

Capítulo 1 - Modelagem Matemática

Eduardo Mendes

`emmendes@cpdee.ufmg.br`

Departamento de Engenharia Eletrônica
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte, MG, Brasil



Modelagem Matemática

Modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda maneiras de desenvolver e implementar modelos matemáticos de sistemas reais.

- ▶ Modelagem caixa branca. *Modelagem pela física ou natureza do processo* ou ainda *modelagem fenomenológica* ou *modelagem conceitual*.



Modelagem Matemática

Modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda maneiras de desenvolver e implementar modelos matemáticos de sistemas reais.

- ▶ Modelagem caixa branca. *Modelagem pela física ou natureza do processo* ou ainda *modelagem fenomenológica* ou *modelagem conceitual*.
- ▶ Identificação de sistemas. *Modelagem empírica*.



Modelagem Matemática

Modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda maneiras de desenvolver e implementar modelos matemáticos de sistemas reais.

- ▶ Modelagem caixa branca. *Modelagem pela física ou natureza do processo* ou ainda *modelagem fenomenológica* ou *modelagem conceitual*.
- ▶ Identificação de sistemas. *Modelagem empírica*.

O objetivo deste capítulo é introduzir alguns conceitos básicos e princípios fundamentais que serão úteis no estudo de técnicas de identificação.



Alguns Conceitos Básicos

- ▶ O que é um modelo matemático?



Alguns Conceitos Básicos

- ▶ O que é um modelo matemático?
- ▶ Para que serve um modelo?



Alguns Conceitos Básicos

- ▶ O que é um modelo matemático?
- ▶ Para que serve um modelo?
- ▶ Que tipo de modelo deve ser utilizado?



Considerações freqüentemente feitas em modelagem

- ▶ *Linearidade*. Princípio da superposição.



Considerações freqüentemente feitas em modelagem

- ▶ *Linearidade*. Princípio da superposição.
- ▶ *Invariância no tempo*. A consideração de invariância temporal implica que *a dinâmica que está regulando a evolução temporal é a mesma*.



Considerações freqüentemente feitas em modelagem

- ▶ *Linearidade*. Princípio da superposição.
- ▶ *Invariância no tempo*. A consideração de invariância temporal implica que *a dinâmica que está regulando a evolução temporal é a mesma*.
- ▶ *Concentração de parâmetros*. As variáveis de interesse variam apenas com o tempo e não no espaço.



Linearidade — um sistema estático

- ▶ A equação da reta $y = 5x$. Este “sistema” é estático e é linear pois satisfaz o princípio da superposição.



Linearidade — um sistema estático

- ▶ A equação da reta $y = 5x$. Este “sistema” é estático e é linear pois satisfaz o princípio da superposição.
- ▶ Se $x_1 = 2$, então $y_1 = 10$; se $x_2 = -3$, então $y_2 = -15$. O princípio da superposição estabelece que se $x_3 = 4x_1 + 5x_2 = -7$, então tem-se a seguinte relação:
 $y_3 = 4y_1 + 5y_2 = -35$. Por outro lado, $y_3 = 5x_3 = -35$.



Linearidade — um sistema estático

- ▶ A equação da reta $y = 5x$. Este “sistema” é estático e é linear pois satisfaz o princípio da superposição.
- ▶ Se $x_1 = 2$, então $y_1 = 10$; se $x_2 = -3$, então $y_2 = -15$. O princípio da superposição estabelece que se $x_3 = 4x_1 + 5x_2 = -7$, então tem-se a seguinte relação:
 $y_3 = 4y_1 + 5y_2 = -35$. Por outro lado, $y_3 = 5x_3 = -35$.
- ▶ Um outro exemplo é $y = 2 + 5x$, que também é a equação de uma reta. Tal sistema não é mais linear.



Linearidade — um sistema dinâmico

$$5u(t) \frac{dy}{dt} + y(t) - 10u(t) = 0,$$

A equação acima é não-linear.



Linearidade — um sistema dinâmico

$$5u(t) \frac{dy}{dt} + y(t) - 10u(t) = 0,$$

A equação acima é não-linear.

▶ A equação linear equivalente é

$$\tau \frac{dy}{dt} + y(t) - Ku(t) = 0.$$



Invariância

- ▶ Seja $y(t) = \text{sen}(u(t))$. Para a entrada $u_1(t)$ a saída será $y_1 = \text{sen}(u_1(t))$. Deslocando $u_1(t)$ no tempo, tem-se $u_2(t) = u_1(t - t_0)$ e

$$y_2(t) = \text{sen}(u_2(t)) = \text{sen}(u_1(t - t_0)),$$
$$y_1(t - t_0) = \text{sen}(u_1(t - t_0)),$$

Como $y_2(t) = y_1(t - t_0)$ o sistema é invariante.



Invariância

- ▶ Seja $y(t) = \text{sen}(u(t))$. Para a entrada $u_1(t)$ a saída será $y_1 = \text{sen}(u_1(t))$. Deslocando $u_1(t)$ no tempo, tem-se $u_2(t) = u_1(t - t_0)$ e

$$\begin{aligned}y_2(t) &= \text{sen}(u_2(t)) = \text{sen}(u_1(t - t_0)), \\y_1(t - t_0) &= \text{sen}(u_1(t - t_0)),\end{aligned}$$

Como $y_2(t) = y_1(t - t_0)$ o sistema é invariante.

- ▶ Seja $y(t) = tu(t)$ e as mesmas entradas acima. Nesse caso,

$$\begin{aligned}y_1(t) &= tu_1(t) \\y_2(t) &= tu_2(t) = tu_1(t - t_0).\end{aligned}$$

Como $y_1(t - t_0) = (t - t_0)u_1(t - t_0) \neq y_2(t)$, o sistema $y(t) = tu(t)$ não é invariante no tempo.



Sistema a parâmetros distribuídos

Seja uma viga presa ao teto e com a extremidade inferior livre. A posição de qualquer parte da viga é determinada pela sua distância x ao teto. Na extremidade livre é aplicado um conjugado. O ângulo de torção θ vai depender, não apenas do tempo, mas também da posição conforme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = K \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}.$$



Tipos de modelos

- ▶ *Modelos estáticos e dinâmicos.*



Tipos de modelos

- ▶ *Modelos estáticos e dinâmicos.*
- ▶ *Modelos discretos e contínuos.*



Tipos de modelos

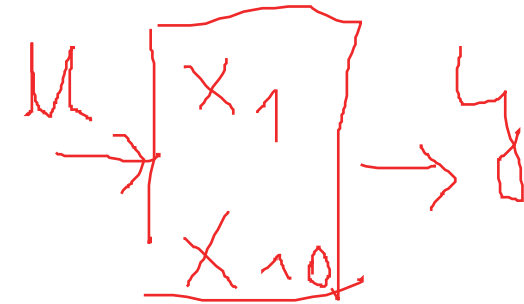
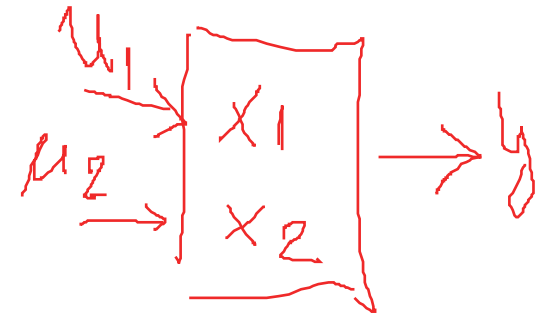
- ▶ *Modelos estáticos e dinâmicos.*
- ▶ *Modelos discretos e contínuos.*
- ▶ *Modelos autônomos e não autônomos.*

Tipos de modelos

MIMO

SISO

- ▶ Modelos estáticos e dinâmicos.
- ▶ Modelos discretos e contínuos.
- ▶ Modelos autônomos e não autônomos.
- ▶ Modelos monovariáveis e multivariáveis.





Tipos de modelos

- ▶ *Modelos estáticos e dinâmicos.*
- ▶ *Modelos discretos e contínuos.*
- ▶ *Modelos autônomos e não autônomos.*
- ▶ *Modelos monovariáveis e multivariáveis.*
- ▶ *Modelos determinísticos e estocásticos.*



Tipos de modelos

- ▶ *Modelos estáticos e dinâmicos.*
- ▶ *Modelos discretos e contínuos.*
- ▶ *Modelos autônomos e não autônomos.*
- ▶ *Modelos monovariáveis e multivariáveis.*
- ▶ *Modelos determinísticos e estocásticos.*
- ▶ *Modelos paramétricos e não paramétricos.*



Modelo discreto de um sistema biológico

Considere a população de besouros. Um modelo simples é

$$L(k + 1) = \nu B(k)$$

$$C(k + 1) = L(k)[1 - \mu_l]$$

$$B(k + 1) = C(k)[1 - \mu_c] + B(k)[1 - \mu_b],$$

sendo L a população de larvas, C número de casulos, B o número de besouros, ν a taxa de natalidade, μ_l , μ_c e μ_b as taxas de mortalidade de larvas, casulos e de besouros.



Modelo não autônomo de sistema biológico

$A(k)$ é a quantidade de agrotóxico aspergido por metro quadrado. Tal agrotóxico somente afeta as larvas matando uma parte delas, então

$$L(k + 1) = \nu B(k)$$

$$C(k + 1) = L(k)[1 - \mu_l - \mu_a A(k)]$$

$$B(k + 1) = C(k)[1 - \mu_c] + B(k)[1 - \mu_b],$$

sendo que μ_a é a taxa de mortalidade devida exclusivamente à ação do agrotóxico.



Modelos monovariáveis e multivariáveis

- ▶ A primeira equação diferencial mostrada é um modelo monovariável de uma entrada, $u(t)$ e uma saída $y(t)$, portanto é um modelo SISO. Os modelos dos besouros podem ser interpretados como modelos multivariáveis.



Modelos monovariáveis e multivariáveis

- ▶ A primeira equação diferencial mostrada é um modelo monovariável de uma entrada, $u(t)$ e uma saída $y(t)$, portanto é um modelo SISO. Os modelos dos besouros podem ser interpretados como modelos multivariáveis.
- ▶ Um modelo estocástico simples
Se o modelo da população de besouros não explica exatamente as observações haverá um erro. Essa diferença reflete incertezas tanto nas medições quanto na própria forma da equação e é normalmente expressa usando-se uma variável aleatória. Portanto,

$$B(k + 1) = C(k)[1 - \mu_c] + B(k)[1 - \mu_b] + e(k + 1).$$



Modelos paramétricos e não pa- ramétricos

O seguinte modelo é paramétrico

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 0,4s + 1}.$$



Modelos paramétricos e não pa- ramétricos

A resposta ao impulso $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ do modelo é

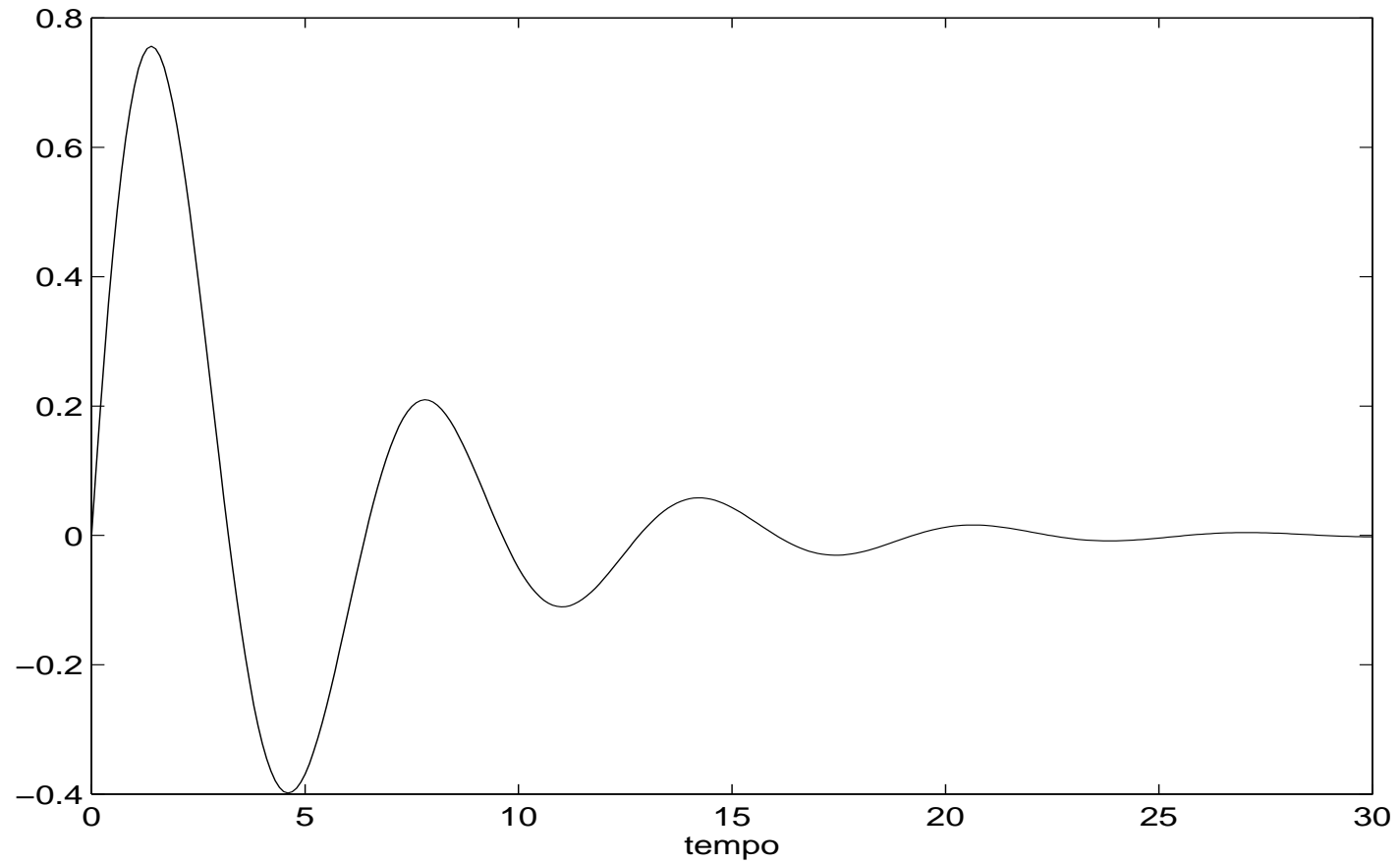
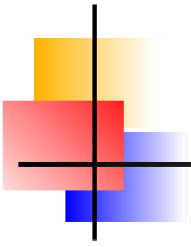


Figura 1: Representações não paramétricas. Resposta ao impulso

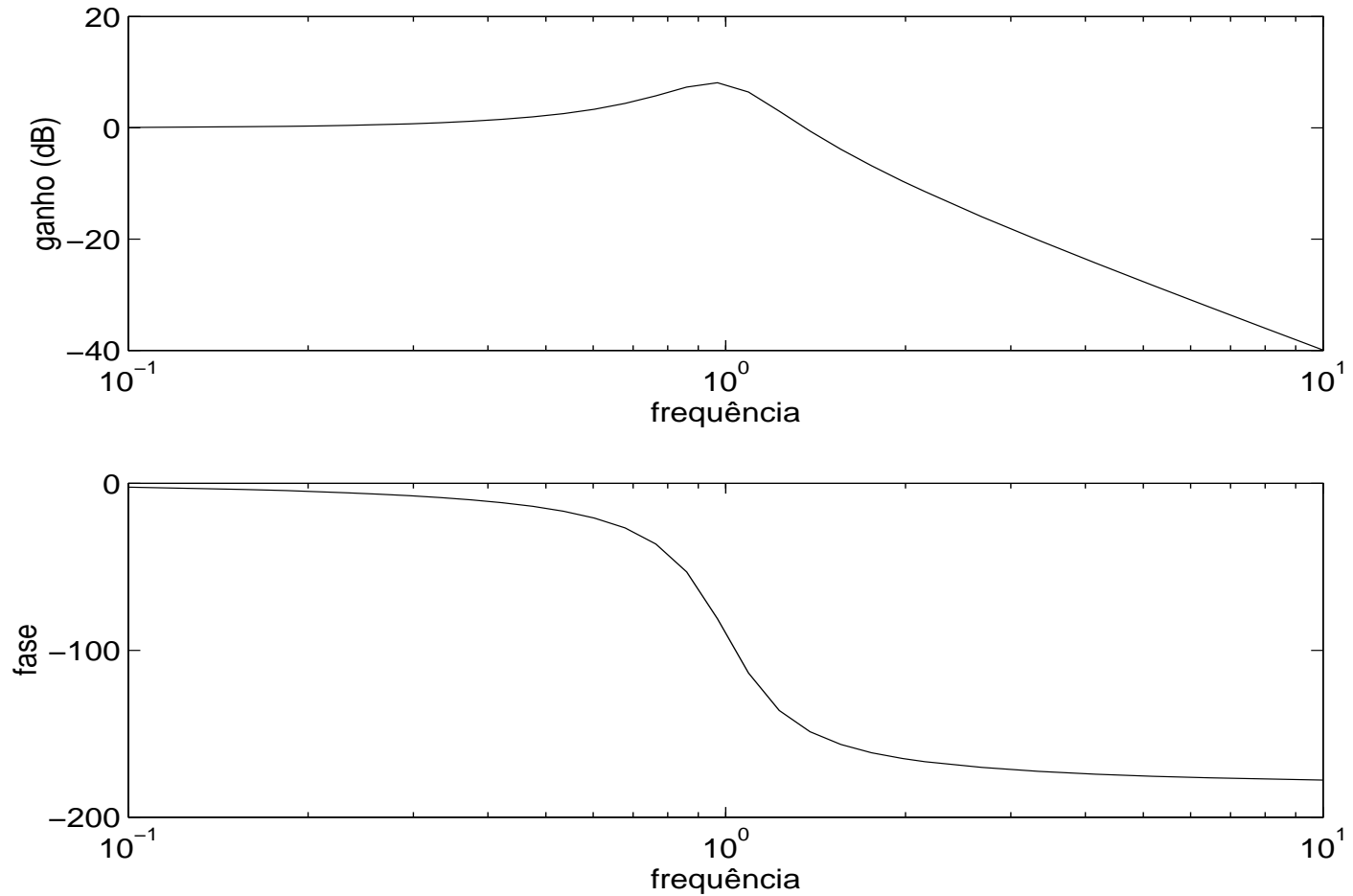
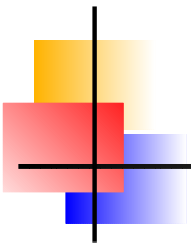


Figura 2: Representações não paramétricas. Resposta em frequência



Representações de modelos lineares

- ▶ *Função de transferência.* A transformada da resposta ao impulso $h(t)$ do sistema. Para um sinal $x(t)$

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt.$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+\infty} X(s)e^{st} ds,$$

sendo $s = \sigma + j\omega$.



Representações de modelos lineares

- ▶ *Função de transferência.* A transformada da resposta ao impulso $h(t)$ do sistema. Para um sinal $x(t)$

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt.$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds,$$

sendo $s = \sigma + j\omega$.

- ▶ No caso discreto usa-se a transformada Z , definida como

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{k=0} x(k)z^{-k}.$$

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)z^{k-1} dz.$$

A transformada de Fourier de $h(t)$ é $H(j\omega)$, a resposta em frequência do sistema.

- 
-
- ▶ A transformada de Fourier de um sinal $x(t)$ é

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt,$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

- 
- ▶ A transformada de Fourier de um sinal $x(t)$ é

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt,$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

- ▶ *Representação no espaço de estados.*

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}),$$

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t)).$$

- 
-
- ▶ Assumindo linearidade e acrescentando o processo de medição

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}.$$

- 
-
- ▶ Assumindo linearidade e acrescentando o processo de medição

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}.$$

- ▶ E para o caso discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = C_d\mathbf{x}(k) + D_d\mathbf{u}(k).$$

- 
- ▶ Assumindo linearidade e acrescentando o processo de medição

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}.$$

- ▶ E para o caso discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = C_d\mathbf{x}(k) + D_d\mathbf{u}(k).$$

- ▶ *Modelos AR e ARX*

$$y(k) = a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + \dots + a_{n_y}y(k-n_y).$$

$$y(k) = a_1y(k-1) + \dots + a_{n_y}y(k-n_y) \\ + b_1u(k-1) + \dots + b_{n_u}u(k-n_u).$$

- Modelo auto-regressivo com média móvel e entrada exógena (ARMAX)

$$Y(z) = (a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_y} z^{-n_y}) G(z) U(z)$$

$$y(k) = a_1 y(k-1) + \dots + a_{n_y} y(k-n_y) + b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_u} u(k-n_u) + c_1 \xi(k-1) + \dots + c_{n_\xi} \xi(k-n_\xi) + \xi(k).$$

$$y \Rightarrow sY(s) - y(0)$$



$$U(s) = \int e^{-sT} u(k) dt$$

$$Z[U(k)] = \sum z^{-k} u(k)$$

$$U(z) = 1 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 3z^{-4}$$

$$Y(z) = U(z) | G(z) |$$

- 
- ▶ *Modelo auto-regressivo com média móvel e entrada exógena (ARMAX)*

$$y(k) = a_1 y(k-1) + \dots + a_{n_y} y(k-n_y) + b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_u} u(k-n_u) + c_1 \xi(k-1) + \dots + c_{n_\xi} \xi(k-n_\xi) + \xi(k).$$

- ▶ Um modelo discreto é

$$H(z) = \frac{0,1075z^2 + 0,2151z + 0,1075}{z^2 - 1,6129z + 0,8280},$$

cuja resposta ao impulso é

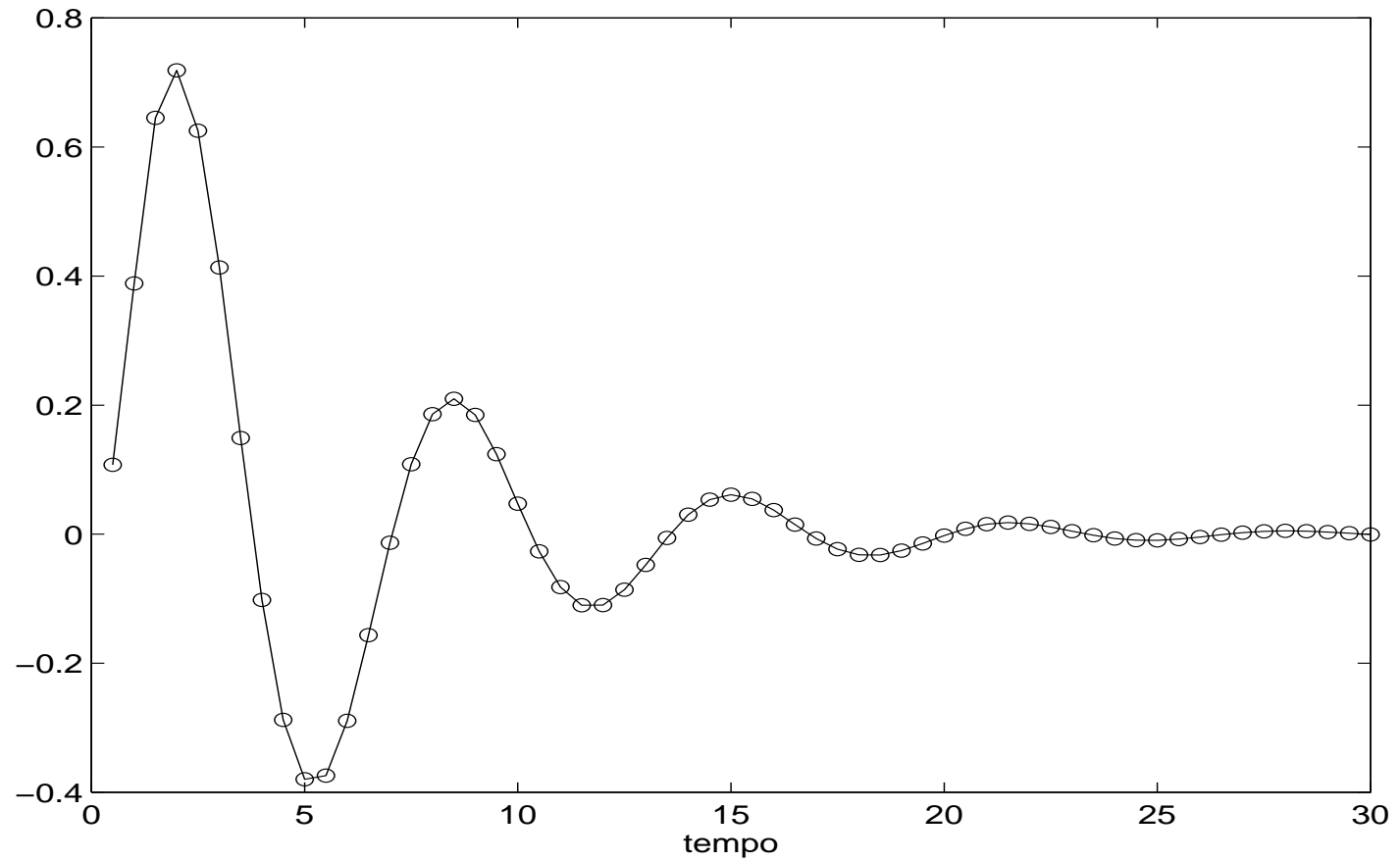
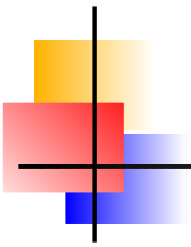


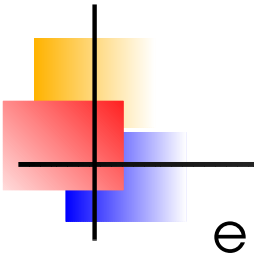
Figura 3: Resposta ao impulso de um modelo discreto



Modelos em espaço de estados

Os modelos da população de besouros podem ser representados no espaço de estados como

$$\begin{bmatrix} L(k+1) \\ C(k+1) \\ B(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \nu \\ 1 - \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \mu_c & 1 - \mu_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L(k) \\ C(k) \\ B(k) \end{bmatrix},$$



$$\begin{bmatrix} L(k+1) \\ C(k+1) \\ B(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \nu \\ 1 - \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \mu_c & 1 - \mu_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L(k) \\ C(k) \\ B(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -L(k)\mu_a \\ 0 \end{bmatrix} A(k).$$



Modelo ARX de conversor buck

Um modelo ARX de um conversor CC-CC buck é

$$y(k) = 1,7649y(k-1) - 0,8027y(k-2) + 0,8661u(k-3) \\ - 0,73578u(k-1) + 0,07513u(k-2) + \xi(k),$$

Estimação de parâmetros de uma reta

$f(\cdot)$ pode ser bem aproximada por uma reta. Assim, $\hat{f}(\cdot)$ é a função estimada, ou seja, $y = \theta_1 + \theta_2 x$.

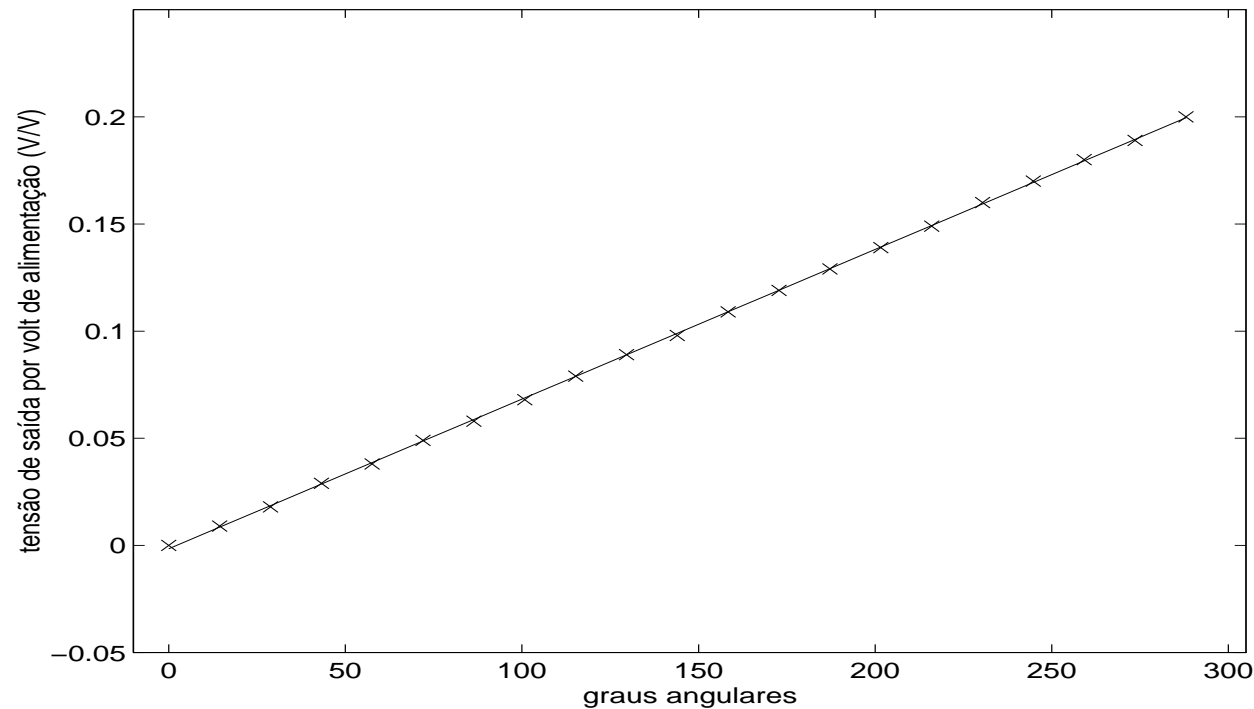
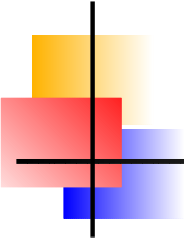
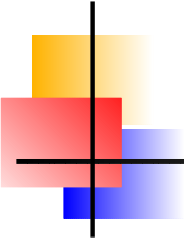
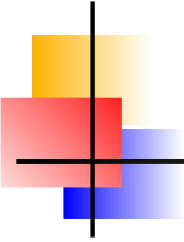


Figura 4: Os dados medidos (x), e a reta ajustada usando regressão linear (-). Esta reta é parametrizada por $[\theta_1 \ \theta_2]^T$, sendo $\theta_1 = -1,55 \times 10^{-3}$ o valor de y quando $x = 0$ e $\theta_2 = 6,98 \times 10^{-4}$ é a inclinação da reta.

- 
-
- ▶ A estimação de parâmetros é uma etapa que sucede a escolha da função $\hat{f}(\cdot)$.

- 
-
- ▶ A estimação de parâmetros é uma etapa que sucede a escolha da função $\hat{f}(\cdot)$.
 - ▶ A escolha de uma aproximação de $f(\cdot)$ foi fácil nesse exemplo.

- 
-
- ▶ A estimação de parâmetros é uma etapa que sucede a escolha da função $\hat{f}(\cdot)$.
 - ▶ A escolha de uma aproximação de $f(\cdot)$ foi fácil nesse exemplo.
 - ▶ A função $\hat{f}(\cdot)$ é *linear nos parâmetros* θ_1 e θ_2 . Ela pode ser decomposta da seguinte forma $y = [1 \ x][\theta_1 \ \theta_2]^T$.



Cálculo dos parâmetros de uma reta

- ▶ O uso de dois pontos resultará no sistema de duas equações

$$y_1 = \theta_1 + x_1\theta_2$$

$$y_2 = \theta_1 + x_2\theta_2.$$



Cálculo dos parâmetros de uma reta

- ▶ O uso de dois pontos resultará no sistema de duas equações

$$y_1 = \theta_1 + x_1\theta_2$$

$$y_2 = \theta_1 + x_2\theta_2.$$

- ▶ Tomando os pontos $(x_1, y_1) = (144,0; 0,098)$ e $(x_2, y_2) = (158,4; 0,109)$ do conjunto de medidas, tem-se

$$\begin{bmatrix} 0,098 \\ 0,109 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 144,0 \\ 1 & 158,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}.$$



Cálculo dos parâmetros de uma reta

- ▶ O uso de dois pontos resultará no sistema de duas equações

$$y_1 = \theta_1 + x_1\theta_2$$

$$y_2 = \theta_1 + x_2\theta_2.$$

- ▶ Tomando os pontos $(x_1, y_1) = (144,0; 0,098)$ e $(x_2, y_2) = (158,4; 0,109)$ do conjunto de medidas, tem-se

$$\begin{bmatrix} 0,098 \\ 0,109 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 144,0 \\ 1 & 158,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}.$$

- ▶ Portanto,
- $$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,00 & -10,00 \\ -0,069 & 0,069 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,098 \\ 0,109 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,200 \times 10^{-2} \\ 7,639 \times 10^{-4} \end{bmatrix}.$$

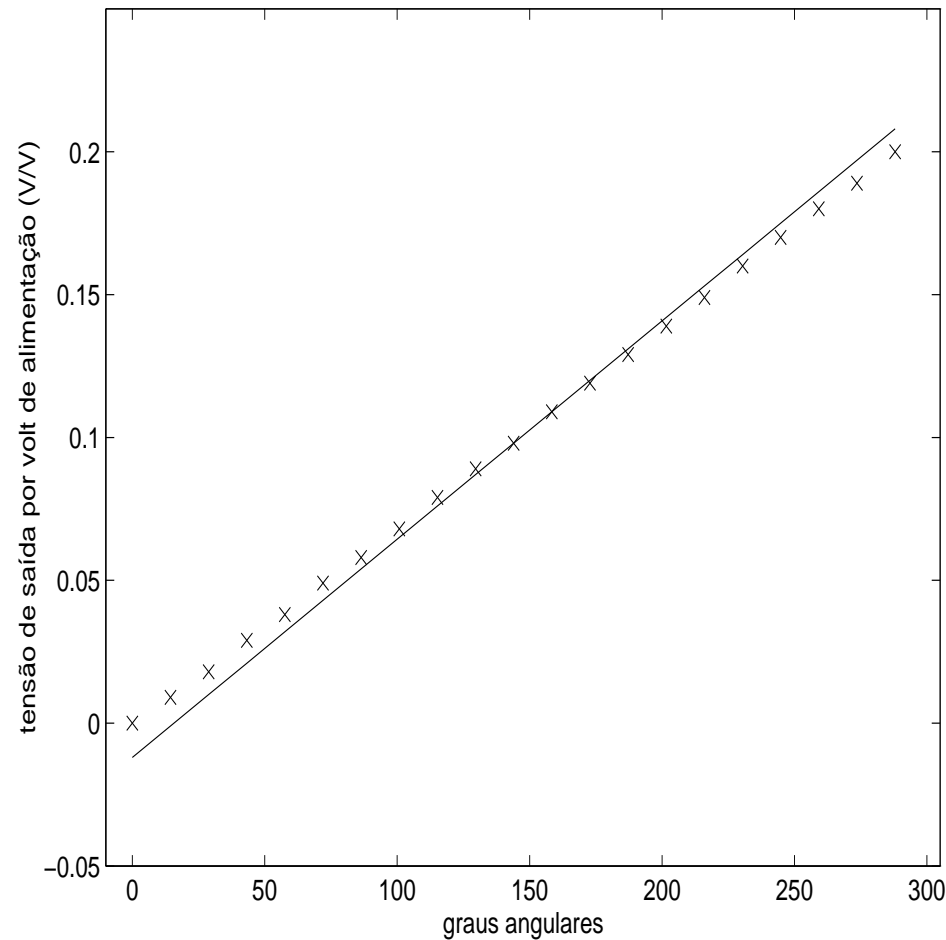
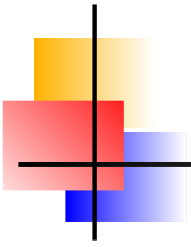


Figura 5: Determinação exata dos parâmetros de uma reta. Dados medidos são marcados com cruces, e a reta $y = -1,200 \times 10^{-2} + 7,639 \times 10^{-4}x$, com traço.

Modelagem Baseada na Física do Processo

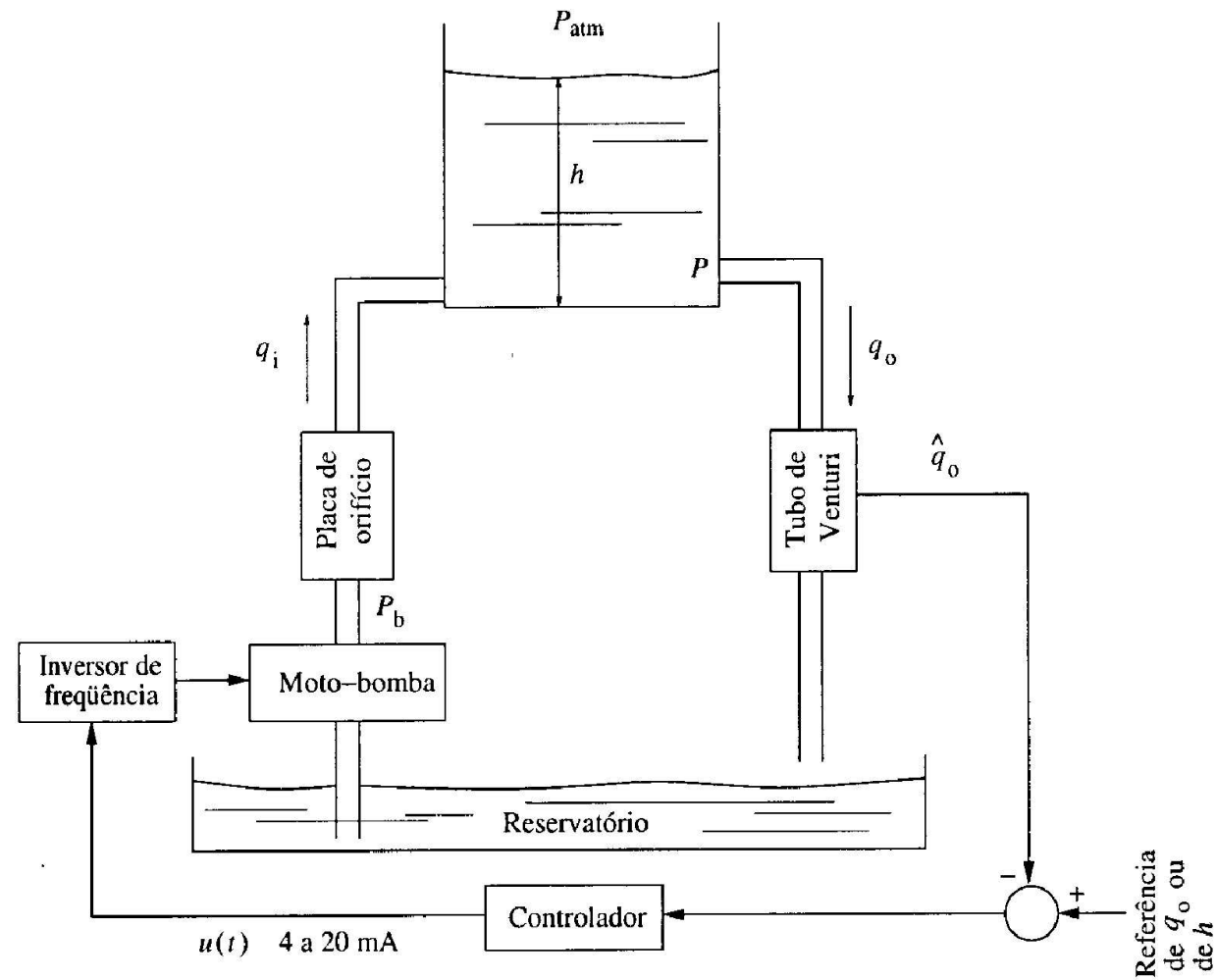


Figura 6: Esquema da planta de bombeamento.



Modelagem Baseada na Física do Processo

Considerações simplificadoras:

- ▶ o sistema será considerado a parâmetros concentrados;



Modelagem Baseada na Física do Processo

Considerações simplificadoras:

- ▶ o sistema será considerado a parâmetros concentrados;
- ▶ a perda de carga dentro dos dutos será desprezada;



Modelagem Baseada na Física do Processo

Considerações simplificadoras:

- ▶ o sistema será considerado a parâmetros concentrados;
- ▶ a perda de carga dentro dos dutos será desprezada;
- ▶ a área do tanque é constante;



Modelagem Baseada na Física do Processo

Considerações simplificadoras:

- ▶ o sistema será considerado a parâmetros concentrados;
- ▶ a perda de carga dentro dos dutos será desprezada;
- ▶ a área do tanque é constante;
- ▶ a dinâmica do inversor e do conjunto moto-bomba pode ser desprezada;



Modelagem Baseada na Física do Processo

Considerações simplificadoras:

- ▶ o sistema será considerado a parâmetros concentrados;
- ▶ a perda de carga dentro dos dutos será desprezada;
- ▶ a área do tanque é constante;
- ▶ a dinâmica do inversor e do conjunto moto-bomba pode ser desprezada;
- ▶ a água é incompressível e seu peso específico não varia;



Modelagem Baseada na Física do Processo

Considerações simplificadoras:

- ▶ o sistema será considerado a parâmetros concentrados;
- ▶ a perda de carga dentro dos dutos será desprezada;
- ▶ a área do tanque é constante;
- ▶ a dinâmica do inversor e do conjunto moto-bomba pode ser desprezada;
- ▶ a água é incompressível e seu peso específico não varia;
- ▶ a pressão atmosférica em cada ponto da planta piloto é a mesma.



A equação diferencial

- ▶ O ponto de partida na modelagem deste sistema é

$$\frac{dm}{dt} = \omega_i - \omega_o,$$



A equação diferencial

- ▶ O ponto de partida na modelagem deste sistema é

$$\frac{dm}{dt} = \omega_i - \omega_o,$$

- ▶ Como $m = V\rho$ e a área do tanque é constante, tem-se

$$m = Ah\rho,$$

ρ é a massa específica e h é a altura.



A equação diferencial

- ▶ O ponto de partida na modelagem deste sistema é

$$\frac{dm}{dt} = \omega_i - \omega_o,$$

- ▶ Como $m = V\rho$ e a área do tanque é constante, tem-se

$$m = Ah\rho,$$

ρ é a massa específica e h é a altura.

- ▶ Podemos escrever

$$\begin{aligned}\rho A \frac{dh}{dt} &= q_i \rho - q_o \rho \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{q_i - q_o}{A},\end{aligned}$$

q_i e q_o : vazões volumétricas.



Relações algébricas

▶ Usando a lei de Bernoulli, tem-se

$$q = k\sqrt{\Delta P}.$$



Relações algébricas

- ▶ Usando a lei de Bernoulli, tem-se

$$q = k\sqrt{\Delta P}.$$

- ▶ Para a tubulação de saída de água, tem-se

$$q_o = k_o\sqrt{P - P_{\text{atm}}}.$$



Relações algébricas

- ▶ Usando a lei de Bernoulli, tem-se

$$q = k\sqrt{\Delta P}.$$

- ▶ Para a tubulação de saída de água, tem-se

$$q_o = k_o\sqrt{P - P_{\text{atm}}}.$$

- ▶ Para o duto de recalque, tem-se

$$q_i = k_i\sqrt{P_b - P}.$$

- 
- ▶ Usando-se o peso específico da água γ , tem-se

$$P = \gamma h + P_{\text{atm}},$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{k_i \sqrt{P_b - \gamma h - P_{\text{atm}}} - k_o \sqrt{\gamma h}}{A}.$$

A partir da geometria do tanque, os valores aproximados destes parâmetros são: $A = 2,5 \text{ m}^2$, $P_{\text{atm}} = 10.300 \text{ kgf/m}^2$ e $\gamma = 1000 \text{ kgf/m}^3$.

- 
- ▶ Usando-se o peso específico da água γ , tem-se

$$P = \gamma h + P_{\text{atm}},$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{k_i \sqrt{P_b - \gamma h - P_{\text{atm}}} - k_o \sqrt{\gamma h}}{A}.$$

A partir da geometria do tanque, os valores aproximados destes parâmetros são: $A = 2,5 \text{ m}^2$, $P_{\text{atm}} = 10.300 \text{ kgf/m}^2$ e $\gamma = 1000 \text{ kgf/m}^3$.

- ▶ Os parâmetros k_i e k_o precisam ser determinados.

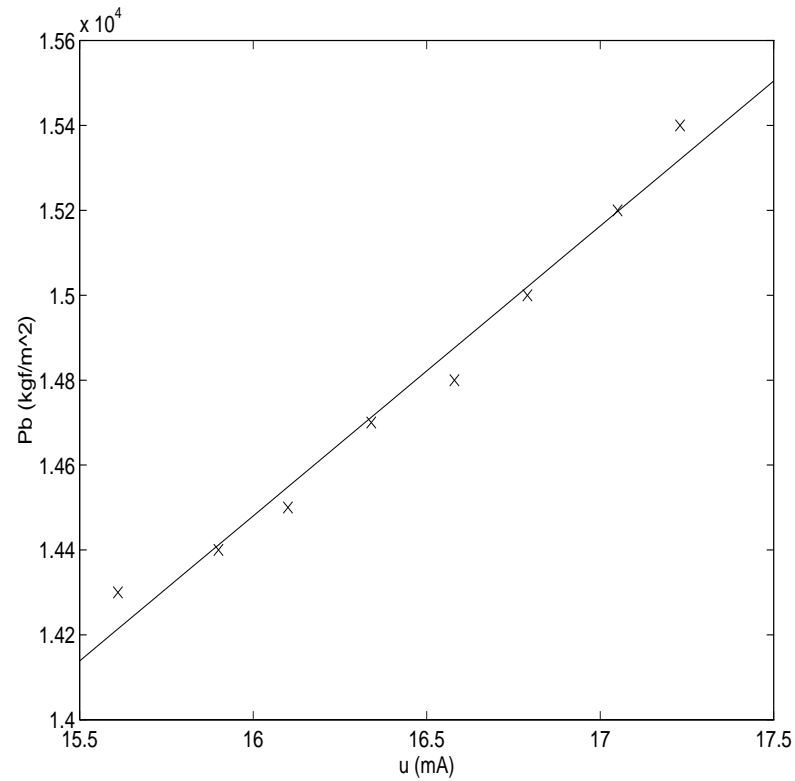
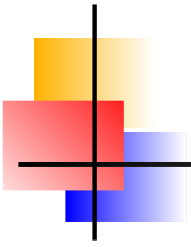
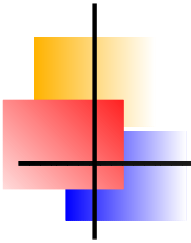


Figura 7: Relação entre sinal de comando do inversor e pressão na saída da bomba. Os dados medidos são marcados com (x), e a reta ajustada usando regressão linear, com (-).

$$P_b = 3554,9 + 682,8 u(t).$$



A saída de água do tanque está localizada a 0,114 m do fundo. É necessário determinar K que, adicionado ao modelo, resultará em $dh/dt = 0$ para $h = 0$. Portanto,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{k_i \sqrt{P_b^* - P_{\text{atm}}}}{A} + K = 0$$
$$K = -\frac{k_i \sqrt{P_b^* - P_{\text{atm}}}}{A},$$

sendo que $P_b^* = 14.213,4 \text{ kgf/m}^2$.



Determinação de parâmetros

Para o duto de entrada obteve-se

$$q_i = -1,87 \times 10^{-2} + 5,60 \times 10^{-4} \sqrt{P_b - \gamma h - P_{\text{atm}}},$$

portanto $k_i = dq_i/d\sqrt{P_b - \gamma h - P_{\text{atm}}} = 5,60 \times 10^{-4} \text{ m}^4/\text{s}(\text{kgf})^{1/2}$.

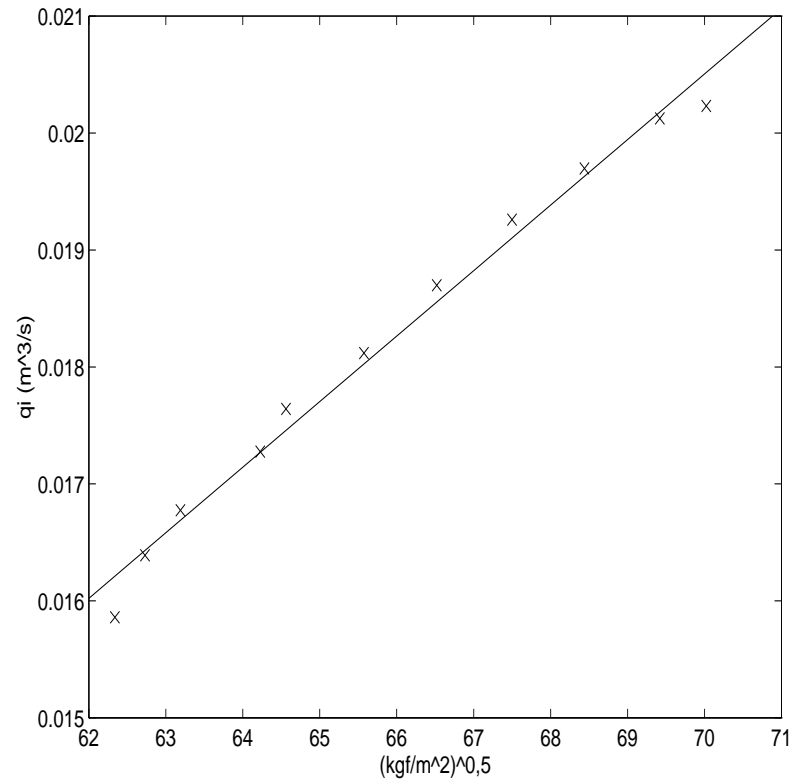
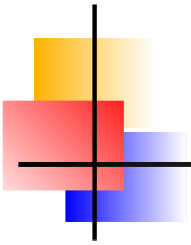


Figura 8: Dados medidos (x), a reta ajustada usando regressão linear(-). O eixo das abcissas é $(P_b - \gamma h - P_{\text{atm}})^{1/2}$. A inclinação da reta ajustada é uma estimativa de k_i .



Para o duto de deságüe, obteve-se

$$q_o = 1,59 \times 10^{-2} + 3,06 \times 10^{-5} \sqrt{\gamma h} + 6,26 \times 10^{-6} \gamma h, \quad (-37)$$

$$\text{logo, } k_o = d q_o / d \sqrt{\gamma h} = 3,06 \times 10^{-5} + 1,25 \times 10^{-5} \sqrt{\gamma h} \text{ m}^4/\text{s}(\text{kgf})^{1/2}.$$

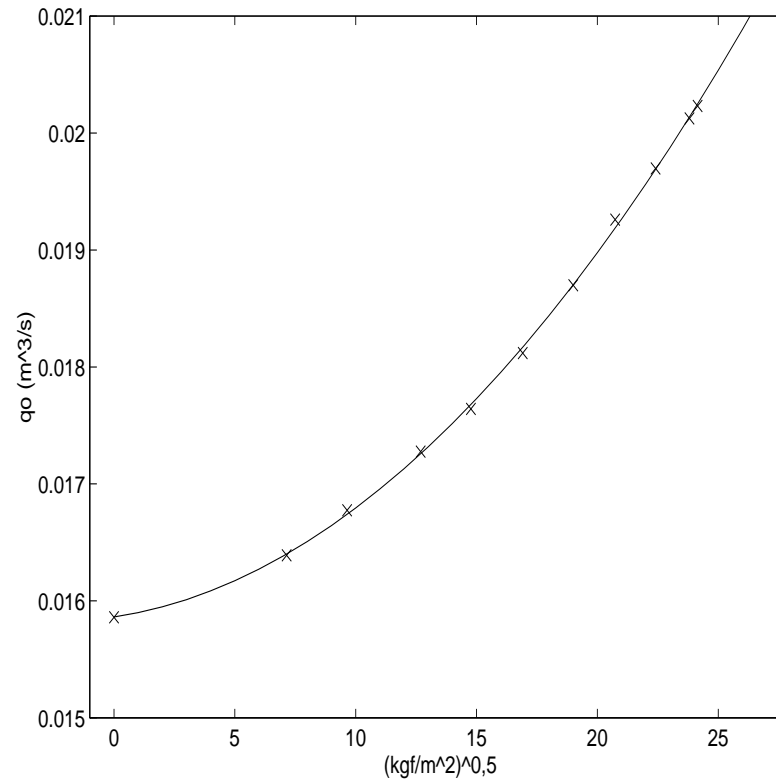
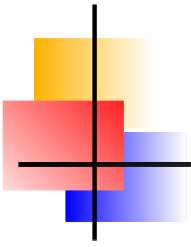


Figura 9: Os dados medidos são marcados com (x), e a reta ajustada usando regressão linear, com (–). O eixo das abcissas é $(\gamma h)^{1/2}$. A derivada da função ajustada é uma estimativa de k_o .



Finalmente, tem-se

$$\frac{dh}{dt} = \frac{5,60 \times 10^{-4} \sqrt{3554,9 + 682,8 u(t) - 1000h - 10300}}{A} - \frac{(3,06 \times 10^{-5} + 1,25 \times 10^{-5} \sqrt{1000h}) \sqrt{1000h}}{A} - 0,014$$

que pode ser simulado usando-se os seguintes arquivos:
eq_bomb, sim_bomb, ens_25 e ens_26 📄.

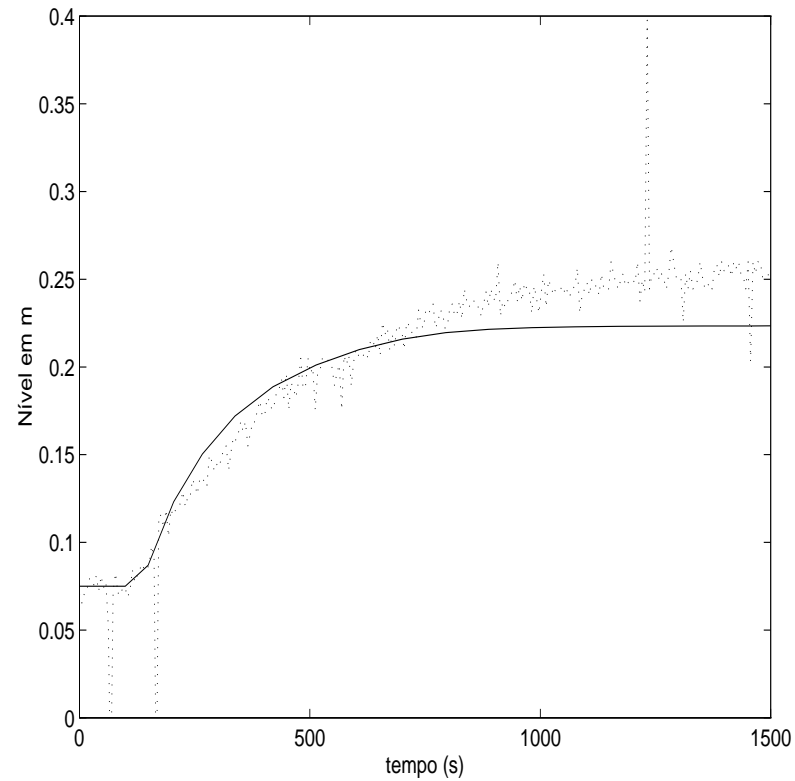
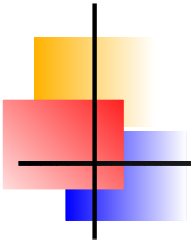


Figura 10: Resposta da vazão a uma variação em degrau do sinal de entrada $u(t)$. Dados medidos são indicados por (- -), e (-) representam os dados obtidos usando-se o modelo. Os picos são devidos ao ruído induzido no processo de medição.



▶ *Ajuste da constante de tempo.* $\dot{h}_{\text{sintonizado}} = 0,4 \dot{h}$.

- 
-
- ▶ *Ajuste da constante de tempo.* $\dot{h}_{\text{sintonizado}} = 0,4 \dot{h}$.
 - ▶ *Ajuste do ganho.* Aumentar a amplitude do degrau de entrada de 16,34 mA a 17,05 mA, visto pelo modelo, para 16,34 mA a $1,012 \times 17,05$ mA.

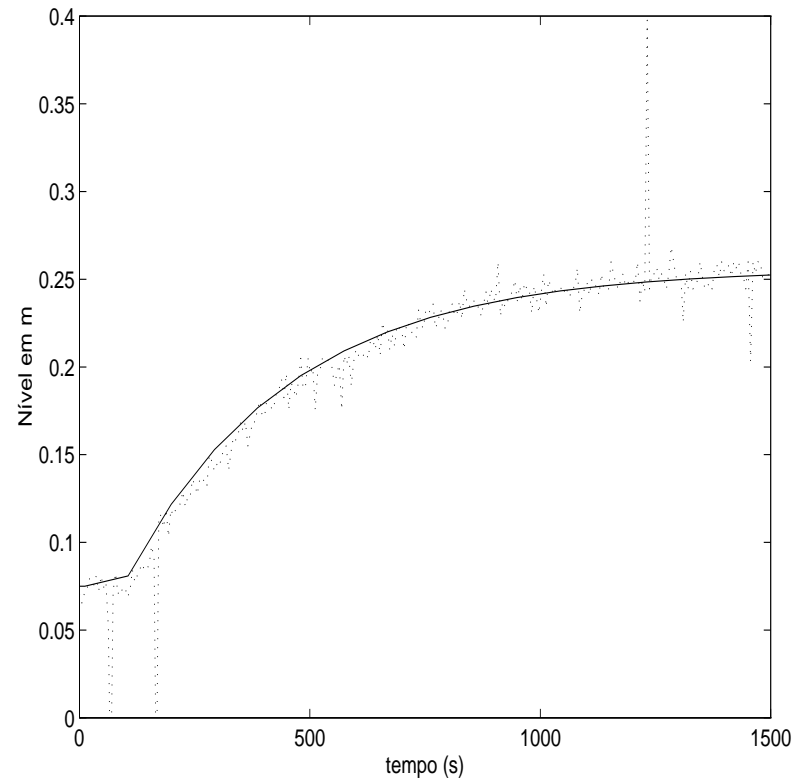
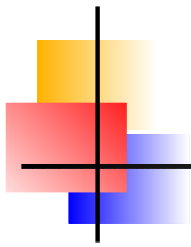


Figura 10: Resposta da vazão a uma variação em degrau do sinal de entrada $u(t)$. Dados medidos são indicados por (- -) e (-) representam os dados obtidos usando-se o modelo sintonizado (com ajustes).

Validação

Os ajustes descritos foram eficazes, mas quão gerais são esses ajustes?

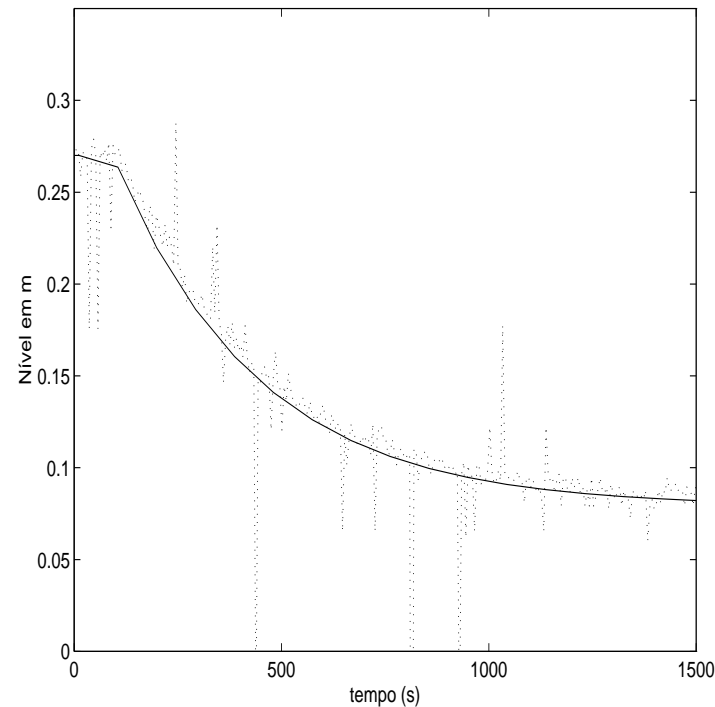


Figura 11: Resposta da vazão a uma variação em degrau do sinal de entrada $u(t)$ diferente daquela usada para sintonizar o modelo. Dados medidos são indicados por (- -), e (-) representam os dados obtidos usando-se o modelo sintonizado anteriormente.



Identificação de Sistemas

Identificação de sistemas é um procedimento alternativo que se propõe a obter um modelo matemático que explique a relação de causa e efeito presente nos dados.

Tenta-se responder à pergunta:

Que modelo há que, ao ser excitado pela entrada $u(k)$, resulta na saída $y(k)$?



As principais etapas de um problema de identificação são:

- ▶ *Testes dinâmicos e coleta de dados;*



As principais etapas de um problema de identificação são:

- ▶ *Testes dinâmicos e coleta de dados;*
- ▶ *Escolha da representação matemática a ser usada;*



As principais etapas de um problema de identificação são:

- ▶ *Testes dinâmicos e coleta de dados;*
- ▶ *Escolha da representação matemática a ser usada;*
- ▶ *Determinação da estrutura do modelo;*



As principais etapas de um problema de identificação são:

- ▶ *Testes dinâmicos e coleta de dados;*
- ▶ *Escolha da representação matemática a ser usada;*
- ▶ *Determinação da estrutura do modelo;*
- ▶ *Estimação de parâmetros;*



As principais etapas de um problema de identificação são:

- ▶ *Testes dinâmicos e coleta de dados;*
- ▶ *Escolha da representação matemática a ser usada;*
- ▶ *Determinação da estrutura do modelo;*
- ▶ *Estimação de parâmetros;*
- ▶ *Validação do modelo.*

Dados de identificação

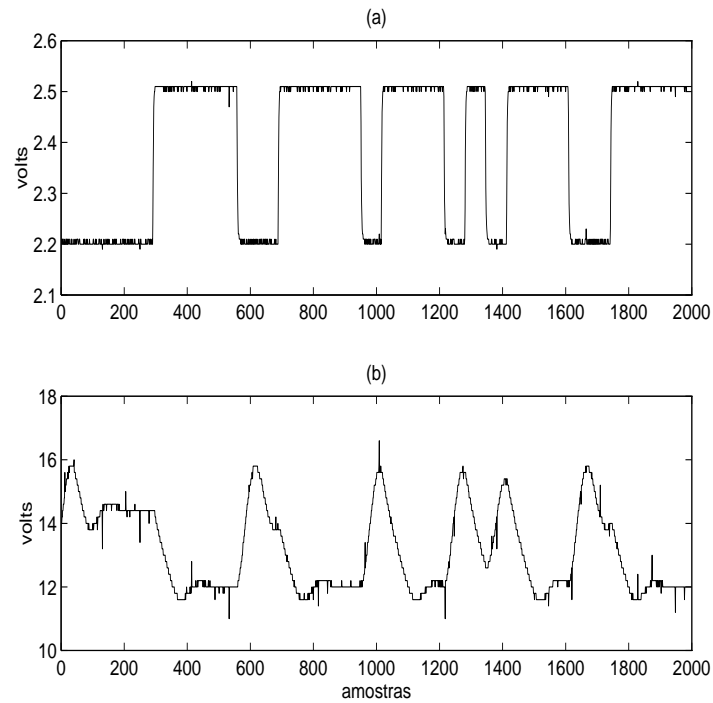


Figura 12: Dados de entrada e saída de um conversor buck. (a) sinal de entrada, tensão que define a razão cíclica do conversor, e (b) sinal de saída, tensão elétrica na saída do conversor



Simulação de Modelos

A fim de avaliar o desempenho de um modelo, é necessário simulá-lo, ou seja, é necessário resolver as equações que compõem o modelo. A forma de simular um modelo vai depender da representação utilizada.



Modelos contínuos

A simulação de modelos contínuos normalmente envolve a solução de equações diferenciais do tipo $\dot{x} = f(x, t)$.

- ▶ A aproximação explícita de Euler é

$$\dot{x}(t_k) \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{T}.$$



Modelos contínuos

A simulação de modelos contínuos normalmente envolve a solução de equações diferenciais do tipo $\dot{x} = f(x, t)$.

- ▶ A aproximação explícita de Euler é

$$\dot{x}(t_k) \approx \frac{x(k+1) - x(k)}{T}.$$

- ▶ A aproximação implícita de Euler é

$$\dot{x}(t_k) \approx \frac{x(k) - x(k-1)}{T},$$

sendo que T é o intervalo de integração.

- 
-
- ▶ Tais aproximações resultam nas seguintes fórmulas de integração numérica:

$$x(k) = x(k - 1) + T f(x(k - 1), t_{k-1}),$$

$$x(k) = x(k - 1) + T f(x(k), t_k).$$



Simulação usando a fórmula de Euler

Seja a equação diferencial $\dot{x} = -6x + 5e^{-t}$. Para $T = 0,3$, a aproximação explícita de Euler resulta em

$$x(k) = x(k-1) + 0,3 \left(-6x(k-1) + 5e^{-t_{k-1}} \right).$$

Para resolver a equação diferencial $\dot{x} = -6x + 5e^{-t}$ usando a equação acima, basta escolher uma condição inicial $x(0)$ e resolver tal equação para $k = 1, 2, \dots$



Runge-Kutta

Um dos algoritmos de integração numérica mais utilizados na simulação de modelos contínuos é o algoritmo de *Runge-Kutta de quarta ordem*:

$$A = f(x(k-1), t_{k-1})$$

$$B = f\left(x(k-1) + \frac{T}{2}A, t_{k-1} + \frac{T}{2}\right)$$

$$C = f\left(x(k-1) + \frac{T}{2}B, t_{k-1} + \frac{T}{2}\right)$$

$$D = f(x(k-1) + TC, t_{k-1} + T)$$

$$x(k) = x(k-1) + \frac{T}{6}(A + 2B + 2C + D).$$

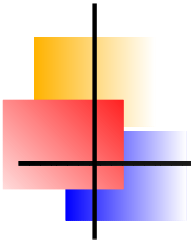


Modelos discretos

- ▶ Não requer nenhum algoritmo especial.

- ▶ Não requer nenhum algoritmo especial.
- ▶ Simulação de modelo ARX
Seja o modelo de um conversor CC-CC

$$y(k) = 1,7649y(k-1) - 0,8027y(k-2) + 0,8661u(k-3) \\ - 0,73578u(k-1) + 0,07513u(k-2) + \xi(k),$$



Escolhendo-se a condição inicial $y(1) = y(2) = 14 \text{ V}$ e a entrada $u(0) = u(1) = 2,3 \text{ V}$, $u(2) = u(3) = 2,4 \text{ V}$ etc, tem-se

$$y(3) = 1,7649(14) - 0,8027(14) + 0,8661(2,3) \\ - 0,73578(2,4) + 0,07513(2,3) = 13,8698$$

$$y(4) = 1,7649(13,8698) - 0,8027(14) + 0,8661(2,3) \\ - 0,73578(2,4) + 0,07513(2,4) = 13,6474$$

$$y(5) = 1,7649(13,6474) - 0,8027(13,8698) + 0,8661(2,4) \\ - 0,73578(2,3) + 0,07513(2,4) = 13,5197$$

$$y(6) = 1,7649(13,5197) - 0,8027(13,6474) + 0,8661(2,4) \\ - 0,73578(2,4) + 0,07513(2,3) = 13,3917$$

⋮ ⋮

$y(1), y(2), \dots$ é a resposta do modelo à entrada $u(0), u(1), \dots$