Departamento de Engenharia Elétrica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília
ENE/FT/UnB

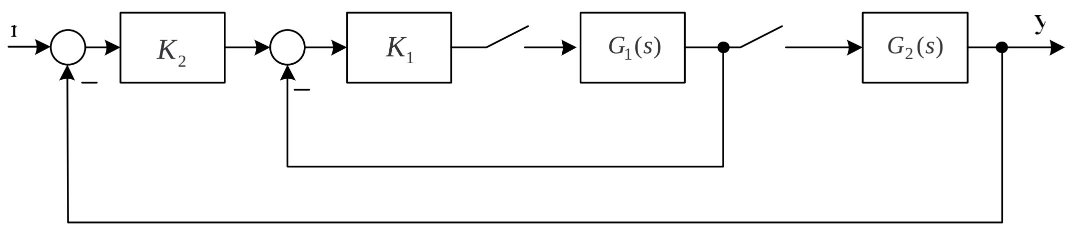
Prof. Adolfo Bauchspiess
http://www.ene.unb.br/adolfo/ADL
160041 DINÂMICA LINEAR - 2°/2007

Sexta-Feira, 14 de dezembro de 2007, 8^{00} - 10^{00}

Nome:____Matrícula:_______________

RESOLUÇÃO 3ª PROVA

1ª Questão: (2 Pts) Obtenha a função de transferência discreta Y(z)/R(z) do seguinte sistema de controle:



$$G_f(z) = \frac{K_1 G_1(z)}{1 + K_1 G_1(z)}$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_2 G_f(z) G_2(z)}{1 + K_2 G_f(z) G_2(z)}$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_2 \dfrac{K_1 G_1(z)}{1 + K_1 G_1(z)} G_2(z)}{1 + K_2 \dfrac{K_1 G_1(z)}{1 + K_1 G_1(z)} G_2(z)}$$

$$\boxed{\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_2 K_1 G_1(z) G_2(z)}{1 + K_1 G_1(z) + K_2 K_1 G_1(z) G_2(z)}}$$

2ª Questão: Considere o seguinte sistema contínuo.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t}$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

a) (1,5) Calcule a Matriz de Transição de Estados $\mathbf{\Phi}(t)$

b) (1,5) Calcule a resposta y(t) considerando o sinal de entrada e as condições iniciais $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

---

a)

$$\Phi(t) = L^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s+5 & 3 \\ -2 & s \end{bmatrix} \rightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}\begin{bmatrix} s & -3 \\ 2 & s+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{-3}{(s+2)(s+3)} \\ \dfrac{2}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{s+5}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\Phi(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-2t} + 3e^{-3t} & -3e^{-2t} + 3e^{-3t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-3t} & 3e^{-2t} - 2e^{-3t} \end{bmatrix}}$$

b)

$$s\mathbf{X}(s) - x(0) = \mathbf{AX}(s) + \mathbf{B}u(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[x(0) + \mathbf{B}u(s)]$$

$$Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}[x(0) + \mathbf{B}u(s)]$$

$$x(0) + \mathbf{B}u(s) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{s+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

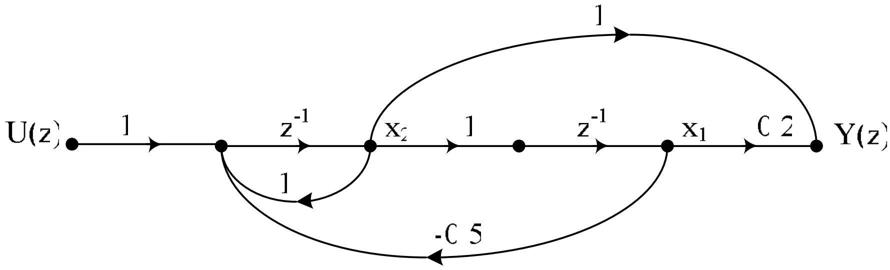
$$Y(s) = \begin{bmatrix} 1 & .5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{s}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{-3}{(s+2)(s+3)} \\ \dfrac{2}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{s+5}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{s+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 1 & .5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{s}{(s+1)(s+3)} \\ \dfrac{2}{(s+1)(s+3)} \end{bmatrix} = \frac{s}{(s+1)(s+3)} + \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+3)}$$

$$\boxed{y(t) = e^{-3t}}$$

3ª Questão: Considere o seguinte sistema com taxa de amostragem 1seg..



a) (1,0) Este sistema é estável em malha aberta? Justifique.
b) (1,0) Calcule e esboce a resposta deste sistema a um degrau unitário para os 10 primeiros instantes de tempo.
c) (1,0) Qual o tempo de pico? Qual o sobrepasso percentual? Qual o valor final da resposta ao degrau?

---

a) Função de Transferência:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-1} + 0,2z^{-2}}{1 - z^{-1} + 0,5z^{-2}} = \frac{z + 0,2}{z^2 - z + 0,5}$$

As raízes da equação característica são 0,5 ± 0,5j, internas ao círculo unitário → Sistema estável.

b)
Equação a diferenças (recorrência) no domínio do tempo discreto:

$$y(k) - y(k-1) + 0,5y(k-2) = u(k-1) + 0,2u(k-2)$$
$$y(k) = y(k-1) - 0,5y(k-2) + u(k-1) + 0,2u(k-2)$$

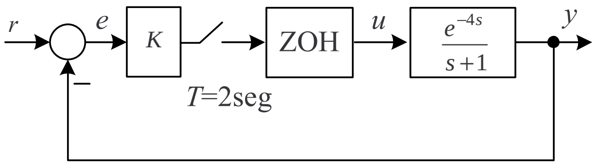
k	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
y(k)	**0**	**0**	**1**	**2,2**	**2,9**	**3**	**2.75**	**2.45**	**2.275**	**2.5**	**2.3125**	**2.3875**
y(k-1)	**0**	**0**	**0**	**1**	**2,2**	**2,9**	**3**	**2.75**	**2.45**	**2.275**	**2.5**	**2.3125**
y(k-2)	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**2,2**	**2,9**	**3**	**2.75**	**2.45**	**2.275**	**2.5**
u(k)	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
u(k-1)	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
u(k-2)	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

c) Tempo de pico = 4*seg*.

Valor final: $y(k \to \infty) = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{z+0,2}{z^2 - z + 0,5} \frac{z}{z-1} = 2,4$

Sobrepasso percentual = $\frac{3 - 2,4}{2,4} = 0,25 \to$ **25%**

4ª Questão: Considere o seguinte sistema de controle discreto de um processo contínuo.



a) (1pt) Obtenha o modelo discreto equivalente do processo contínuo.
b) (1pt) Qual o valor de K para que a resposta a um degrau unitário tenha $e(k\to\infty) = 1\%$?

Obs:

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathrm{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

s	k	z
$\frac{1}{s}$	$1(kT)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$

---

a)

$$\frac{G_1(s)}{s} = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \to 1(kT) - e^{-kT} \to \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-2}}$$

$$G_1(z) = \frac{z-1}{z}\left\{\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-2}}\right\} = \frac{1-e^{-2}}{z-e^{-2}}$$

$$\boxed{G(z) = z^{-2}\frac{1-e^{-2}}{z-e^{-2}} = \frac{0{,}8647}{z^3 - 0{,}1353z^2}}$$

b)

Em malha fechada:

$$G_f(z) = \frac{KG(z)}{1+1KG(z)} = \frac{K(1-e^{-2})}{z^2(z-e^{-2}) + K(1-e^{-2})}$$

Resposta ao degrau em regime permanente:

$$\lim_{z\to 1}(z-1)G_f(z)\frac{z}{z-1} = \frac{K(1-e^{-2})}{(1-e^{-2}) + K(1-e^{-2})} = \frac{K}{1+K}$$

Para um erro 0,01 → y(k→∞) =0,99 → $\boxed{K=99}$