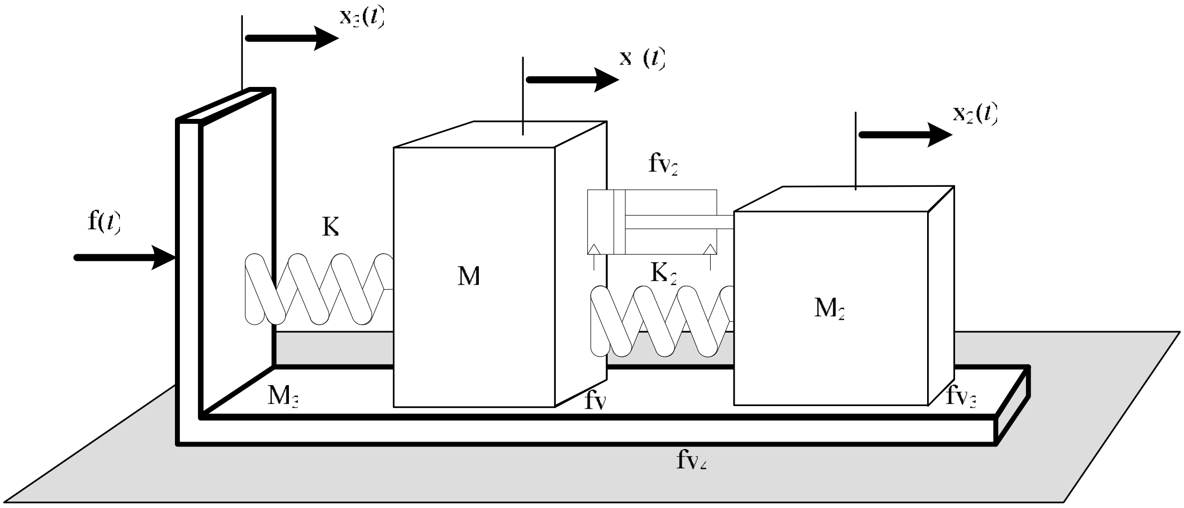
Nome:____Matrícula:______________

RESOLUÇÃO - 1ª PROVA

1ª Questão: (3 Pts) Considere o sistema mecânico a seguir. Com K_1 e K_2 em N/m, fv_1, fv_2, fv_3 e fv_4, em N.s/m e M_1, M_2 e M_3 em kg.

a) (0,5) Quantos são os graus de liberdade? Justifique.
b) (2,0) Obtenha as equações de movimento.
c) (0,5) Qual a ordem deste sistema? Justifique.



-----

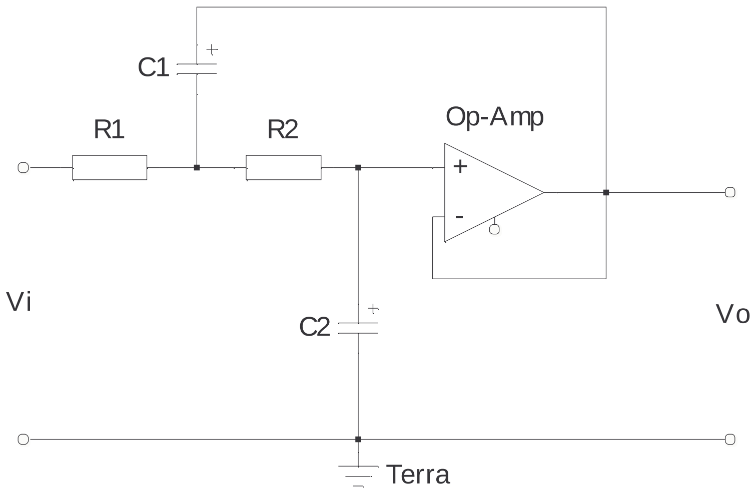
a) 3 graus de liberdade, pois há três massas que tem movimentos independentes.

b)
Aplicando o método das impedâncias:

$$(M_1 s^2 + [fv_1 + fv_2]s + K_1 + K_2)X_1(s) - (fv_2 s + K_2)X_2(s) - (fv_1 s + K_1)X_3(s) = 0$$
$$-(fv_2 s + K_2)X_1(s) + (M_2 s^2 + [fv_2 + fv_3]s + K_2)X_2(s) - (fv_3 s)X_3(s) = 0$$
$$-(fv_1 s + K_1)X_1(s) - (fv_3 s)X_2(s) + (M_3 s^2 + [fv_1 + fv_3 + fv_4]s + K_1)X_3(s) = F(s)$$

c) O sistema é de ordem 6, pois há 3 equações de 2ª ordem. Em casos particulares, com cancelamento de pólos e zeros, a ordem seria reduzida.

d) ***2ª Questão***: (3 Pts) Obtenha a função de transferência Vo(s)/Vi(s) do seguinte circuito, onde Op-Amp é um amplificador operacional ideal. Considere R1=R2=R.



***Divisor de tensão*:**

$$V_o = \frac{1/sC_2}{R_2 + 1/sC_2} V = \frac{1}{sR_2C_2 + 1} V$$

***Lei dos nós*:**

$$\frac{V_i - V}{R} + \frac{V_o - V}{R} + \frac{V_o - V}{1/sC_1} = 0$$

$$\frac{V_i}{R} + V_o\left(\frac{1}{R} + sC_1\right) - V\left(\frac{2}{R} + sC_1\right) = 0$$

$$\frac{V_i}{R} + V_o\left(\frac{1}{R} + sC_1\right) - V_o(sCR_2 + 1)\left(\frac{2}{R} + sC_1\right) = 0$$

$$V_i + V_o(1 + sRC_1) - V_o(sCR_2 + 1)(2 + sRC_1) = 0$$

$$V_i = V_o\left(s^2R^2C_1C_2 + 2sRC_2 + 1\right)$$

$$\boxed{\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{s^2R^2C_1C_2 + 2sRC_2 + 1}}$$

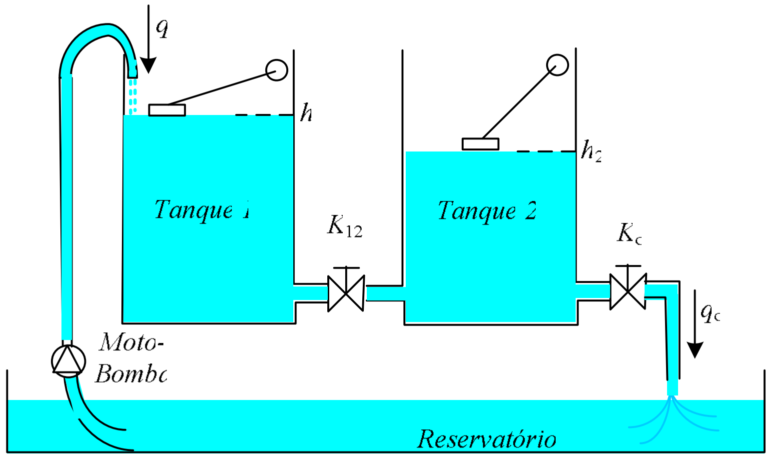
3ª Questão: (4 Pts) Obtenha a função de transferência $H_2(s)/Q_i(s)$, nível do tanque 2 em relação à vazão de entrada, de um processo de nível descrito pelas seguintes equação diferenciais não lineares. A, K_{12} *e* K_o são constantes.

$$A\frac{dh_1}{dt} = q_i - K_{12}\sqrt{h_1 - h_2}$$
$$A\frac{dh_2}{dt} = K_{12}\sqrt{h_1 - h_2} - K_o\sqrt{h_2}$$

Obs: O ponto de operação $(\bar{q}_i, \bar{h}_1, \bar{h}_2)$ é conseqüência de uma vazão $\bar{q}_i$ em regime permanente.

$$\begin{cases} 0 = \bar{q}_i - K_{12}\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2} \\ 0 = K_{12}\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2} - K_o\sqrt{\bar{h}_2} \end{cases} \Rightarrow \bar{h}_2 = \left(\frac{\bar{q}_i}{K_o}\right)^2, \quad \bar{h}_1 = \ldots$$

Para simplificar a notação, adote: $a = \dfrac{K_{12}}{2\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}}$; $b = a + \dfrac{K_o}{2\sqrt{\bar{h}_2}}$



$$f(x) = f(\bar{x}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}} (x - \bar{x})$$

$$\sqrt{h_2} = \sqrt{\bar{h}_2} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_2}}(h_2 - \bar{h}_2) = \sqrt{\bar{h}_2} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_2}}\delta h_2$$

$$\sqrt{h_1 - h_2} = \sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}}(h_1 - \bar{h}_1) - \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}}(h_2 - \bar{h}_2) = \sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}}\delta h_2 - \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}}\delta h_2$$

(1pt)

$$A\frac{d\delta h_1}{dt} = q_i - K_{12}\left(\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}}\delta h_1 - \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}}\delta h_2\right)$$

$$A\frac{d\delta h_2}{dt} = K_{12}\left(\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}}\delta h_1 - \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}}\delta h_2\right) - K_o\left(\sqrt{\bar{h}_2} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_2}}\delta h_2\right)$$

(1pt)

$$\frac{d\delta h_i}{dt} = \frac{d(h_i - \bar{h}_i)}{dt} = \frac{dh_i}{dt}; \qquad \delta q_i = q_i - K_{12}\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2};$$

$$No\ \ ponto\ de\ operacao: \bar{q}_i = K_{12}\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2} = K_o\sqrt{\bar{h}_2}$$

$$com\ \ a = \frac{K_{12}}{2\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}};\ \ b = a + \frac{K_o}{2\sqrt{\bar{h}_2}}$$

$$A\frac{d\delta h_1}{dt} = \delta q_i - a\delta h_1 + a\delta h_2$$
$$A\frac{d\delta h_2}{dt} = a\delta h_1 - b\delta h_2$$

(1pt)

Aplicando Laplace:

$$(As+a)H_1 - aH_2 = Q_i(s)$$
$$-aH_1 + (As+b)H_2 = 0$$

$$(As+a)\frac{(As+b)}{a}H_2 - aH_2 = Q_i(s)$$
$$\left((As+a)\frac{(As+b)}{a} - a\right)H_2 = Q_i(s)$$

$$\frac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{a}{(As+a)(As+b)-a^2} \qquad \boxed{\frac{H_2(s)}{Q_i(s)} = \frac{a}{A^2s^2 + A(a+b)s + ab - a^2}}$$

(1pt)