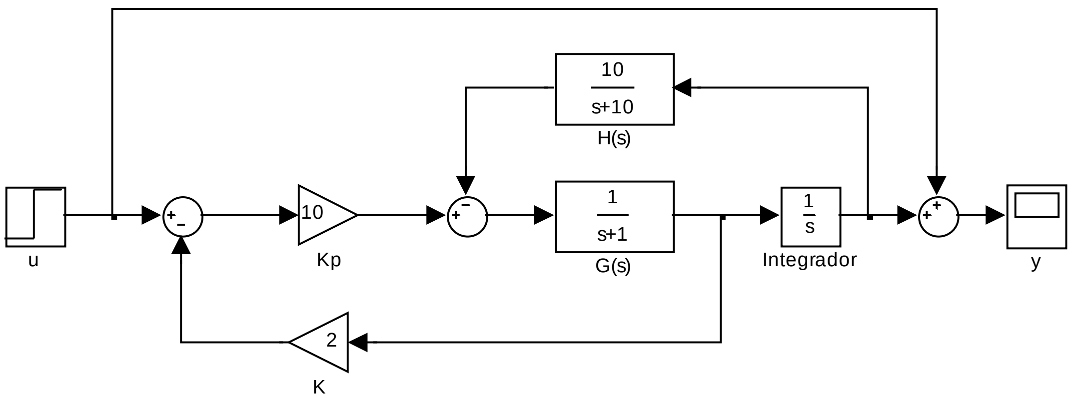
Sexta-Feira, 17 de dezembro de 2004, 7^{30} - 10^{00}, Auditório ENE

Curso: Eng. ___________________

Nome:____Matrícula:_____________

RESOLUÇÃO - 2ª PROVA

1ª Questão: (2Pts) Considere o seguinte sistema dinâmico linear:



a) (1,0) Obtenha a função de transferência entre u e y.
b) (1,0) Mostre o fluxografo deste sistema na forma canônica controlável.

---

a) A função de transferência pode ser obtida pela redução do diagrama de blocos ou pela regra de Mason.
Por Mason:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = 1 + G_1(s);$$

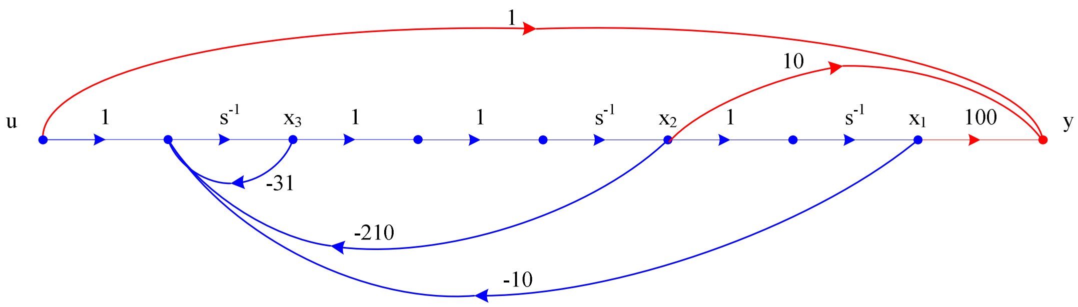
$$G_1(s) = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta}; \qquad P_1 = \frac{10}{s(s+1)}; \qquad \Delta_1 = 1; \quad \Delta = 1 + \frac{20}{s+1} + \frac{10}{s(s+1)(s+10)}$$

$$G_1(s) = \frac{\dfrac{10}{s(s+1)}}{1 + \dfrac{20}{s+1} + \dfrac{10}{s(s+1)(s+10)}} = \frac{10(s+10)}{s(s+1)(s+10) + s(s+10)20 + 10} = \frac{10s+100}{s^3+31s^2+210s+10}$$

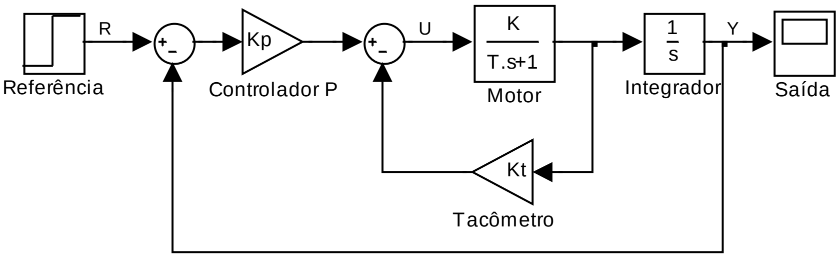
$$\boxed{G(s) = \frac{s^3+31s^2+220s+110}{s^3+31s^2+210s+10}}$$

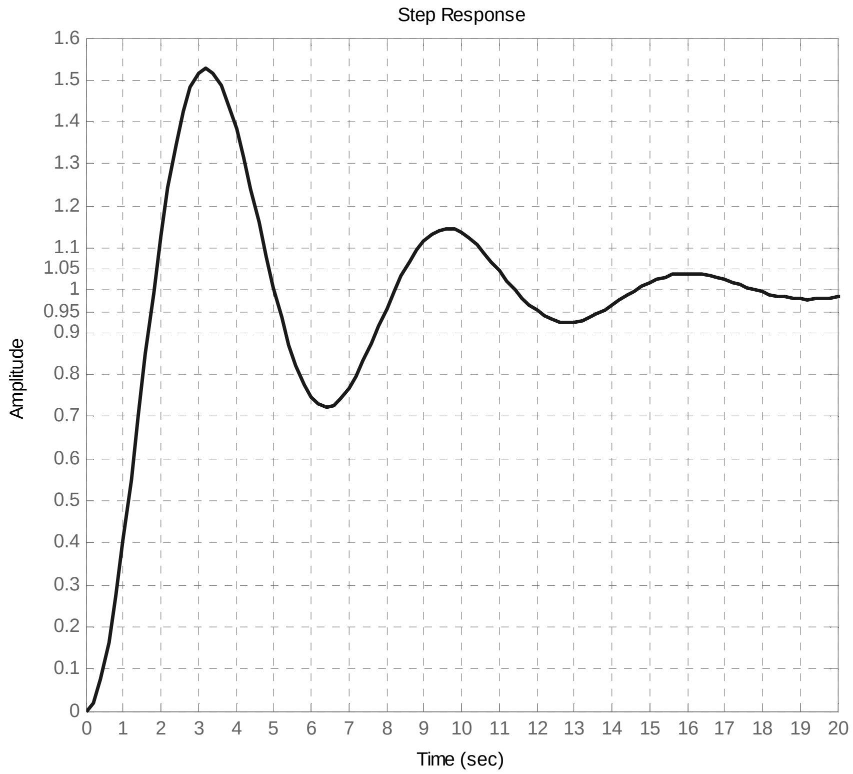
b) Este sistema tem um canal de transferência direta entre a entrada e a saída (não é afetado pela dinâmica).

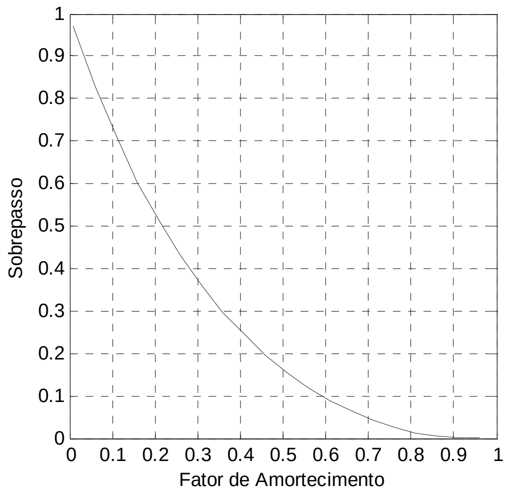
$$G(s) = 1 + \frac{10s+100}{s^3+31s^2+210s+10} = 1 + \frac{10s^{-2}+100s^{-3}}{1+31s^{-1}+210s^{-2}+10s^{-3}}$$



2ª Questão: (2 Pts) Considere a identificação de um motor DC. Um tacômetro com K_t=1 e um controlador proporcional com K_p=20 são utilizados para acionar o motor, obtendo-se a resposta ao degrau abaixo. Quais são os parâmetros K e T do motor?







$$M_p = 0{,}53 \rightarrow \zeta = 0{,}2$$

$$2T_d = 16 - 3{,}2 \rightarrow T_d = 6{,}4$$

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = 0{,}982$$

$$\omega_n = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_d \approx 1 rad/s$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p K}{Ts^2 + s(1+K_t K) + K_p K}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{20K/T}{s^2 + s(1+K)/T + 20K/T}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

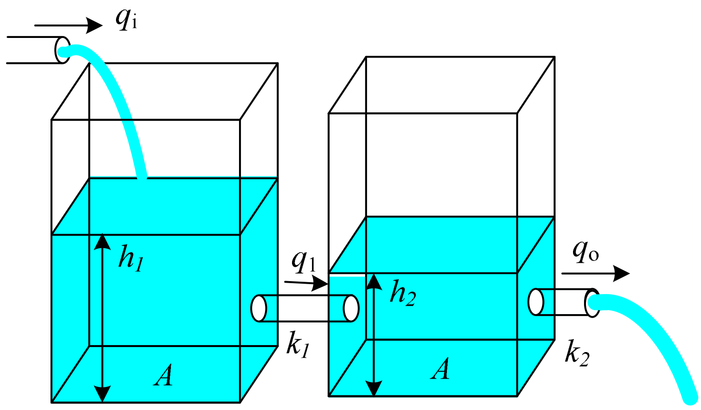
$$2\zeta\omega_n = 0{,}4 = (1+K)/T$$

$$\omega_n^2 = 1 = 20K/T$$

K = 1/7 = 0,143
T = 20/7 = 2,857

Obs: $t_s(5\%) = \dfrac{3}{\zeta\omega_n}; \omega_n = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_d$

3ª Questão: (3,0 pts) Um sistema de nível de líquidos com dois reservatórios pode ser modelado por:



$$\begin{cases} A\dfrac{dh_1}{dt} = q_i - k_1\sqrt{h_1 - h_2} \\ A\dfrac{dh_2}{dt} = k_1\sqrt{h_1 - h_2} - k_2\sqrt{h_2} \end{cases}$$

Obs.: Para simplificar a notação considere:

$$a = \frac{k_1}{2A\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}}, b = \frac{k_2}{2A\sqrt{\bar{h}_2}}$$

a) (1,0) Obtenha o modelo no espaço de estados linearizado em torno do ponto de operação $(\bar{h}_1, \bar{h}_2)$.

b) (1,0) Qual a função de transferência entre δq_i e δh_2

c) (0,5) Para $\bar{h}_2 = 9cm$, A = 150cm^2, k_1=300cm^{2,5}/s e k_2=200cm^{2,5}/s qual o valor de $\bar{h}_1$?

d) (0,5) Qual a vazão em regime, correspondente?

$$f(x) = f(\bar{x}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}}(x - \bar{x})$$

$$\sqrt{h_2} = \sqrt{\bar{h}_2} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_2}}(h_2 - \bar{h}_2) = \sqrt{\bar{h}_2} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_2}}\delta h_2$$

$$\sqrt{h_1 - h_2} = \sqrt{\Delta} = \sqrt{\bar{\Delta}} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{\Delta}}}(\Delta - \bar{\Delta}) = \sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}}(h_1 - h_2 - \bar{h}_1 + \bar{h}_2) = \sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2} + \frac{1}{2\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}}(\delta h_1 - \delta h_2)$$

$$\begin{cases} A\dfrac{dh_1}{dt} = q_i - k_1\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2} - \dfrac{k_1}{2\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}}(\delta h_1 - \delta h_2) \\ A\dfrac{dh_2}{dt} = k_1\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2} + \dfrac{k_1}{2\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}}(\delta h_1 - \delta h_2) - k_2\sqrt{\bar{h}_2} - \dfrac{k_2}{2\sqrt{\bar{h}_2}}\delta h_2 \end{cases}$$

$$\frac{d\delta h_1}{dt} = \frac{d(h_1 - \bar{h}_1)}{dt} = \frac{dh_1}{dt}; \qquad \delta q_i = q_i - k_1\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2};$$

$$No\ \ ponto\ de\ operacao: k_1\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2} = k_2\sqrt{\bar{h}_2} = \bar{q}_i$$

a) $$\boxed{\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{d\delta h_1}{dt} = -a\delta h_1 + a\delta h_2 + \dfrac{\delta q_i}{A} \\ \dfrac{d\delta h_2}{dt} = a\delta h_1 - (a+b)\delta h_2 \end{cases} \\ y = \delta h_2 \end{array}}$$

$$(s+a)\delta H_1 = a\delta H_2 + \delta q_i / A$$

$$(s+a+b)\delta H_2 = a\delta H_1$$

$$(s+a+b)\delta H_2 = \frac{a^2\delta H_2 + a\delta q_i / A}{(s+a)}$$

b) $$\boxed{\frac{\delta H_2}{\delta q_i} = \frac{a/A}{s^2 + (2a+b)s + ab}}$$

c) $k_1\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2} = k_2\sqrt{\bar{h}_2} \rightarrow 300\sqrt{\bar{h}_1 - 9} = 200\sqrt{9} \rightarrow \bar{h}_1 = 13$

d) $\bar{q} = k_1\sqrt{\bar{h}_1 - \bar{h}_2} = k_2\sqrt{\bar{h}_2} = 200\sqrt{9} = 600cm^3/s$

4ª Questão: (3,0 pts) Obtenha a resposta $y(t)$ do seguinte sistema às condições iniciais $x_1(0) = 2, x_2(0) = 1$

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 3x_2 + u$$
$$y = 3x_1 + x_2$$

Resposta às condições iniciais → $u = 0$

Transformada de Laplace considerando condições iniciais:

$$sX_1 - x_1(0) = X_2$$
$$sX_2 - x_2(0) = -2X_1 - 3X_2$$
$$Y = 3X_1 + X_2$$

Substituindo X_2 na segunda equação:

$$s(sX_1 - x_1(0)) - x_2(0) = -2X_1 - 3(sX_1 - x_1(0))$$
$$(s^2 + 3s + 2)X_1 = sx_1(0) + x_2(0) + 3x_1(0)$$

$$X_1(s) = \frac{sx_1(0) + x_2(0) + 3x_1(0)}{s^2 + 3s + 2}$$

$$Y = 3X_1 + sX_1 - x_1(0)$$

$$Y(s) = \frac{7s + 17}{s^2 + 3s + 2} = \frac{10}{s+1} - \frac{3}{s+2}$$

$$\boxed{y(t) = 10e^{-t} - 3e^{-2t}}$$