Sexta-Feira, 16 de novembro de 2007, 7^{30} - 10^{00}

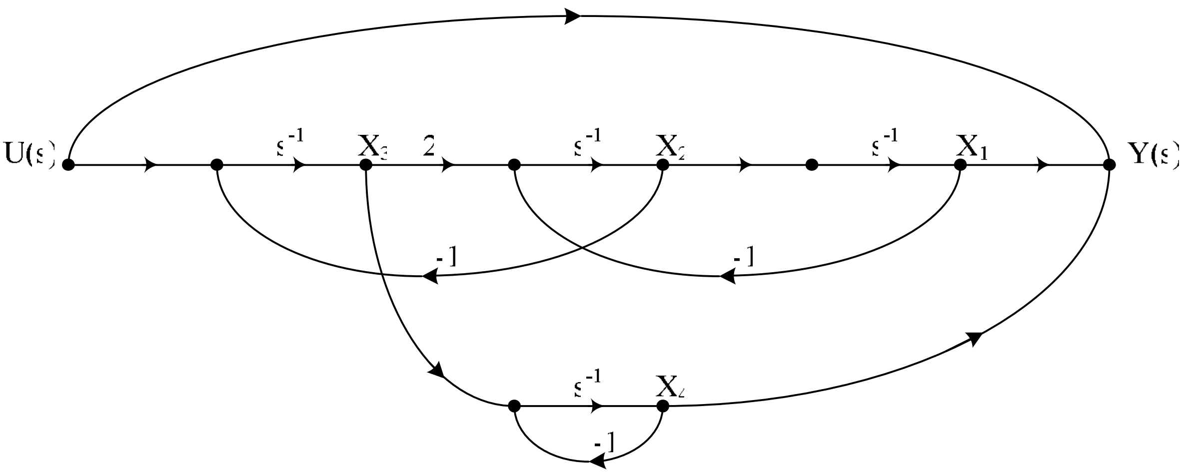
Nome:____Matrícula:________________

RESOLUÇÃO - 2ª PROVA

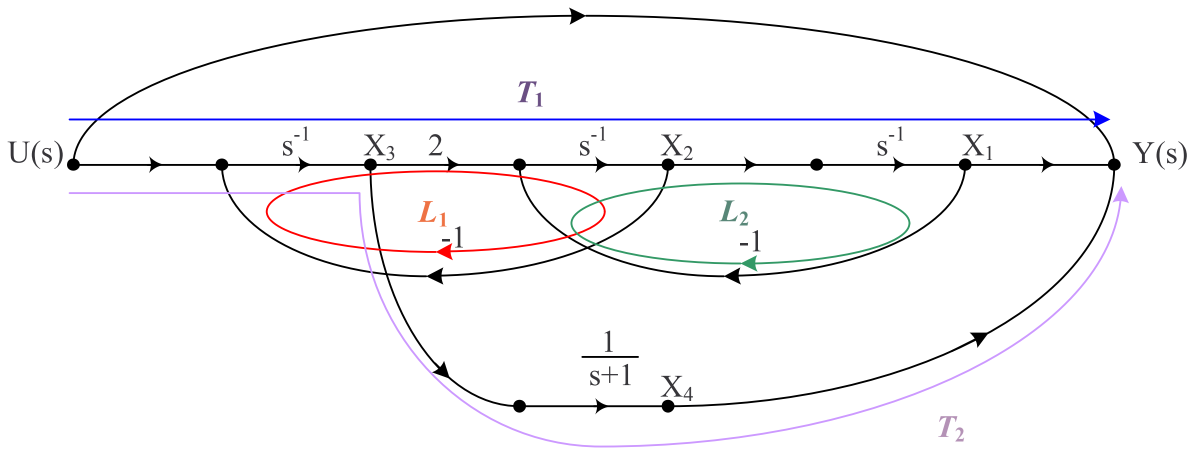
1ª Questão: (2 Pts) Considere o seguinte fluxografo. Ramos sem indicação tem ganho unitário.

a) (1,0) Obtenha a função de transferência Y(s)/U(s).

b) (1,0) Represente este sistema no espaço de estado na forma canônica observável.



O laço em X_4 pode facilmente ser incorporado ao caminho direto $T_2 = s^{-1}\dfrac{s^{-1}}{1+s^{-1}} = \dfrac{s^{-2}}{1+s^{-1}}$.



$$\text{Mason}: \ \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum T_k \Delta_k}{\Delta} + 1$$

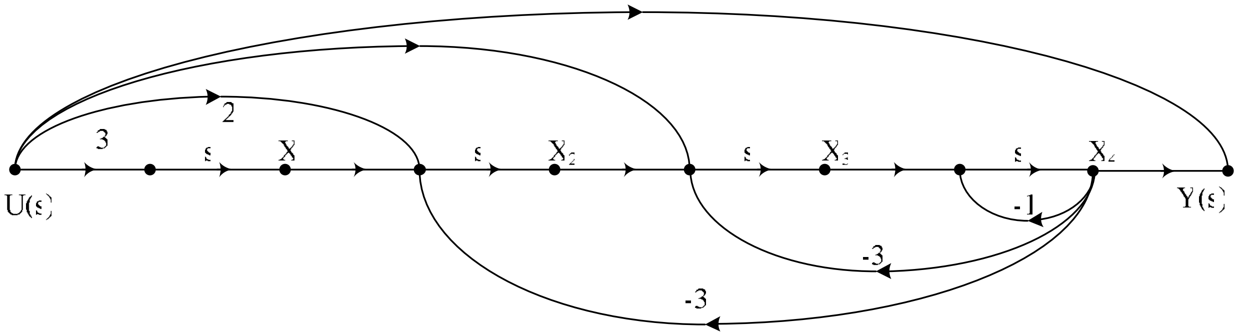
$L_1 = -2s^{-2}$; $\quad L_2 = -s^{-2}$; $\quad T_1 = 2s^{-3}$;

$\Delta = 1 - L_1 - L_2 = 1 + 3s^{-2}$

$\Delta_1 = 1$; $\quad \Delta_2 = 1 - L_2 = 1 + s^{-2}$;

a) $\boxed{\dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s^2+2s+3}{s^4+s^3+3s^2+3s} + 1 = \dfrac{s^4+s^3+4s^2+5s+3}{s^4+s^3+3s^2+3s}}$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^2+2s+3}{s^4+s^3+3s^2+3s}+1=\frac{s^{-2}+2s^{-3}+3s^{-4}}{1+s^{-1}+3s^{-2}+3s^{-3}}+1=\frac{T_1+T_2+T_3}{1-L_1-L_2-L_3}+1$$



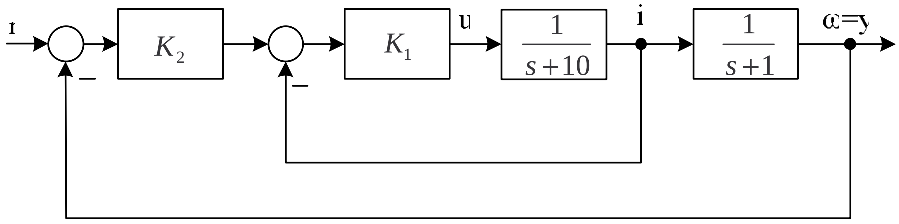
b)

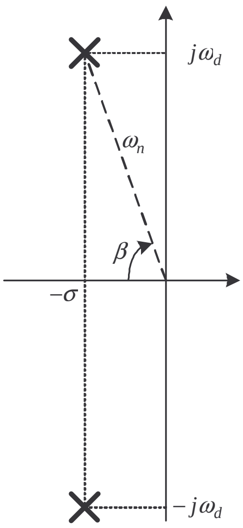
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&-3\\0&1&0&-3\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\2\\1\\0\end{bmatrix}u$$

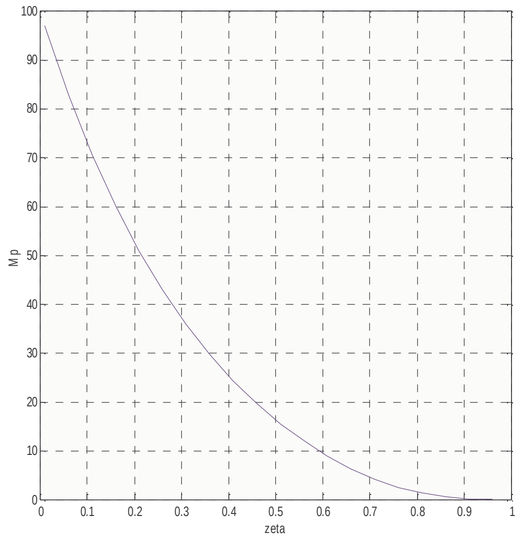
$$y=\begin{bmatrix}0&0&0&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}u$$

2ª Questão: (2,5 Pts) Um esquema de controle muito popular para motores é o assim chamado controle em cascata. Uma malha interna, mais rápida, controla a corrente de armadura, enquanto uma malha externa controla a velocidade do motor.

a) (1,0) Obtenha a função de transferência de malha fechada Y(s)/R(s).
b) (1,0) Calcule os valores de K_1 e K_2 para que o sobresinal percentual seja M_p=16% e o tempo de acomodação de 1% seja t_a=0,1s.
c) (0,5) Para um degrau unitário de referência, qual o erro em regime permanente?







$$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$R(s)=1/s \rightarrow y(t)=1-\frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}sen(\omega_d t+\beta)$$

$$M_p=100\%\times e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}},\ e^{-4,6}=0,01$$

$$t_r(10\%\rightarrow 90\%)\approx\frac{1,8}{\omega_n},\ \ t_p\approx\frac{\pi}{\omega_d}$$

---

a) $$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K_1K_2}{s^2+s(11+K_1)+10+K_1+K_1K_2}$$

b)

$$M_p=16\%\rightarrow\zeta=0,5 \qquad t_a(1\%)=\frac{4,6}{\sigma}\rightarrow\sigma=46 \qquad \omega_n=\frac{\sigma}{\zeta}=92rad/s$$

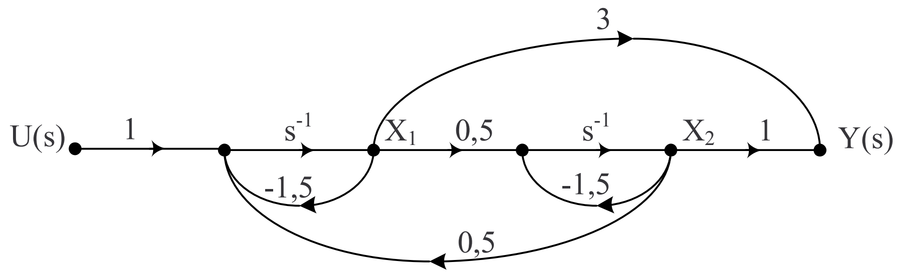
$$\begin{cases}\omega_n^2=10+K_1+K_1K_2\\ 2\zeta\omega_n=11+K_1\end{cases} \qquad \boxed{\begin{matrix}K_1=81\\ K_2=103,37\end{matrix}}$$

c)

$$y(t\rightarrow\infty)=\frac{K_1K_2}{10+K_1+K_1K_2}=0,9892$$

$$e_{ss}=0,0108$$

3ª Questão: (2 Pts) Transforme o seguinte sistema para a forma diagonal.



Representação no espaço de estados:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}5 & -1{,}5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Autovalores da matriz de sistema: $\det(\lambda I - A)=\begin{vmatrix}\lambda+1{,}5 & -0{,}5\\ -0{,}5 & \lambda+1{,}5\end{vmatrix}=\lambda^2+3\lambda+2=0 \rightarrow \lambda_{1,2}=-1,-2$

Autovetores:

$$Ax=\lambda x \Rightarrow \begin{bmatrix}-1{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}5 & -1{,}5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\Rightarrow autovetor_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}-1{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}5 & -1{,}5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\Rightarrow autovetor_2=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}B=\begin{bmatrix}0{,}5\\ 0{,}5\end{bmatrix}$$

$$CP=\begin{bmatrix}4 & 2\end{bmatrix}$$

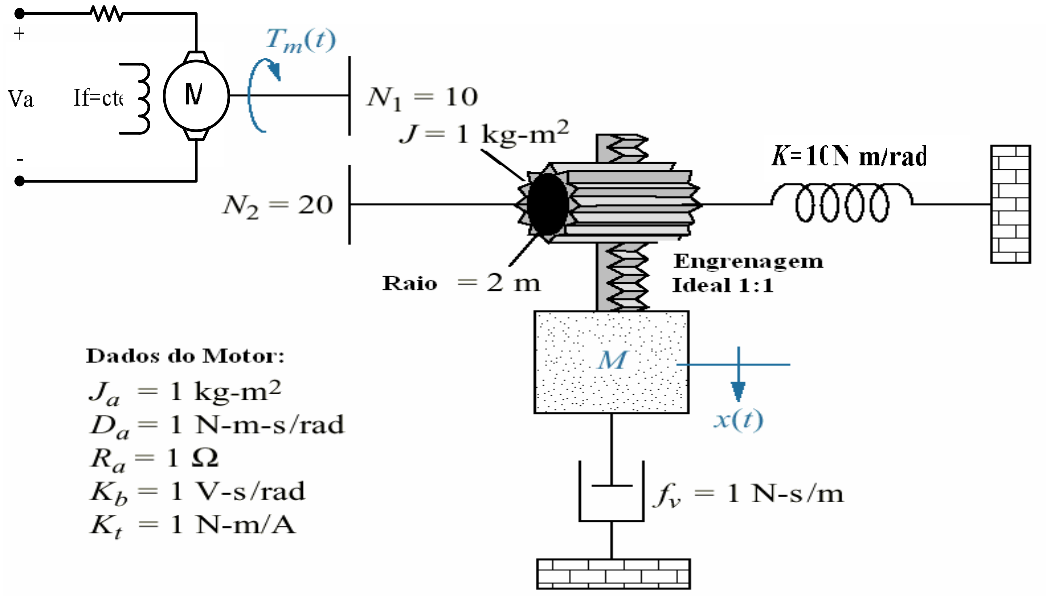
$$\boxed{\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0{,}5\\ 0{,}5\end{bmatrix}u\\ &y=\begin{bmatrix}4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}\end{aligned}}$$

4ª Questão: (3,5 Pts) Considere o sistema de acionamento a seguir (em pequenos sinais).

a) (2,0) A aplicação de um degrau de torque T_m pelo motor, segundo o esquema abaixo, desloca a massa M segundo $x(t)$. Calcule o valor da massa M em kg, para que o tempo de subida t_r seja 1,8seg ($X(s)/T_m(s)$).

b) (0,5) Para a condição do item anterior, qual o sobrepasso percentual da resposta ao degrau?

c) (1,0) Com M calculado, considere agora que a entrada seja a tensão de armadura do motor ($X(s)/V_a(s)$). Qual o sobrepasso do sistema?



Refletindo todas as impedâncias para o eixo do motor:

$$T_m(s) = \left\{ \left[s^2 M r^2 + s f_v r^2 + s^2 J + K \right] \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 + s^2 J_a + s D_a \right\} \theta_m(s)$$

$$T_m(s) = \left\{ s^2 \left[M r^2 \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 + J \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 + J_a \right] + s \left[f_v r^2 \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 + D_a \right] + K \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \right\} \theta_m(s)$$

$$T_m(s) = \left\{ s^2 \left[M + \frac{1}{4} + 1 \right] + s[1+1] + 2,5 \right\} \theta_m(s)$$

Obs. A equação característica do sistema independe da variável de saída escolhida.

$$\frac{\theta_m(s)}{T_m(s)} = \frac{\dfrac{1}{M+1,25}}{s^2 + s\dfrac{2}{M+1,25} + \dfrac{2,5}{M+1,25}}$$

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n = \dfrac{2}{M+1,25} \\ \omega_n^2 = \dfrac{2,5}{M+1,25} \end{cases}$$

$t_r = 1,8 \rightarrow \omega_n = 1 \quad \rightarrow$ a) $\boxed{M = 1,25 Kg}$

b) $\boxed{\zeta = 0,4 \quad \rightarrow M_p = 25\%}$

Equações do motor:

$$V_a(s) = R_a I_a(s) + sK_b\theta_m(s)$$
$$T_m(s) = K_t I_a(s)$$

$$V_a(s) = \frac{R_a}{K_t} T_m(s) + sK_b\theta_m(s)$$

Substituindo na expressão do torque, calculada anteriormente:

$$V_a(s) = \frac{R_a}{K_t}\left\{ s^2\left[Mr^2\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 + J\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 + J_a \right] + s\left[f_v r^2\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 + D_a \right] + K\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \right\}\theta_m(s) + sK_b\theta_m(s)$$

$$V_a(s) = \frac{R_a}{K_t}\left\{ s^2\left[Mr^2\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 + J\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 + J_a \right] + s\left[f_v r^2\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 + D_a + K_b \right] + K\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \right\}\theta_m(s)$$

$$V_a(s) = \left\{ s^2\left[1{,}25 + \frac{1}{4} + 1 \right] + s[1+1+1] + 2{,}5 \right\}\theta_m(s)$$

$$\begin{cases} 2\zeta\omega_n = \dfrac{3}{2{,}5} \\ \omega_n = 1 \end{cases}$$

c) $\boxed{\zeta = 0{,}6 \quad \rightarrow M_p = 10\%}$