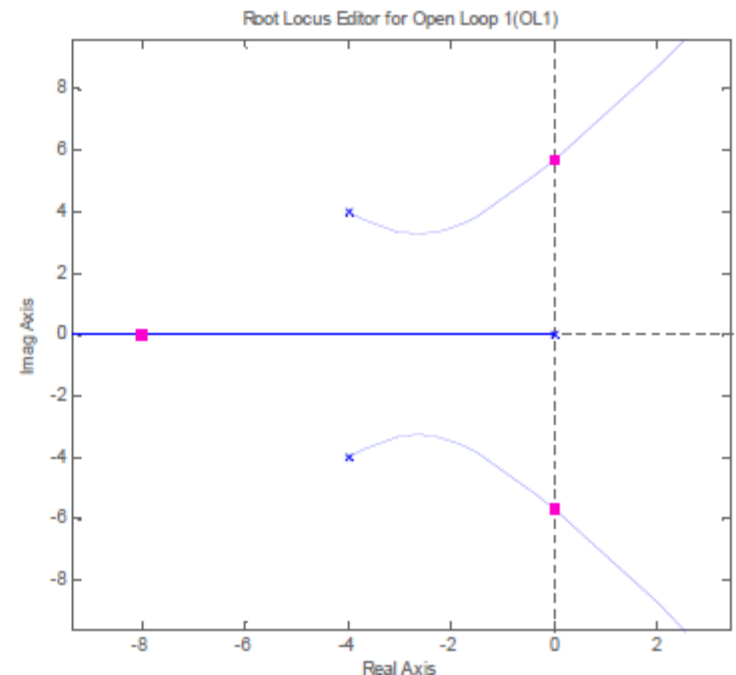
s^3	1	32
s^2	8	K
s	$\frac{8.32 - K}{8}$	
s^0	K	

$$\rightarrow 0 < K < 256 \quad K=256 \rightarrow s = j\omega_0$$

$$\Rightarrow (j\omega_0)^3 + 8(j\omega_0)^2 + 32(j\omega_0) + 256 = 0$$

Resolvendo para a parte real e imaginária:

$$\begin{cases} -8\omega_0^2 + 256 = 0 \\ -\omega_0^3 + 32\omega_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_0 = \pm\sqrt{32} = \pm 5.66$$



Regras LGR – Pontos de Ramificação

6 – Pólos múltiplos e seus ângulos de chegada e partida

6-a – Pontos de ramificação

Polinômio de grau >1 pode ter raízes múltiplas. Pólo múltiplo $\rightarrow K_{max}$

$$\Rightarrow \frac{dK}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds} \left(-\frac{1}{G(s)} \right)_{s=s_0} = 0$$

$$G = \frac{b(s)}{a(s)} \Rightarrow b \frac{da}{ds} - a \frac{db}{ds} = 0$$

Obs: $\frac{dK}{ds} = 0$ É condição necessária, porém não suficiente!

Regras LGR

– Ramificação (cont.)

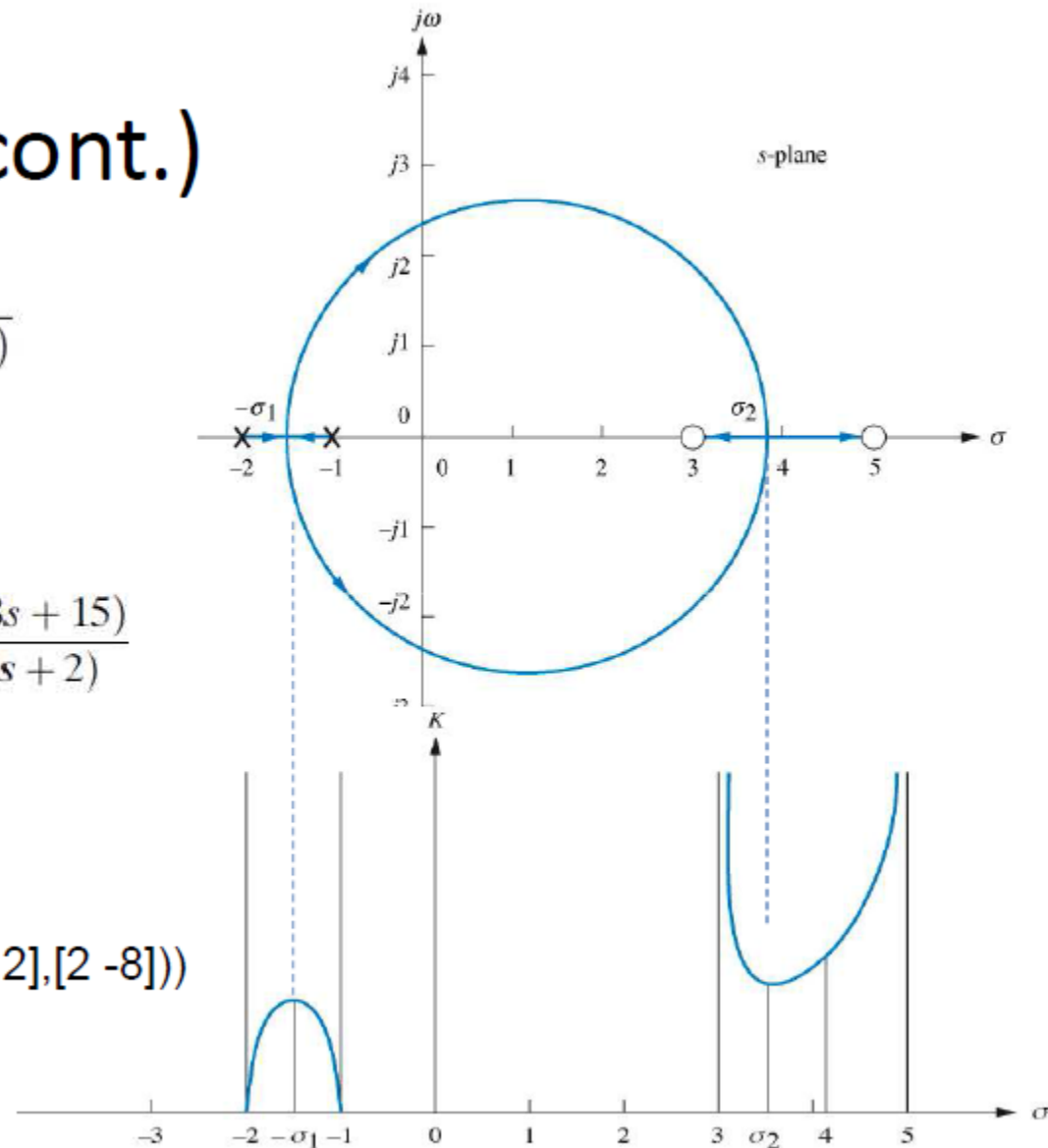
$$K = -\frac{1}{G(s)H(s)} \quad K = -\frac{1}{G(\sigma)H(\sigma)}$$

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s-3)(s-5)}{(s+1)(s+2)} = \frac{K(s^2 - 8s + 15)}{(s^2 + 3s + 2)}$$

$$b \frac{da}{ds} - a \frac{db}{ds} = 0$$

$$\text{roots}(\text{conv}([1 \ -8 \ 15], [2 \ 3]) - \text{conv}([1 \ 3 \ 2], [2 \ -8]))$$

$$= 3.816, -1.453$$



Regras LGR – Pontos de Ramificação

6-b – Ângulos de chegada e partida (pontos de ramificação)
“Princípio da continuidade do LGR”

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \Rightarrow \text{eq. carc. MF} : s^2 + s + K = 0$$

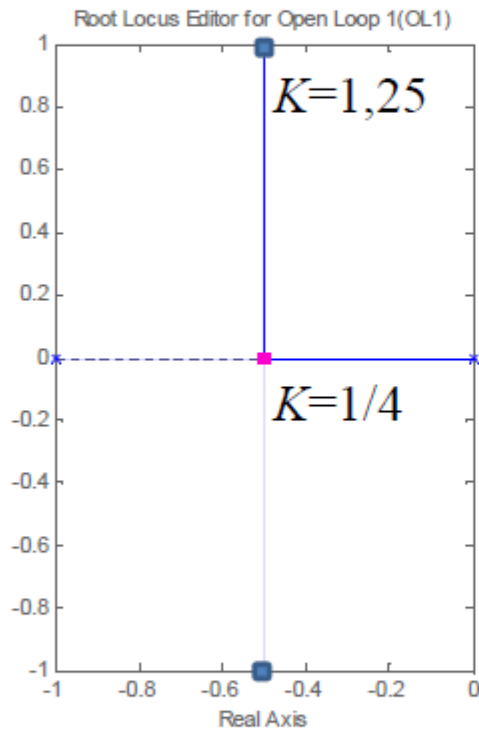
$$G_1(s) = \frac{1}{(s+0.5)^2} \Rightarrow \text{eq. carc. MF} : s^2 + s + \frac{1}{4} + K_1 = 0 \quad \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + K_1 = 0$$

Aplicar regras de ângulo de chegada e partida para o LGR de K_1

- 2 ramos sempre se encontram com um ângulo relativo de 180°
e se separam com uma rotação de $\pm 90^\circ$
- 3 ramos sempre se encontram com um ângulo relativo de 120° e se separam com uma rotação de $\pm 60^\circ$

Regras LGR – Ramificação (cont.)

Exemplo: “continuação” do LGR



$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

\Rightarrow

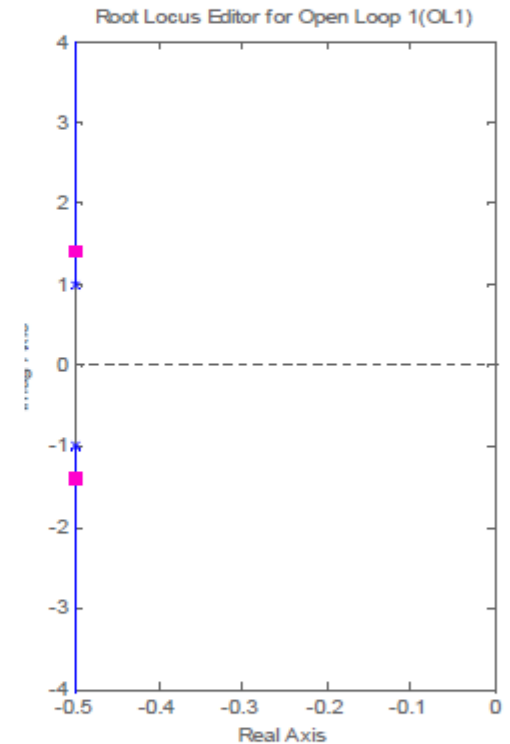
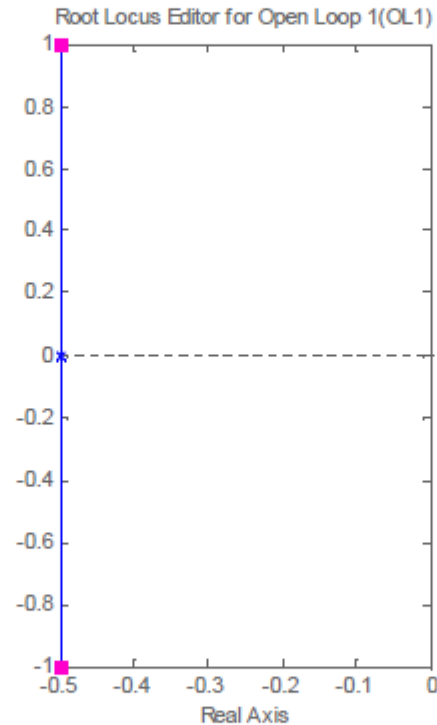
$$G_1(s) = \frac{1}{(s+0,5)^2}$$

$$(K = \frac{1}{4} + K_1)$$

\Rightarrow

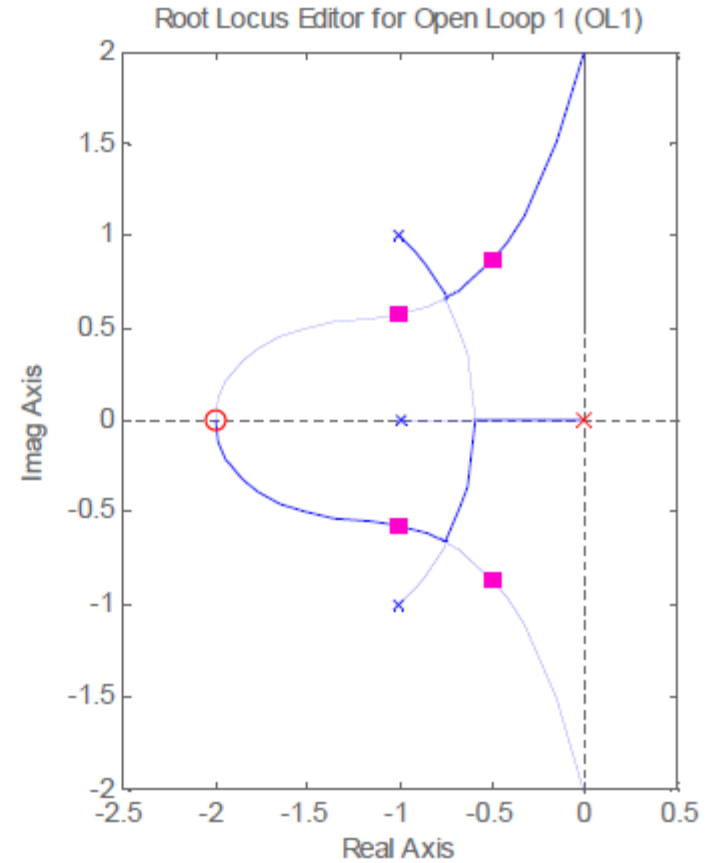
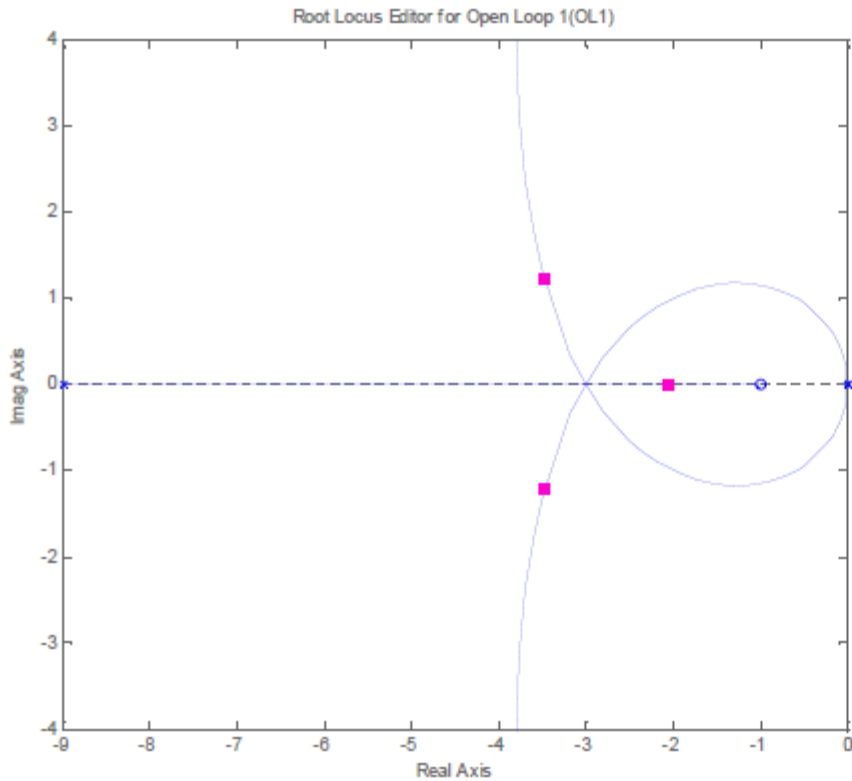
$$G_2(s) = \frac{1}{(s-0,5+j)(s-0,5-j)}$$

$$(K = 1,25 + K_2)$$



Regras LGR – Ramificação (cont.)

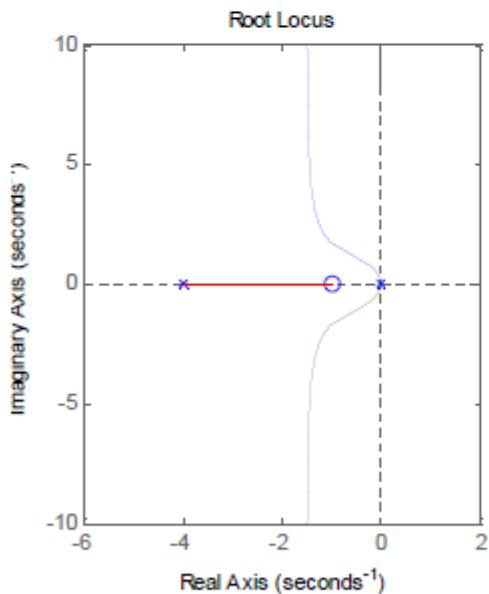
Exemplos:



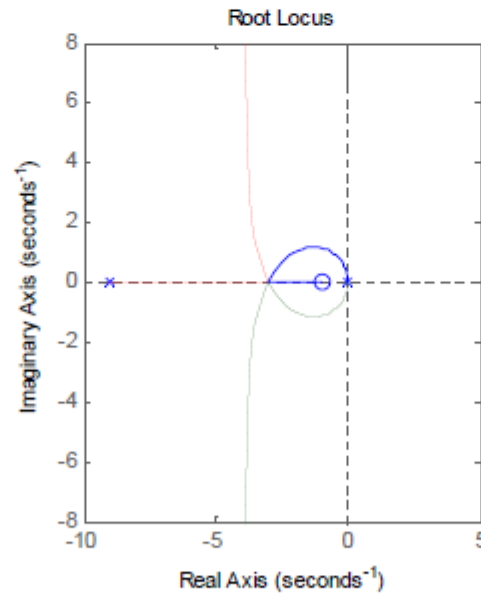
Regras LGR – Ramificação (cont.)

7 – Completar o LGR

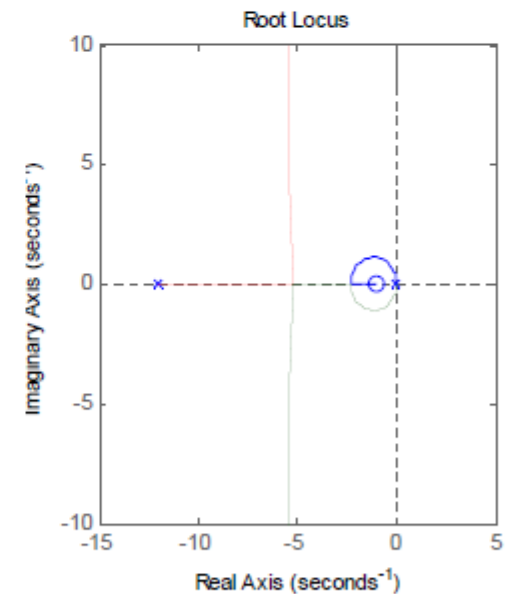
- LGR começa nos pólos e termina nos zeros ou em ∞ .
- De cada pólo parte um ramo.
- O LGR é simétrico em relação ao eixo real.



$$r_{1,2,3} = 0; -1,74 \pm 0,97j$$

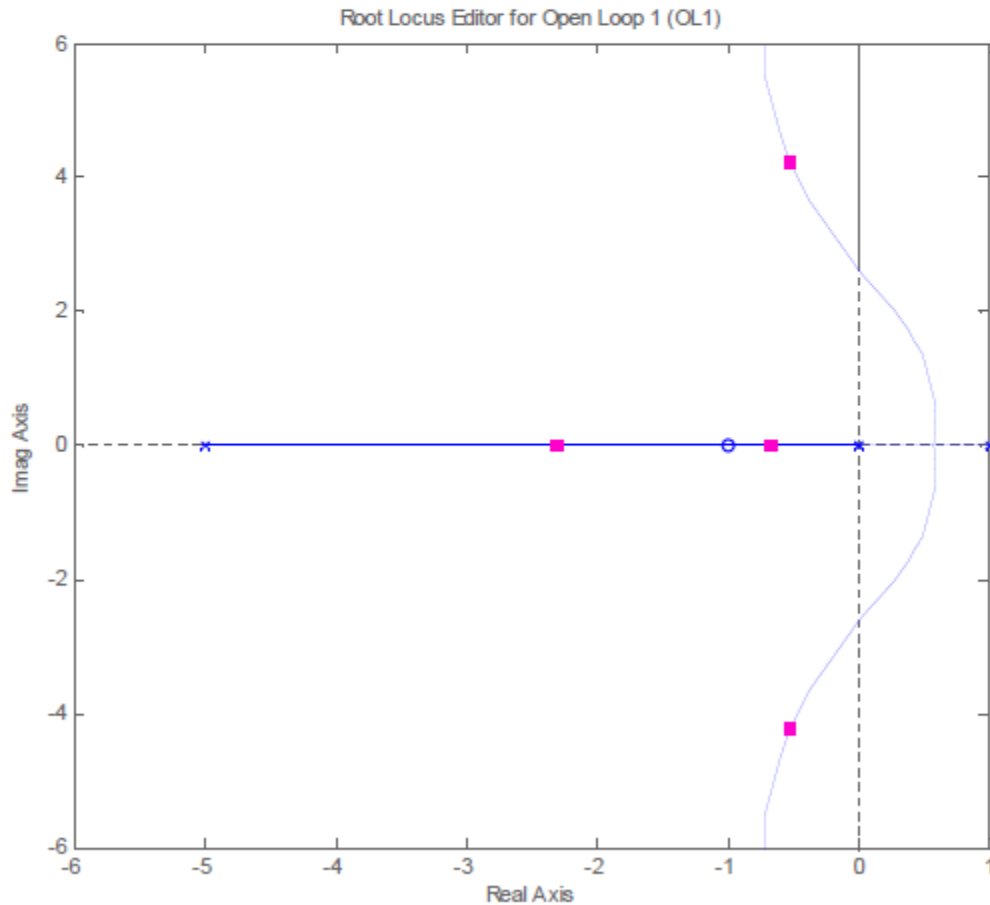
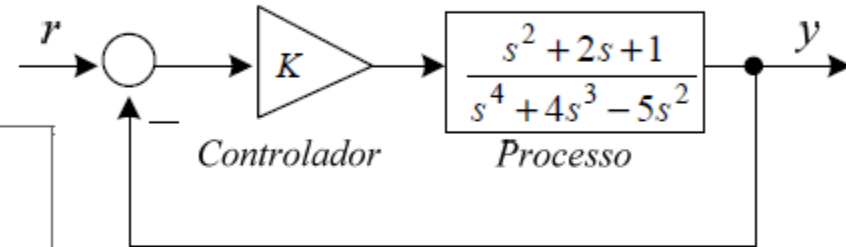


$$r_{1,2,3} = 0; -3; -3$$



$$r_{1,2,3} = 0; -2,31; -5,18$$

Exemplo - aplicação do LGR



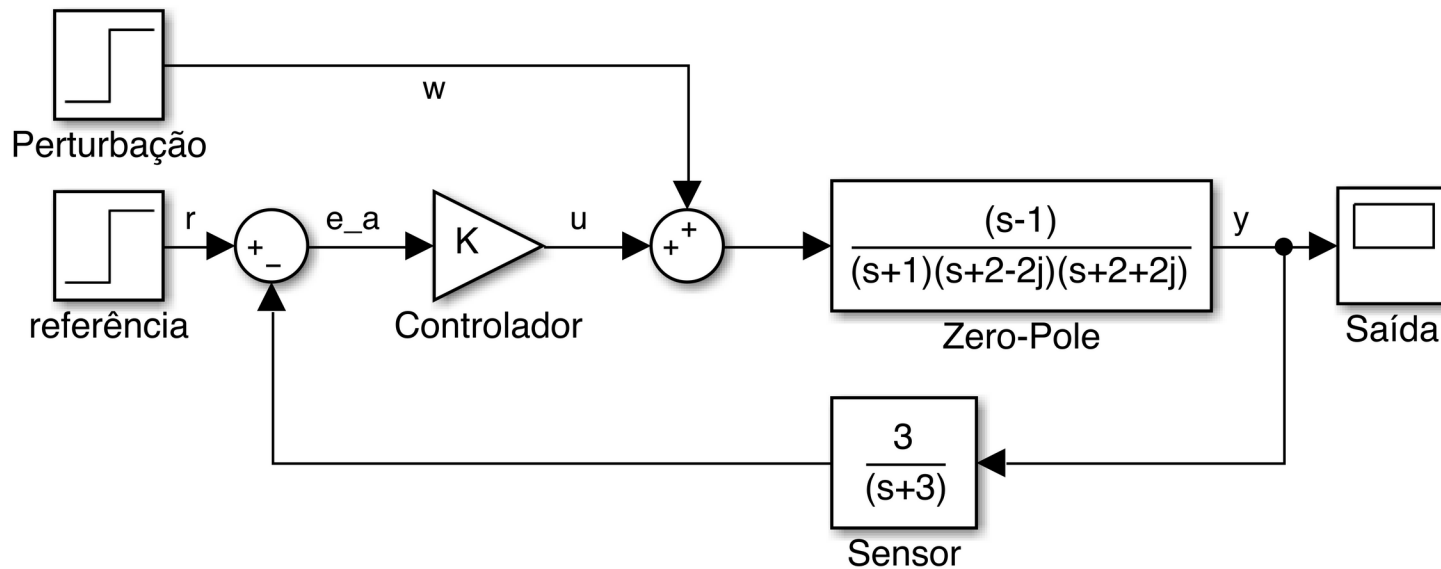
K

- O aumento do ganho estabiliza o sistema (instável em MA).
- Ganho crítico (Routh)
- Estabilidade relativa ($s-\sigma$)
- Maior ζ possível?

Exercício Extra 4

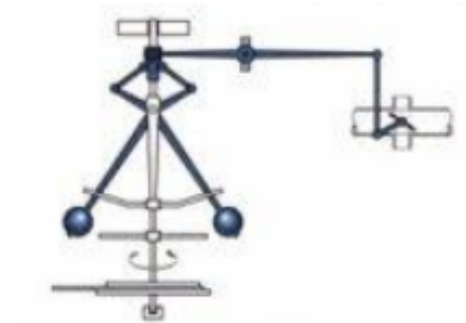
Apresentando os cálculos relativos à aplicação das regras 1) a 7), esboce o LGR do seguinte sistema em malha fechada, em função do ganho $-\infty < K < \infty$.

Para os ganhos que permitem a operação estável, sugira, justificando, um valor adequado de K .



Controle de Sistemas Dinâmicos

CSD8-Lugar Geométrico das Raízes



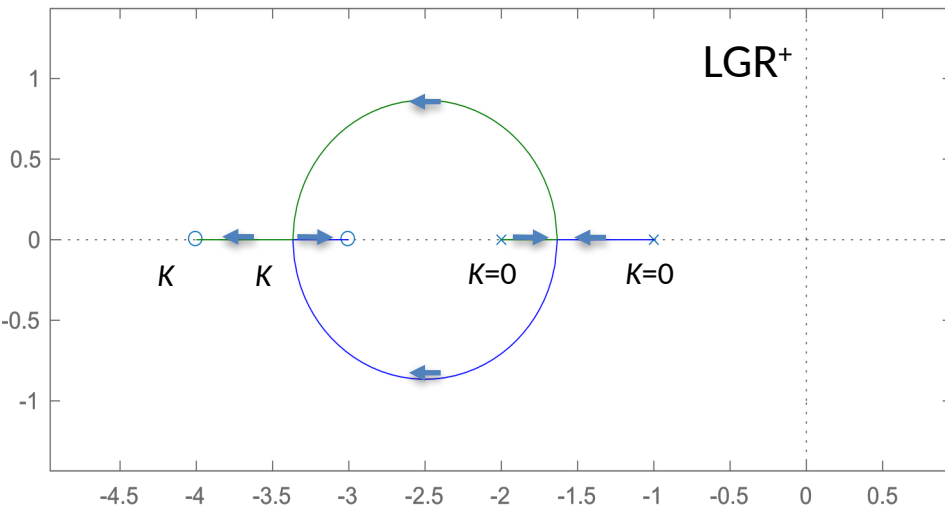
LGR–K<0 ou Fase Não Mínima

LGR p/ K<0: LGR-

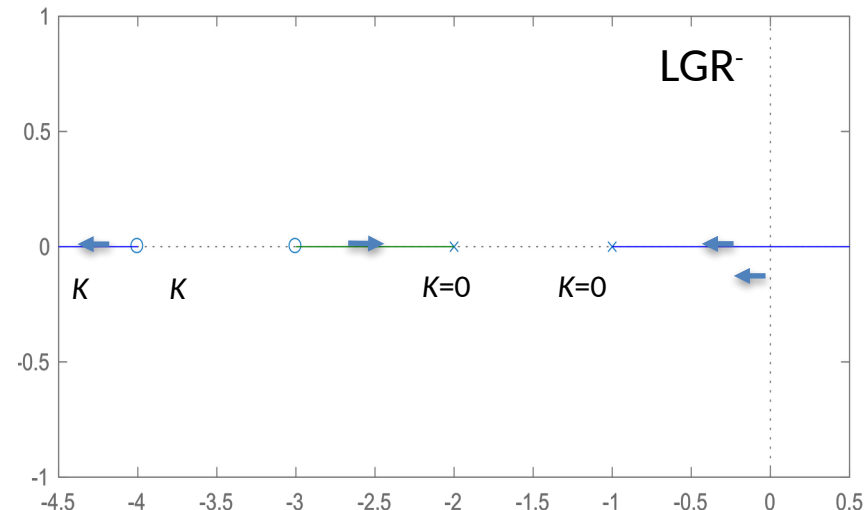
$$1 + KG(s) = 0 \text{ ou } 1 + K \frac{b(s)}{a(s)} = 0 \Rightarrow LGR \begin{cases} |KG(s)| = 1 \\ \angle KG(s) = 180^\circ + 360^\circ l \end{cases}$$

Se $K < 0$, $|K|/180^\circ \rightarrow$ Condição de Fase $\underline{|K|/G(s) = 0^\circ + 360^\circ l}$

Root Locus

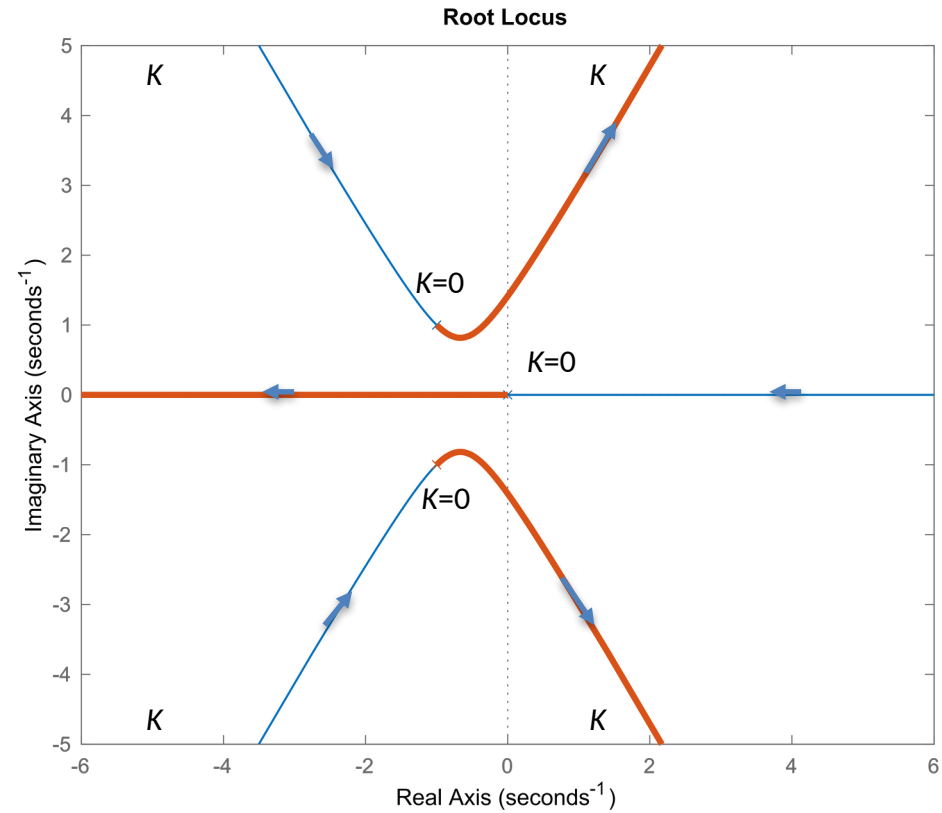
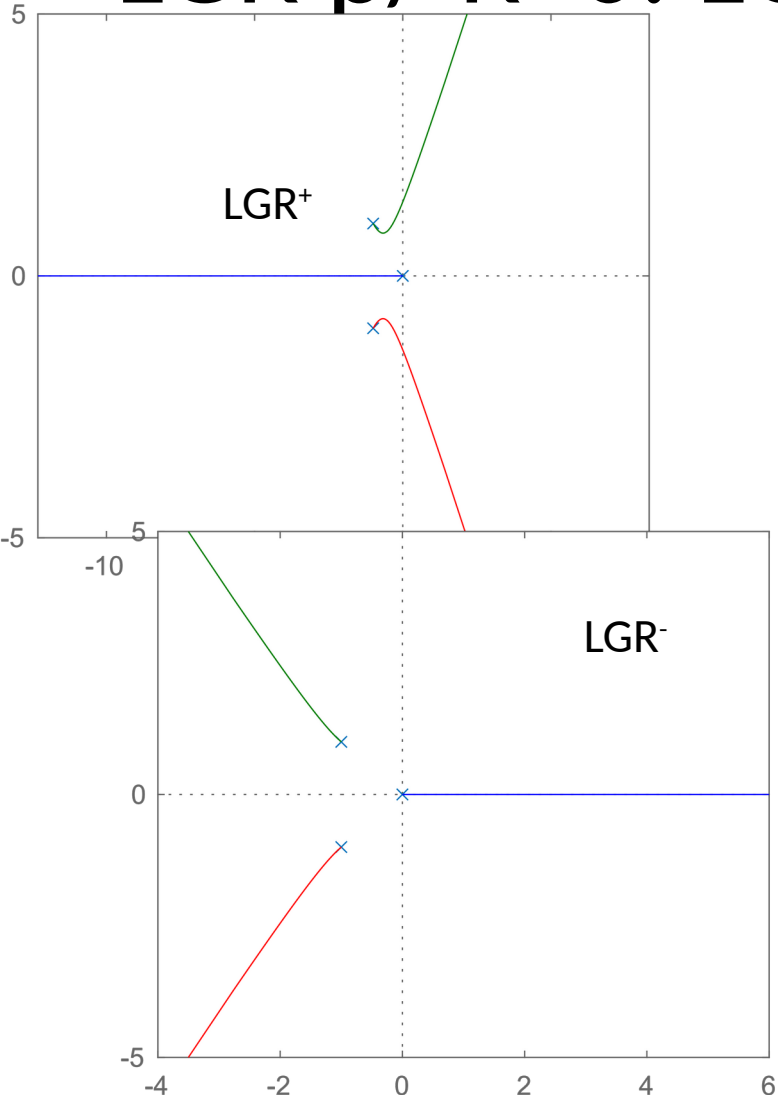


Root Locus



LGR p/ K<0: LGR⁻

Condição de Fase $|K|/G(s) = 0^\circ + 360^\circ l$

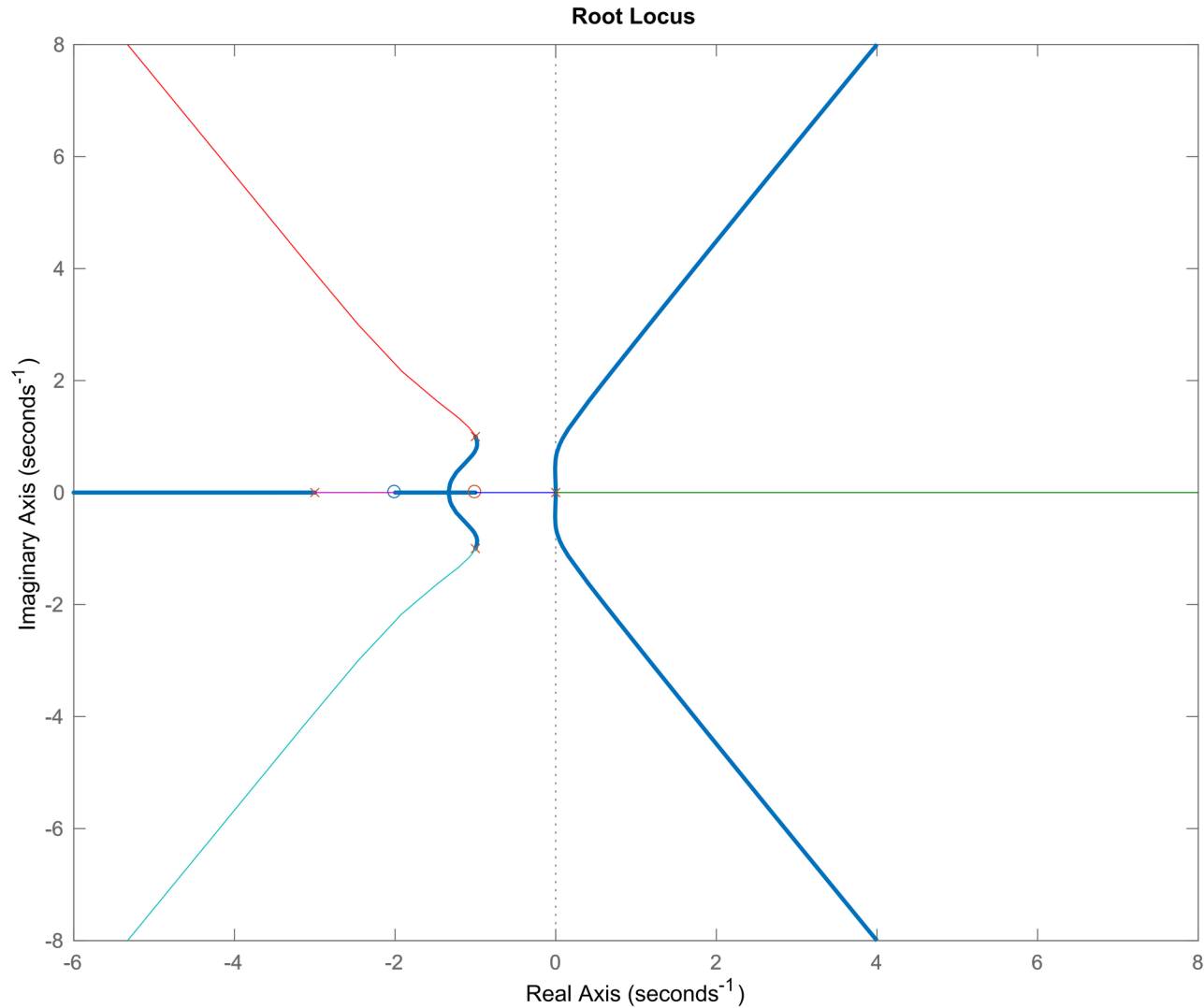


Sentido da seta: K crescente, de $-\infty$ a $+\infty$

LGR p/ K<0: LGR⁻

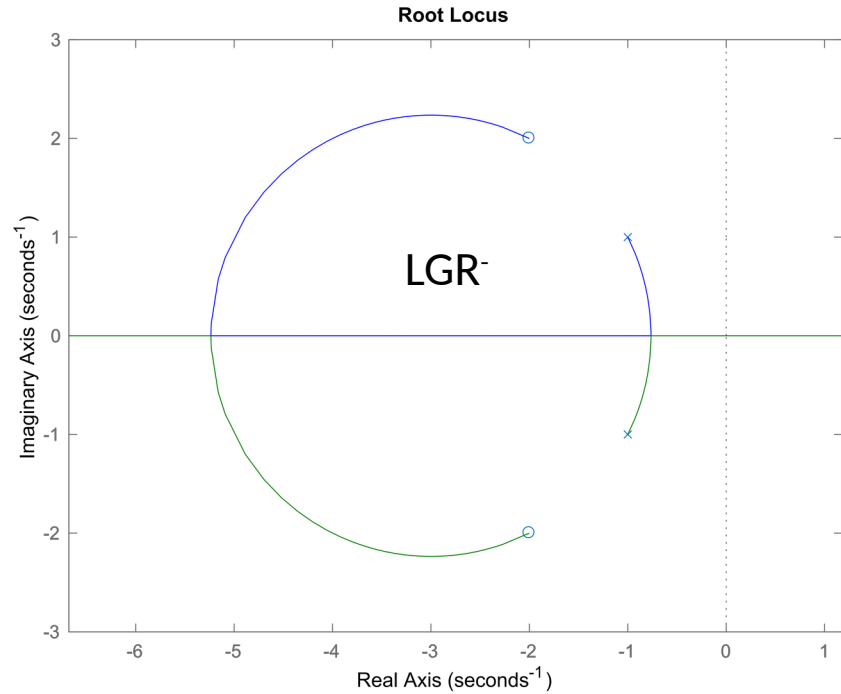
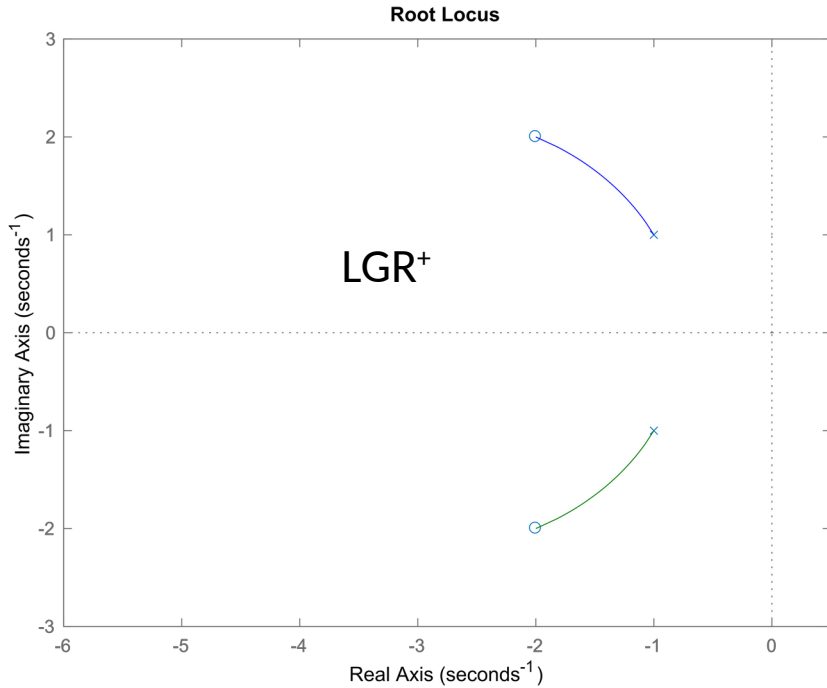
Condição de Fase

$$|K|/G(s) = 0^\circ + 360^\circ l$$



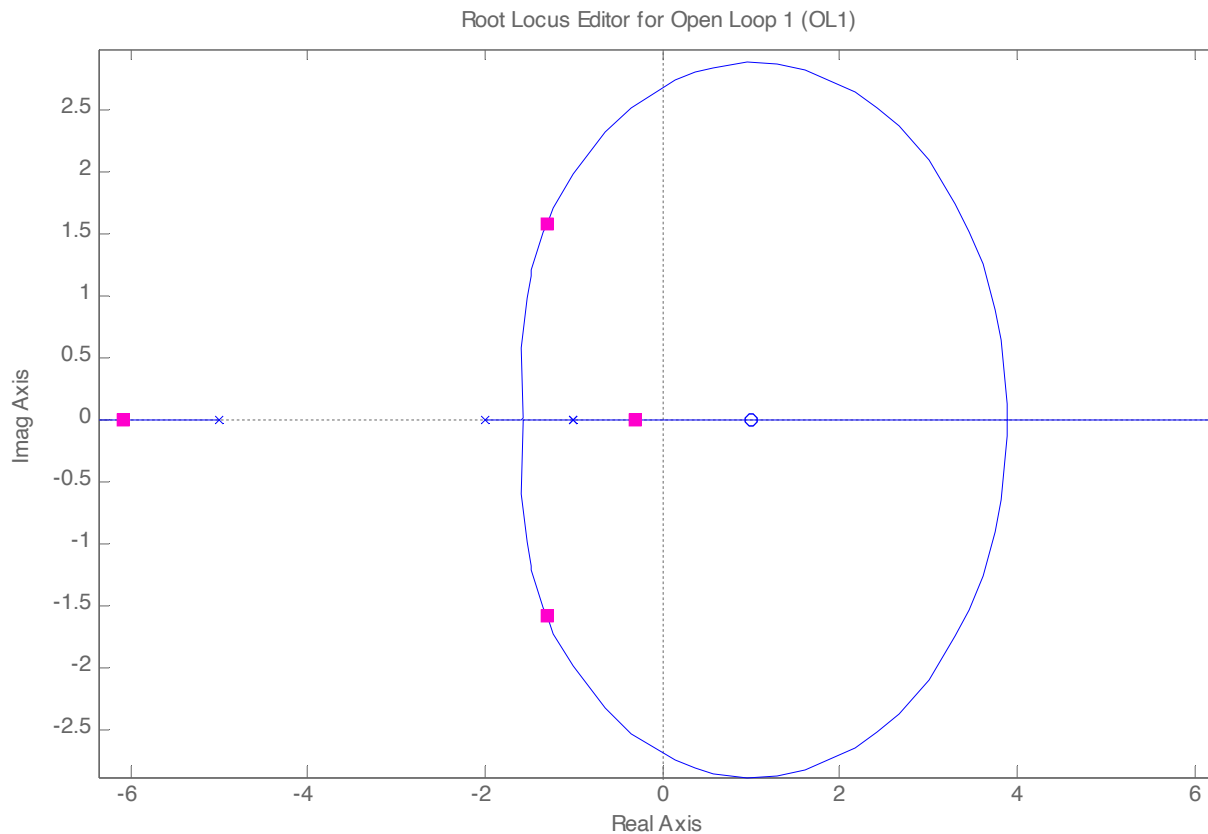
LGR p/ K<0: LGR⁻

Condição de Fase $|K|/G(s) = 0^\circ + 360^\circ l$



LGR p/ ganho negativo

```
>> g=zpk([1 1],[-1 -1 -2 -5],1);  
>> rlocus(-g)
```



LGR p/ Sistemas de Fase não-mínima

- Pólo ou zero no SPD

$$\text{Ex. } G(s) = \frac{K(1 - T_a s)}{s(Ts + 1)}$$

$$\langle G(s) \rangle = \left\langle \frac{-K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)} \right\rangle = \left\langle \frac{K(T_a s - 1)}{s(Ts + 1)} \right\rangle + 180^\circ$$

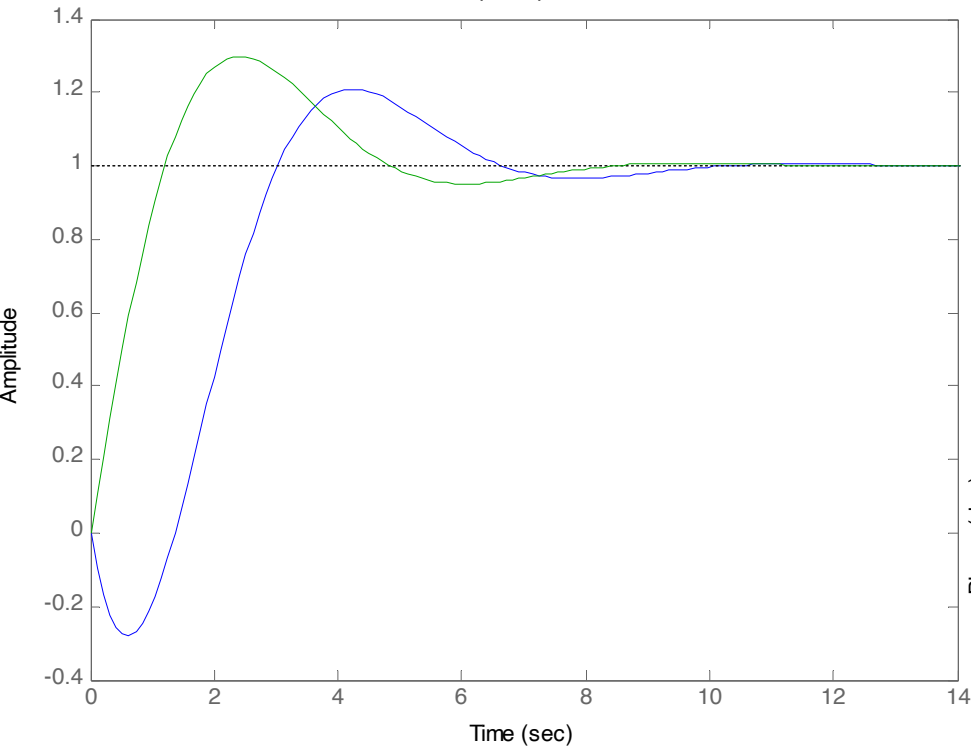
$$\text{Condição LGR Fase: } \langle G(s) \rangle = 0^\circ + 360^\circ l$$

Ex. Sistema de Fase não-mínima x Fase mínima

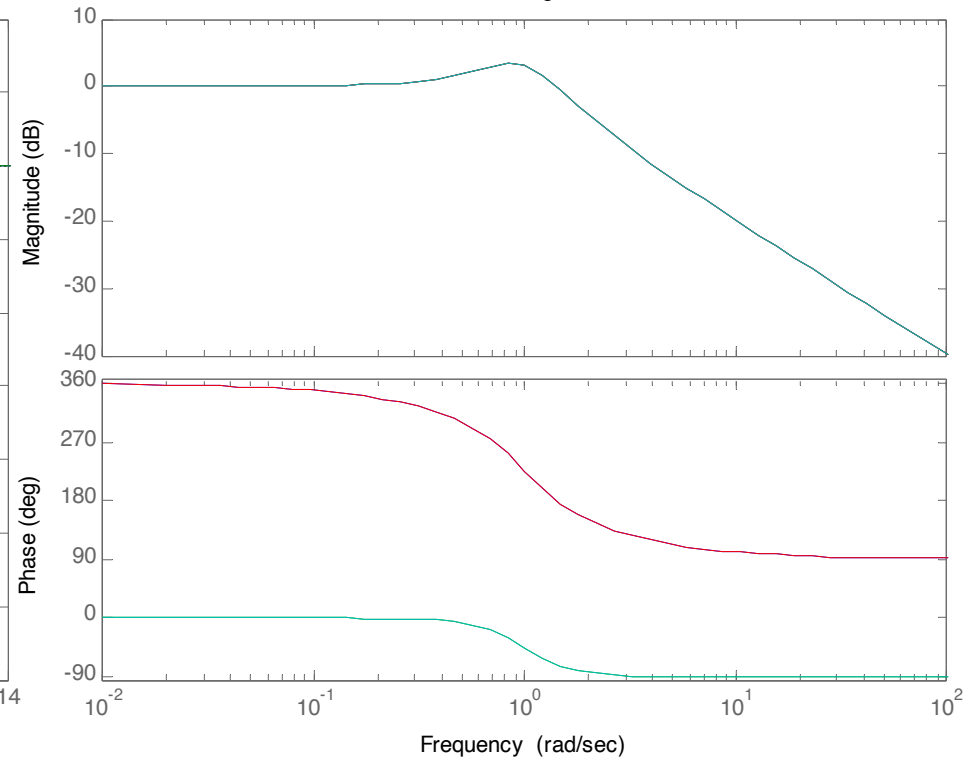
$$G(s) = \frac{1-s}{s^2+s+1}$$

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

Step Response



Bode Diagram



```
g=tf([-1 1],[1 1 1]);f=tf([1 1],[1 1 1]);step(g,f)
```

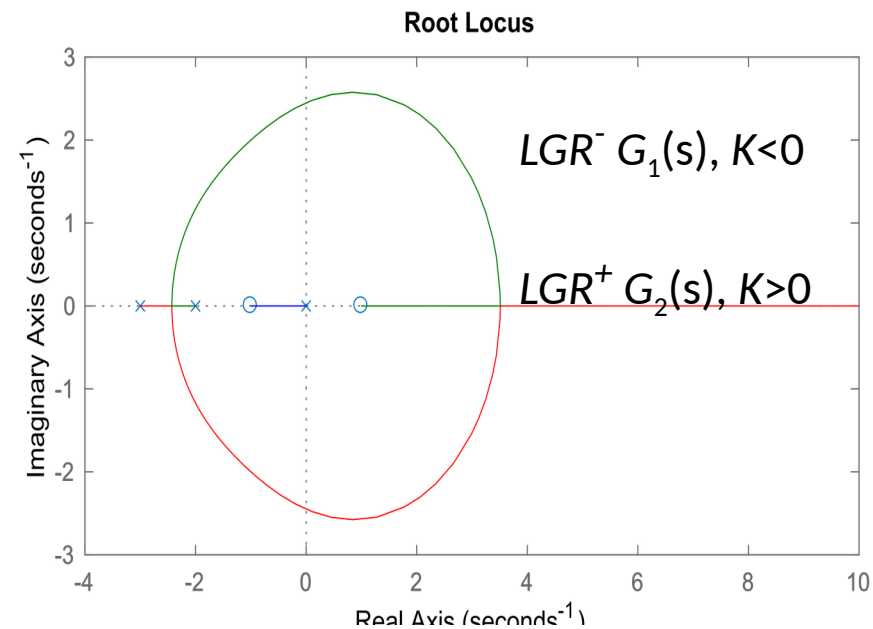
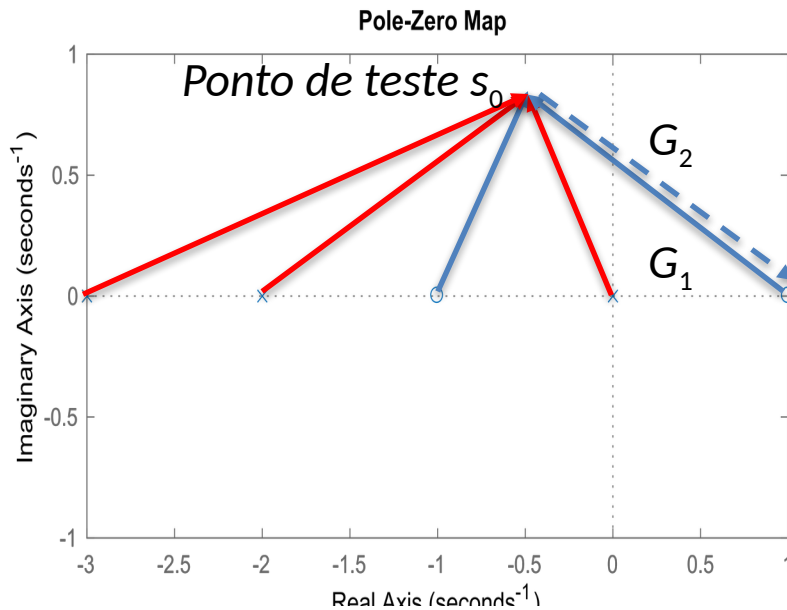
Condições de Fase: 180° x 0°

$$G_1(s) = \frac{K(s+1)(s-1)}{s(s+2)(s+3)} \quad K > 0 \rightarrow LGR \ 180^\circ \quad (\text{Fase não-mínima})$$

$$G_2(s) = \frac{K(s+1)(1-s)}{s(s+2)(s+3)} \quad K > 0 \rightarrow LGR \ 0^\circ \quad (\text{Fase não-mínima})$$

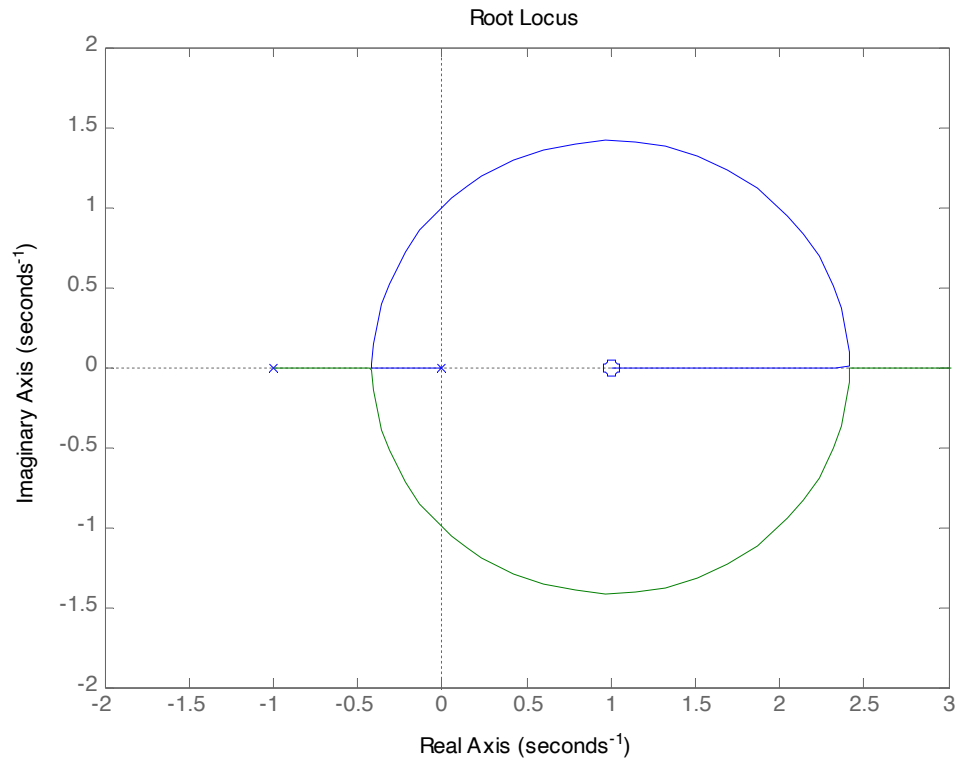
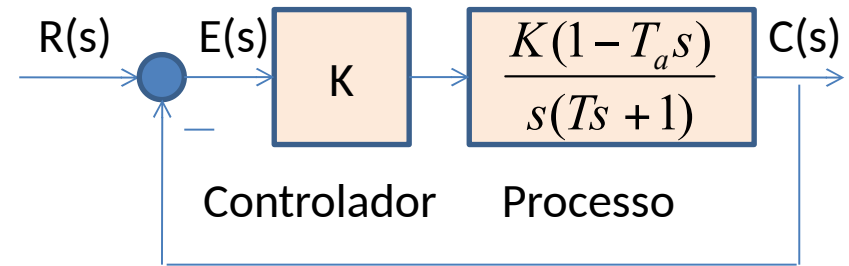
$$G_3(s) = \frac{K(1-s)(1-s)}{s(s+2)(s+3)} \quad K > 0 \rightarrow LGR \ 180^\circ \quad (\text{Fase não-mínima})$$

$$G_4(s) = \frac{K(1-s)(1-s)}{s(s+2)(3-s)} \quad K > 0 \rightarrow LGR \ 0^\circ \quad (\text{Fase não-mínima})$$

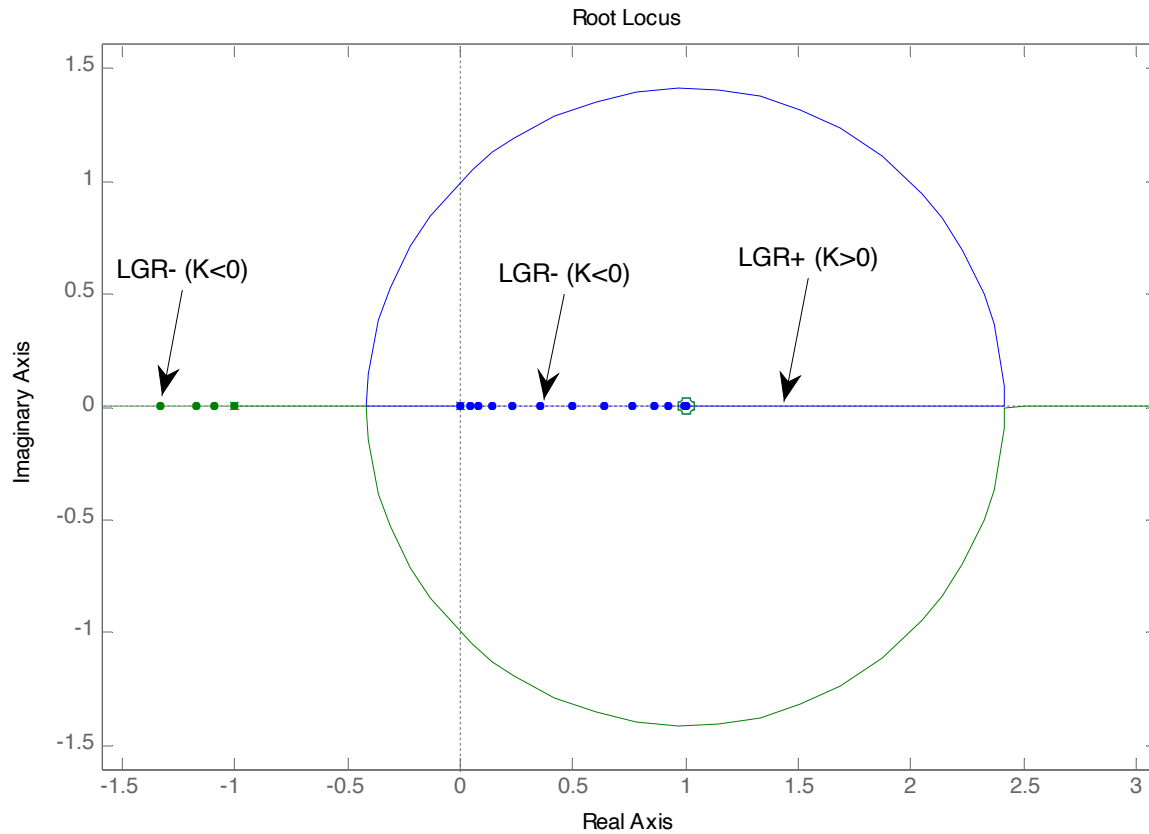
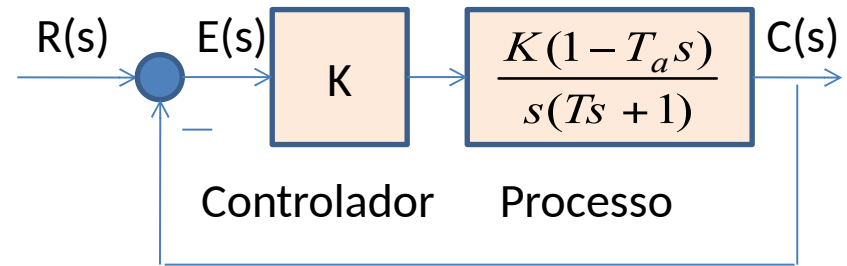


LGR⁺ (K>0)

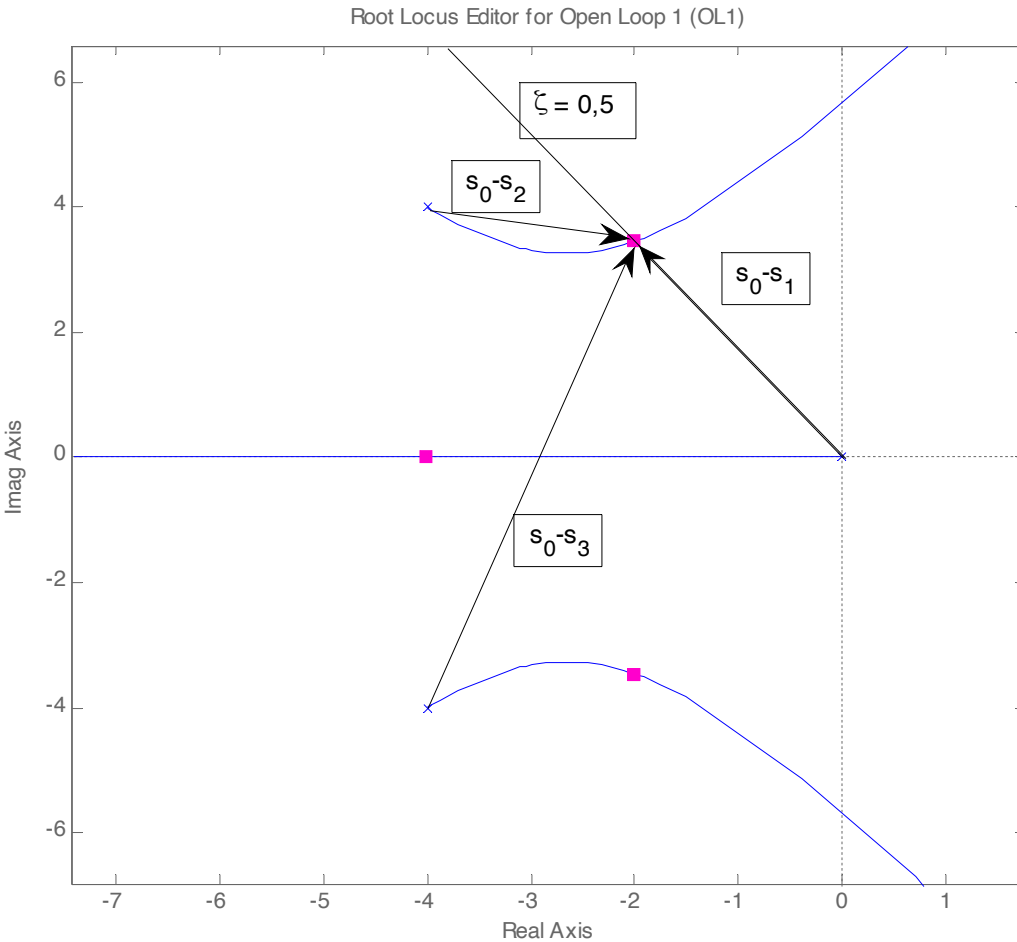
Condição de Fase: Zero-Grau



LGR⁻ (K<0)



Seleção do ganho a partir do LGR

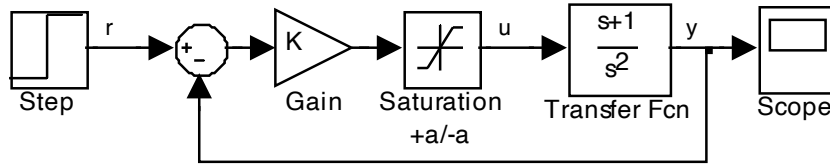


$$G(s) = \frac{1}{s[(s+4)^2 + 16]}$$

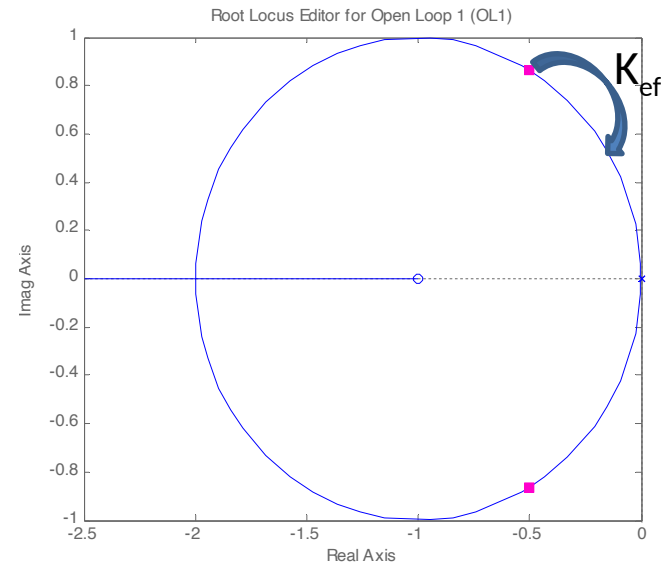
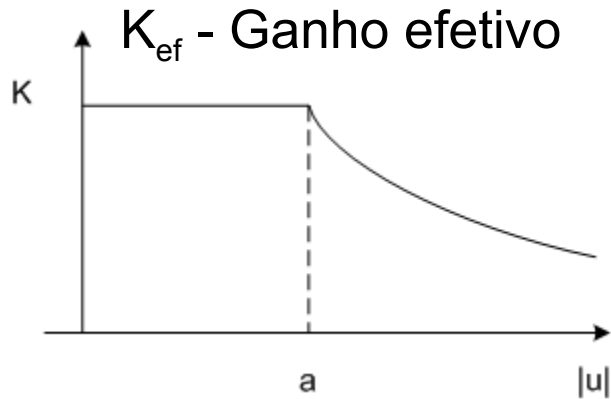
$$K = \frac{1}{|G(s)|} = |s_0 - s_1| |s_0 - s_2| |s_0 - s_3|$$

$$K = 4.0 * 2.1 * 7.7 = 65$$

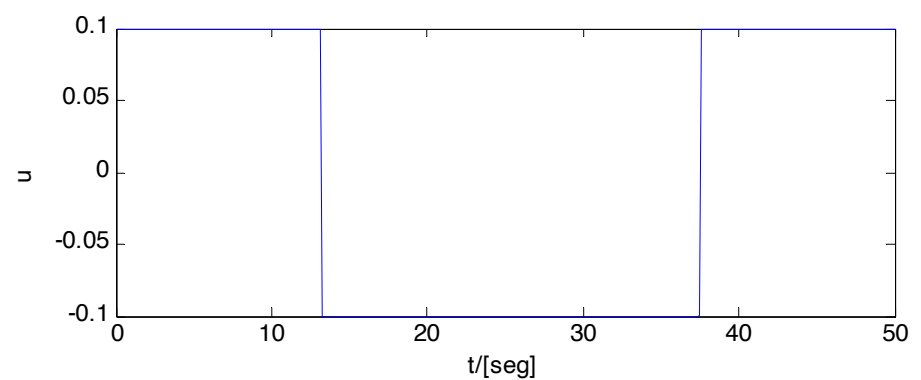
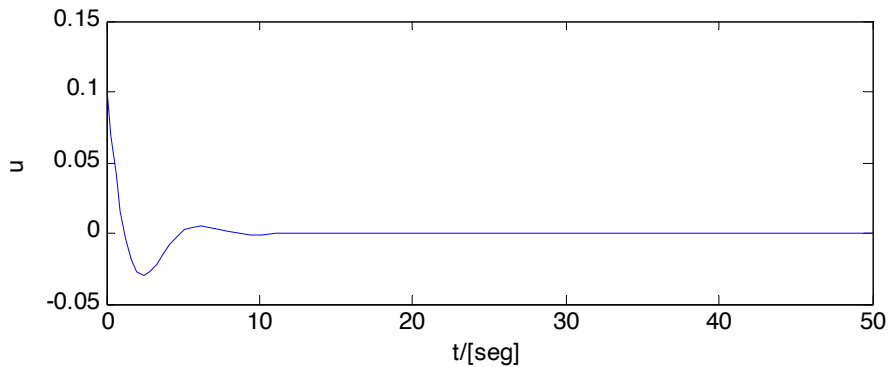
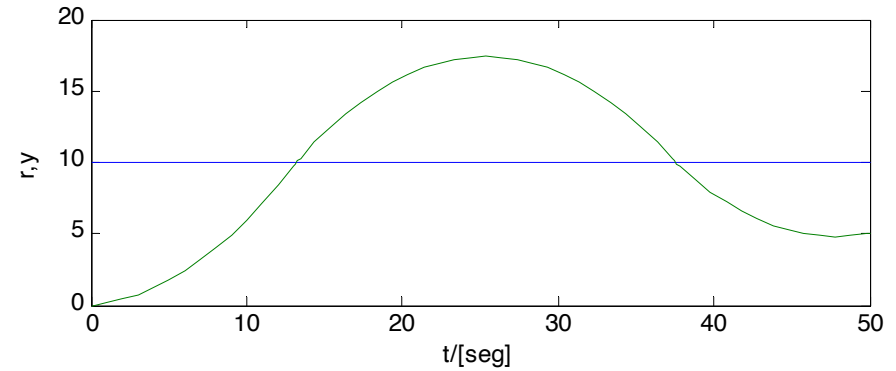
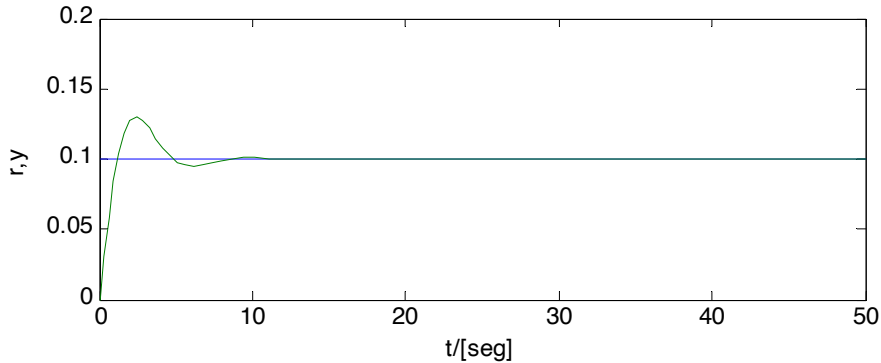
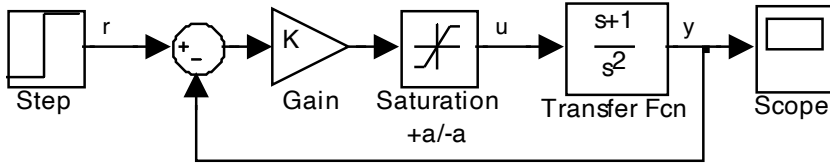
LGR de Sistemas com Saturação



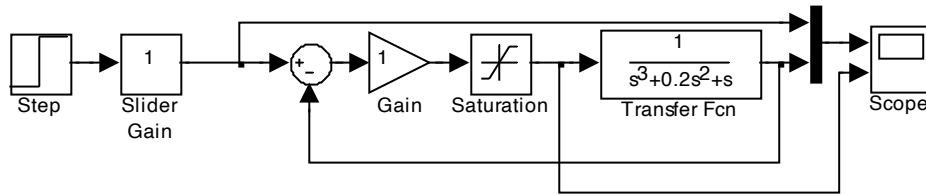
$r \uparrow \rightarrow K_{ef} \downarrow \rightarrow K_{ef} \downarrow \rightarrow M_p \uparrow$



LGR de Sistemas com Saturação



LGR de Sistemas com Saturação



“Ciclo Limite”

