

# *Projeto de Testes e Escolha de Estruturas*

Eduardo Mendes

`emmendes@cpdee.ufmg.br`

Departamento de Engenharia Eletrônica  
Universidade Federal de Minas Gerais  
Av. Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte, MG, Brasil



# Introdução

---

- ▶ O presente capítulo trata de questões referente à coleta dos sinais necessários à identificação e de como proceder a escolha da estrutura do modelo. Pretende-se descrever algumas ferramentas que podem auxiliar em decisões que dizem respeito ao projeto de testes, à escolha da estrutura do modelo e à determinação da taxa de amostragem.



## *Escolha e Coleta de Sinais*

---

- ▶ Três aspectos fundamentais em identificação de sistemas são: onde excitar a planta, que tipo de sinais usar a fim de obter dados que sejam representativos dessa dinâmica e como amostrar tais dados.



## *Escolha de entradas e de saídas*

---

- ▶ Ao se buscar um modelo matemático que relacione dinamicamente duas variáveis de um sistema, parte-se do pressuposto de que há correlação significativa entre tais variáveis que justifique o modelo.



## *Escolha de sinais de entrada*

---

- ▶ A persistência de excitação tem interpretações numéricas bem como dinâmicas;



## *Escolha de sinais de entrada*

---

- ▶ A persistência de excitação tem interpretações numéricas bem como dinâmicas;
- ▶ sinais aleatórios e pseudo-aleatórios são comuns;



## *Escolha de sinais de entrada*

---

- ▶ A persistência de excitação tem interpretações numéricas bem como dinâmicas;
- ▶ sinais aleatórios e pseudo-aleatórios são comuns;
- ▶ no caso de sistemas com múltiplas entradas, além de tais entradas precisarem ser persistentemente excitantes, não devem estar correlacionadas entre si;



## *Escolha de sinais de entrada*

---

- ▶ A persistência de excitação tem interpretações numéricas bem como dinâmicas;
- ▶ sinais aleatórios e pseudo-aleatórios são comuns;
- ▶ no caso de sistemas com múltiplas entradas, além de tais entradas precisarem ser persistentemente excitantes, não devem estar correlacionadas entre si;
- ▶ na identificação de dinâmica linear o importante é a largura do espectro do sinal de entrada;





## *Escolha de sinais de entrada*

---

- ▶ A persistência de excitação tem interpretações numéricas bem como dinâmicas;
- ▶ sinais aleatórios e pseudo-aleatórios são comuns;
- ▶ no caso de sistemas com múltiplas entradas, além de tais entradas precisarem ser persistentemente excitantes, não devem estar correlacionadas entre si;
- ▶ na identificação de dinâmica linear o importante é a largura do espectro do sinal de entrada;
- ▶ na identificação de sistemas não-lineares o perfil de amplitude torna-se importante também.



## *Exemplo - Escolha de variáveis de entrada*

---

- ▶ Foram usados dados reais coletados na unidade de tratamento de águas ácidas de uma refinaria de petróleo. São 991 observações de oito variáveis do processo.



## Exemplo - Escolha de variáveis de entrada

---

- ▶ Foram usados dados reais coletados na unidade de tratamento de águas ácidas de uma refinaria de petróleo. São 991 observações de oito variáveis do processo.
- ▶ O objetivo final era a obtenção de um modelo que explicasse a temperatura no topo da torre (saída do modelo). As sete variáveis restantes se qualificam como entradas? Haveria redundância entre tais variáveis?

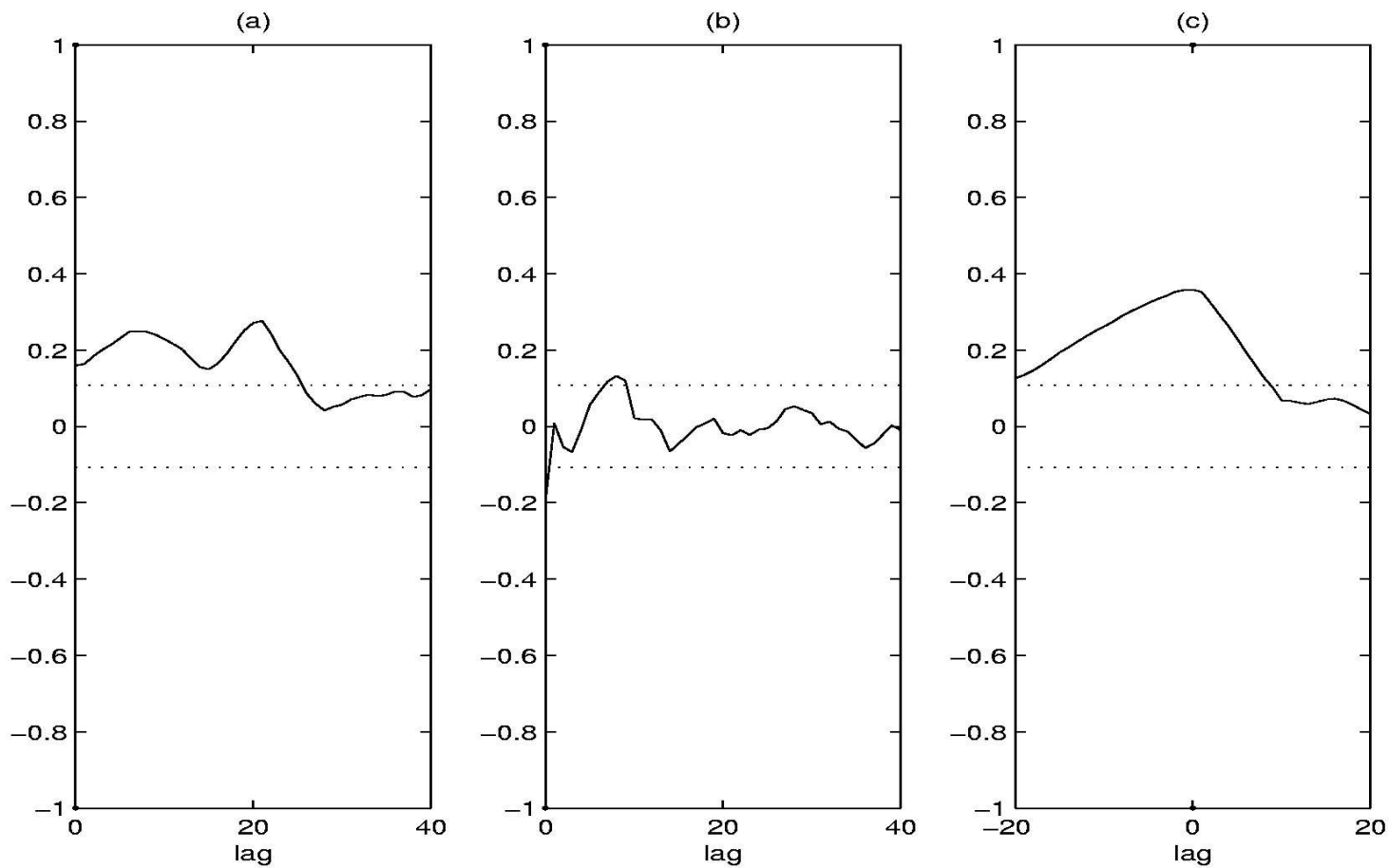
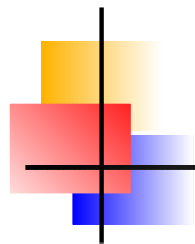


Figura 1: Funções de correlação cruzada (a,b) entre a variável de saída e duas variáveis candidatas a serem entradas, (c) entre (outras) duas variáveis candidatas a serem entradas.



## Exemplo - Sinais de excitação para um oscilador não-linear

---

- ▶ Esse oscilador pode ser descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\ddot{y} + k\dot{y} + y^3 = u(t),$$

sendo que no presente exemplo  $k = 0, 1$ .



## Exemplo - Sinais de excitação para um oscilador não-linear

---

- ▶ Esse oscilador pode ser descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\ddot{y} + k\dot{y} + y^3 = u(t),$$

sendo que no presente exemplo  $k = 0, 1$ .

- ▶ Mesmo sendo excitado por uma única frequência, o espectro do sinal de saída do sistema é bastante amplo. Em alguns casos basta um sinal simples, mas de amplitude e frequência bem determinadas, para excitar um sistema não-linear razoavelmente bem.

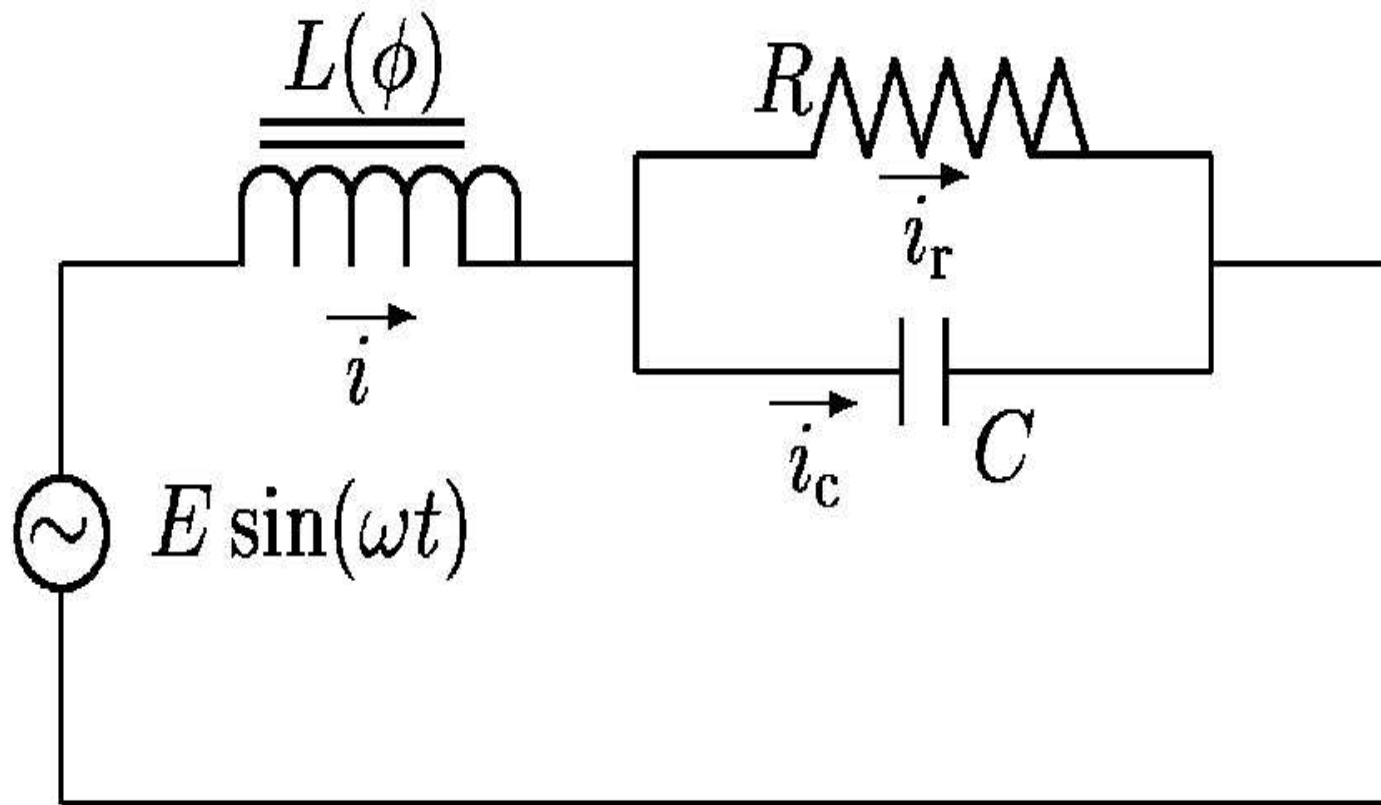
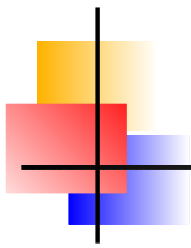


Figura 2: Circuito do oscilador de Duffing-Ueda.

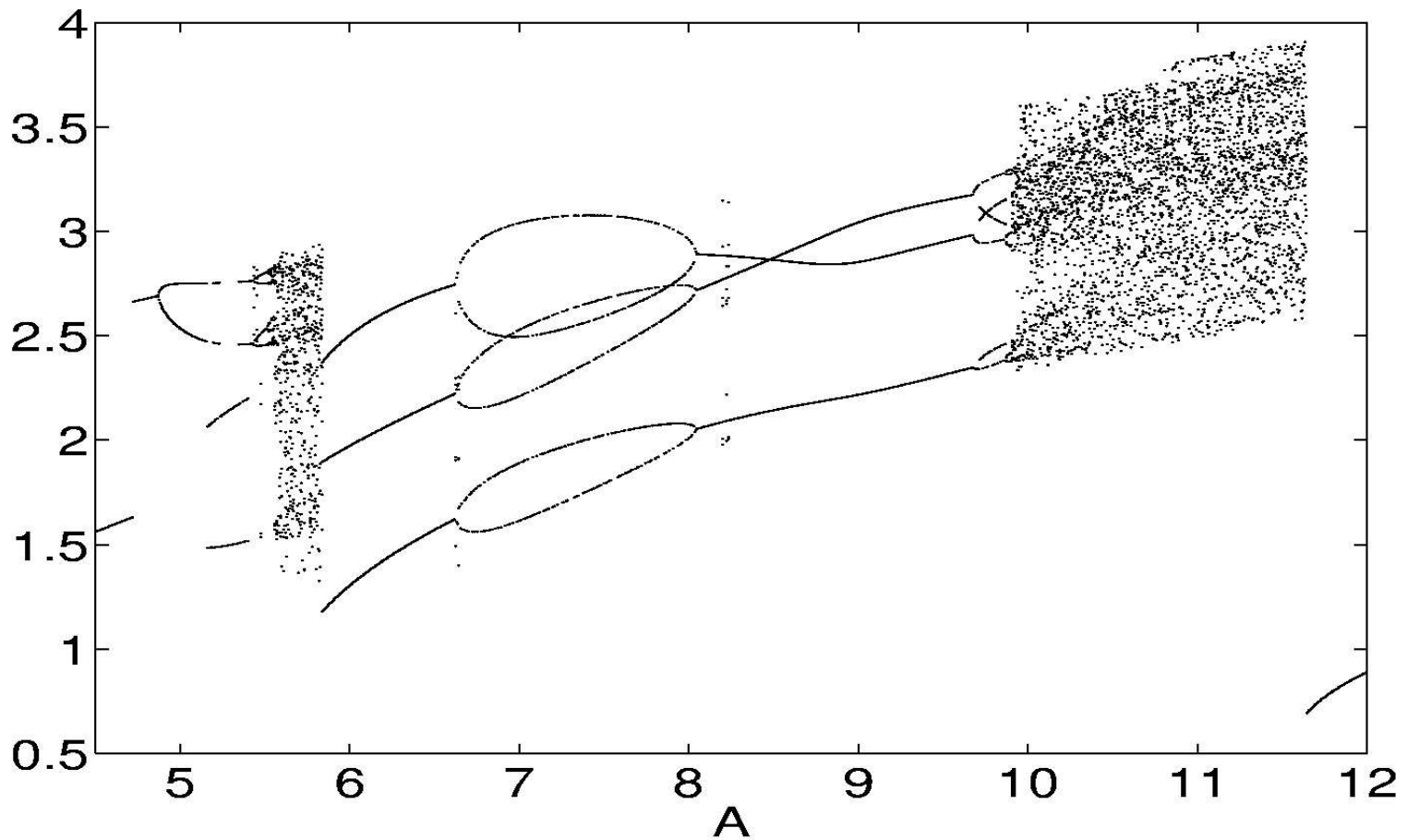


Figura 3: Diagrama de bifurcação do oscilador Duffing-Ueda, com entrada  $u(t) = A \cos t$  e  $4,5 \leq A \leq 12$ .



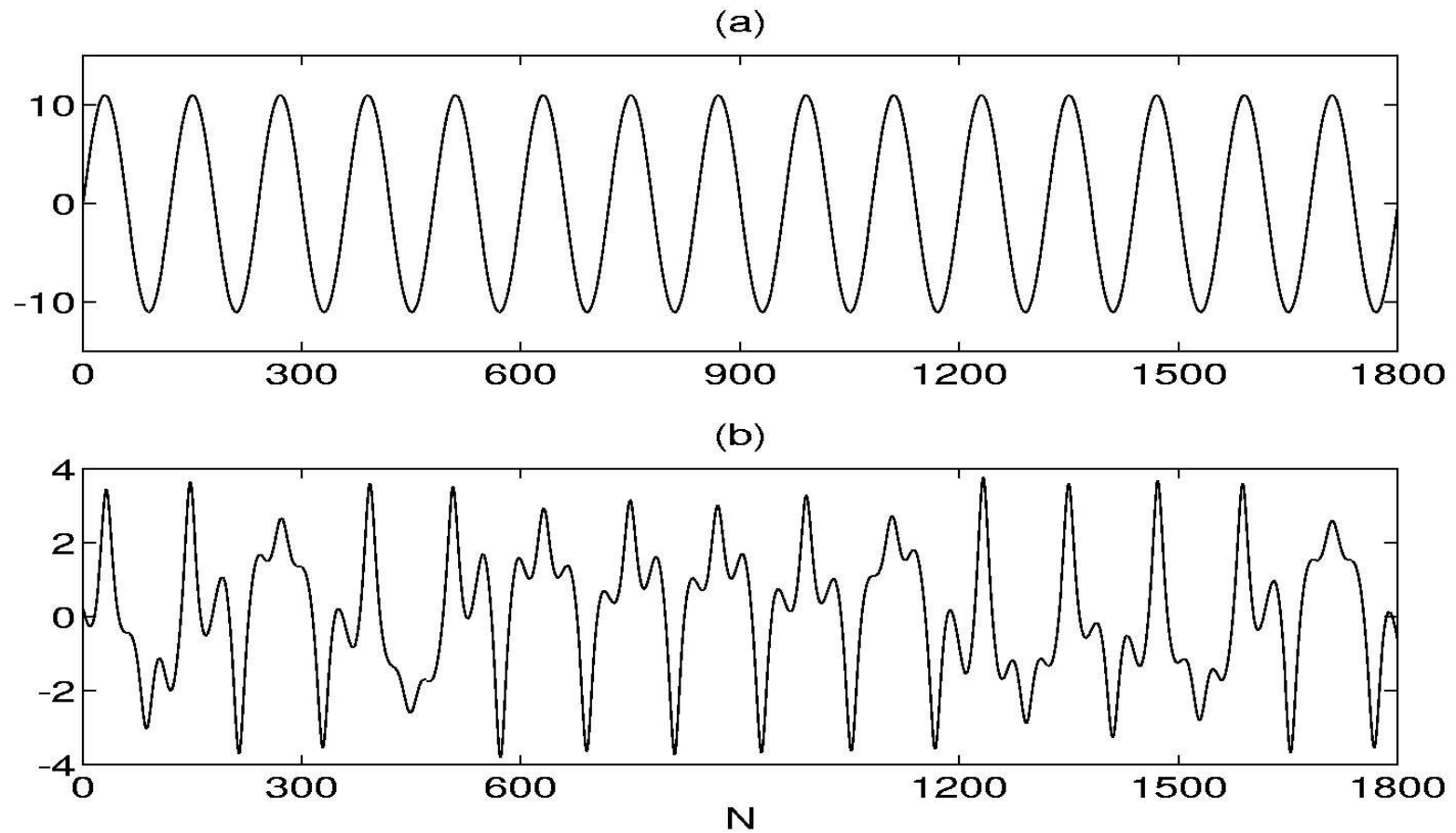
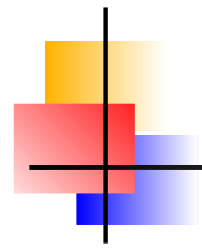


Figura 4: Resposta do oscilador Duffing-Ueda excitado por (a)  $u(t) = 11 \cos(t)$ , (b) saída,  $y(t)$ .

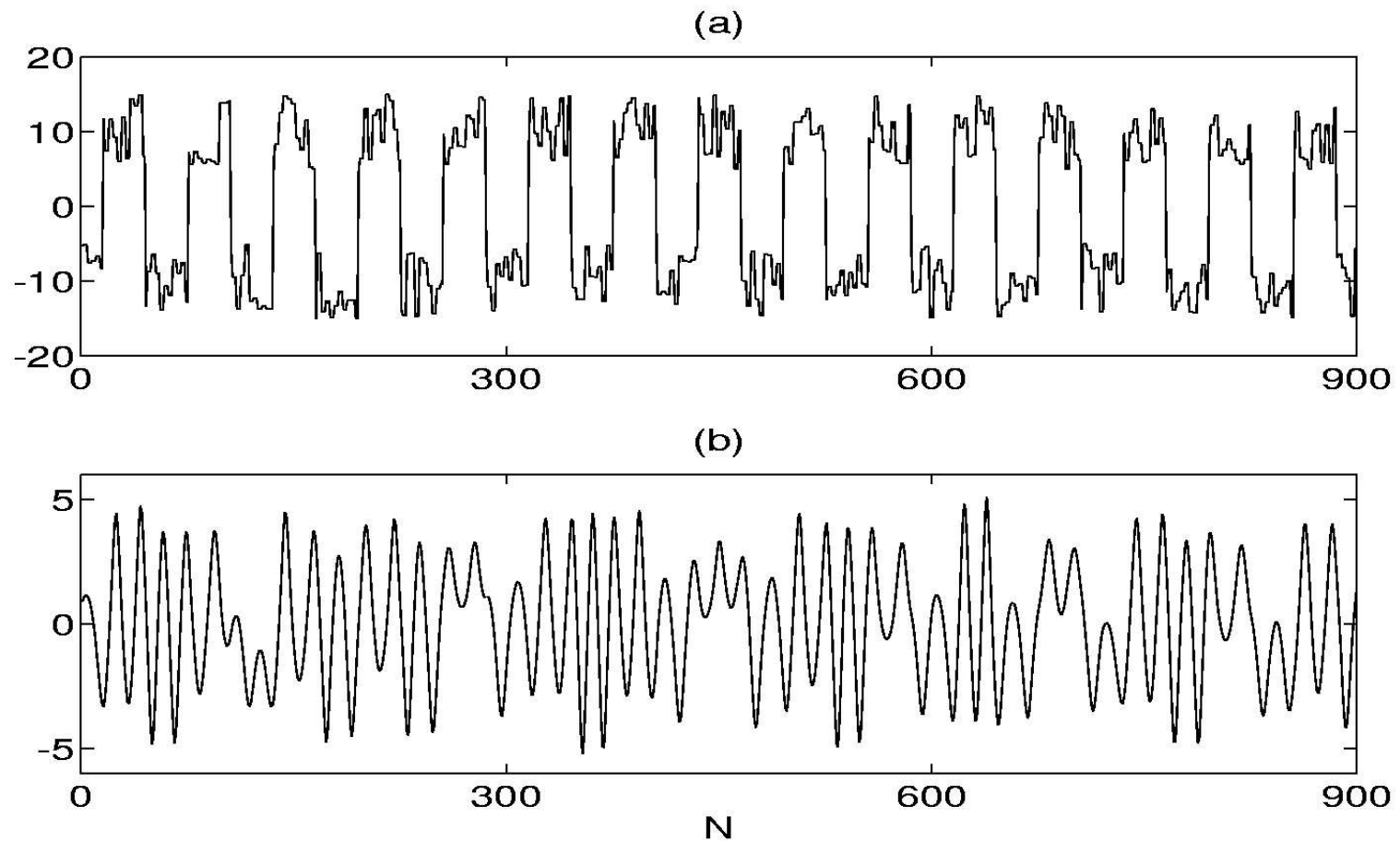
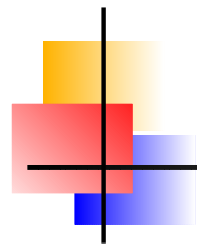


Figura 5: Resposta do oscilador Duffing-Ueda. (a)  $u(t)$  onda quadrada de  $\omega = 1$  rad/s e amplitude  $\pm 10$ , com sinal gaussiano de  $\sigma_e^2 = 9$ , (b) saída,  $y(t)$ .

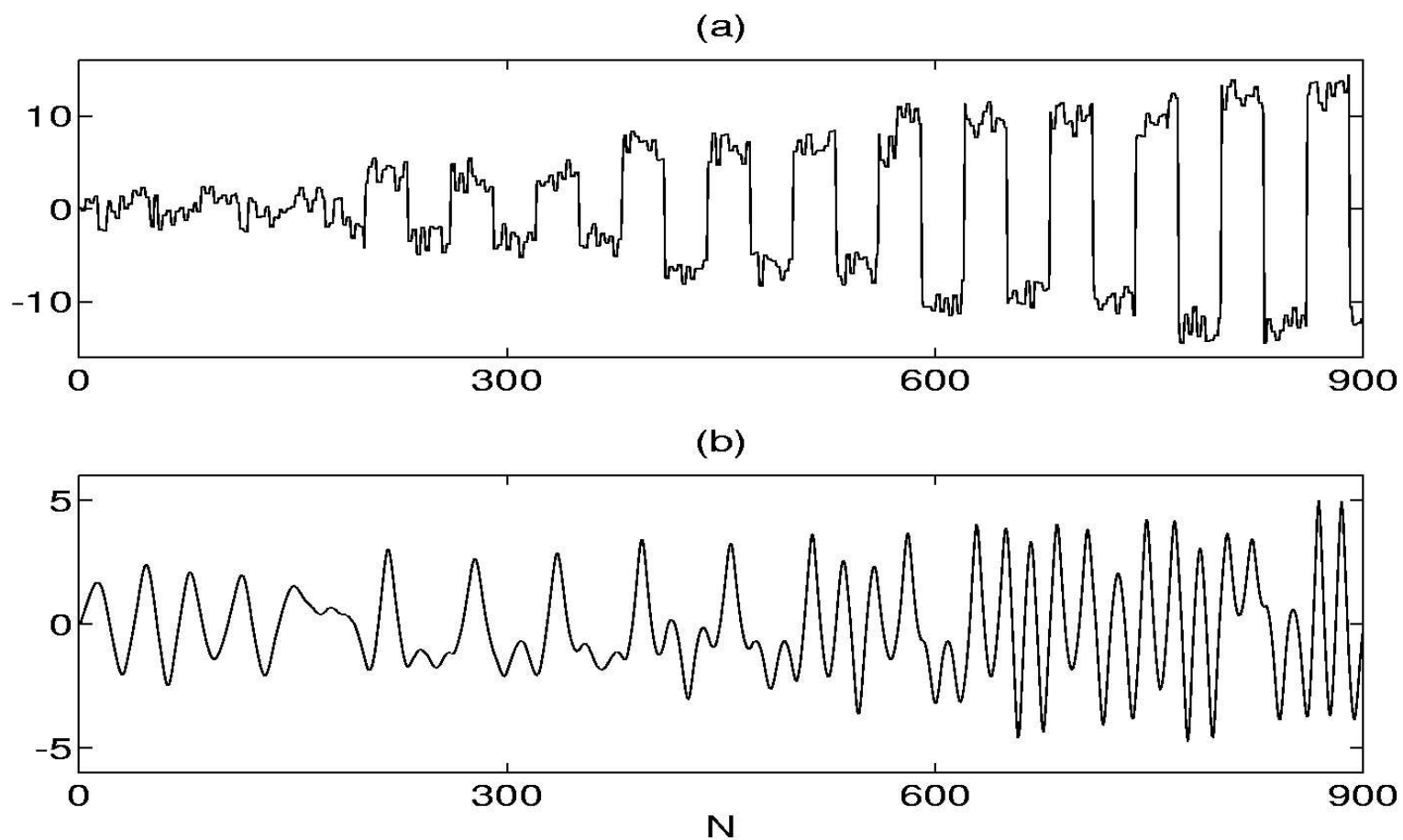
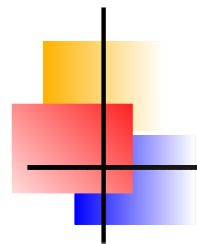


Figura 6: Resposta do oscilador Duffing-Ueda. (a)  $u(t)$  onda quadrada de  $\omega = 1$  rad/s e amplitude crescente, com sinal gaussiano de  $\sigma_e^2 = 9$ , (b)  $y(t)$ .



## Escolha do tempo de amostragem

---

- ▶ Assume-se que o sinal original  $y^*(k)$  foi registrado utilizando-se um tempo de amostragem muito pequeno, ou seja, muito menor do que o necessário. A questão passa a ser a definição de uma taxa pela qual o sinal observado  $y^*(k)$  será decimado de forma a gerar o sinal de trabalho  $y(k)$ , devidamente amostrado. Deseja-se determinar  $\Delta \in \mathbb{N}$  de forma que  $y(k) = y^*(\Delta k)$ .



## Escolha do tempo de amostragem

- ▶ Assume-se que o sinal original  $y^*(k)$  foi registrado utilizando-se um tempo de amostragem muito pequeno, ou seja, muito menor do que o necessário. A questão passa a ser a definição de uma taxa pela qual o sinal observado  $y^*(k)$  será decimado de forma a gerar o sinal de trabalho  $y(k)$ , devidamente amostrado. Deseja-se determinar  $\Delta \in \mathbb{N}$  de forma que  $y(k) = y^*(\Delta k)$ .
- ▶ Determinam-se as seguintes funções:

$$r_{y^*}(\tau) = \mathbb{E} \left[ (y^*(k) - \overline{y^*(k)}) (y^*(k - \tau) - \overline{y^*(k)}) \right]$$
$$r_{y^{*2'}}(\tau) = \mathbb{E} \left[ (y^{*2}(k) - \overline{y^{*2}(k)}) (y^{*2}(k - \tau) - \overline{y^{*2}(k)}) \right]$$

e seus primeiros mínimos,  $\tau_{y^*}$ ,  $\tau_{y^{*2'}}$ , respectivamente. O menor desses mínimos passará a ser o valor de trabalho, ou seja,  $\tau_m^* = \min[\tau_{y^*}, \tau_{y^{*2'}}]$ .

- 
- 
- ▶ Deseja-se escolher  $\Delta$  de forma que as funções de autocovariância do sinal decimado  $y(k) = y^*(\Delta k)$  satisfaçam

$$10 \leq \tau_m \leq 20,$$

sendo que os limites inferior e superior podem ser relaxados para 5 e 25, respectivamente.



# Exemplo - Escolha do tempo de amostragem

Seja o sistema de Chua,

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - h(x)) \\ \dot{y} = x - y + z, & h(x) = \begin{cases} m_1x + (m_0 - m_1), & x \geq 1 \\ m_0x, & |x| \leq 1 \\ m_1x - (m_0 - m_1), & x \leq -1, \end{cases} \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases}$$

com  $m_0 = -1/7$ ,  $m_1 = 2/7$ ,  $\alpha = 9$  e  $\beta = 100/7$  e  $T_s = 0,01$ .

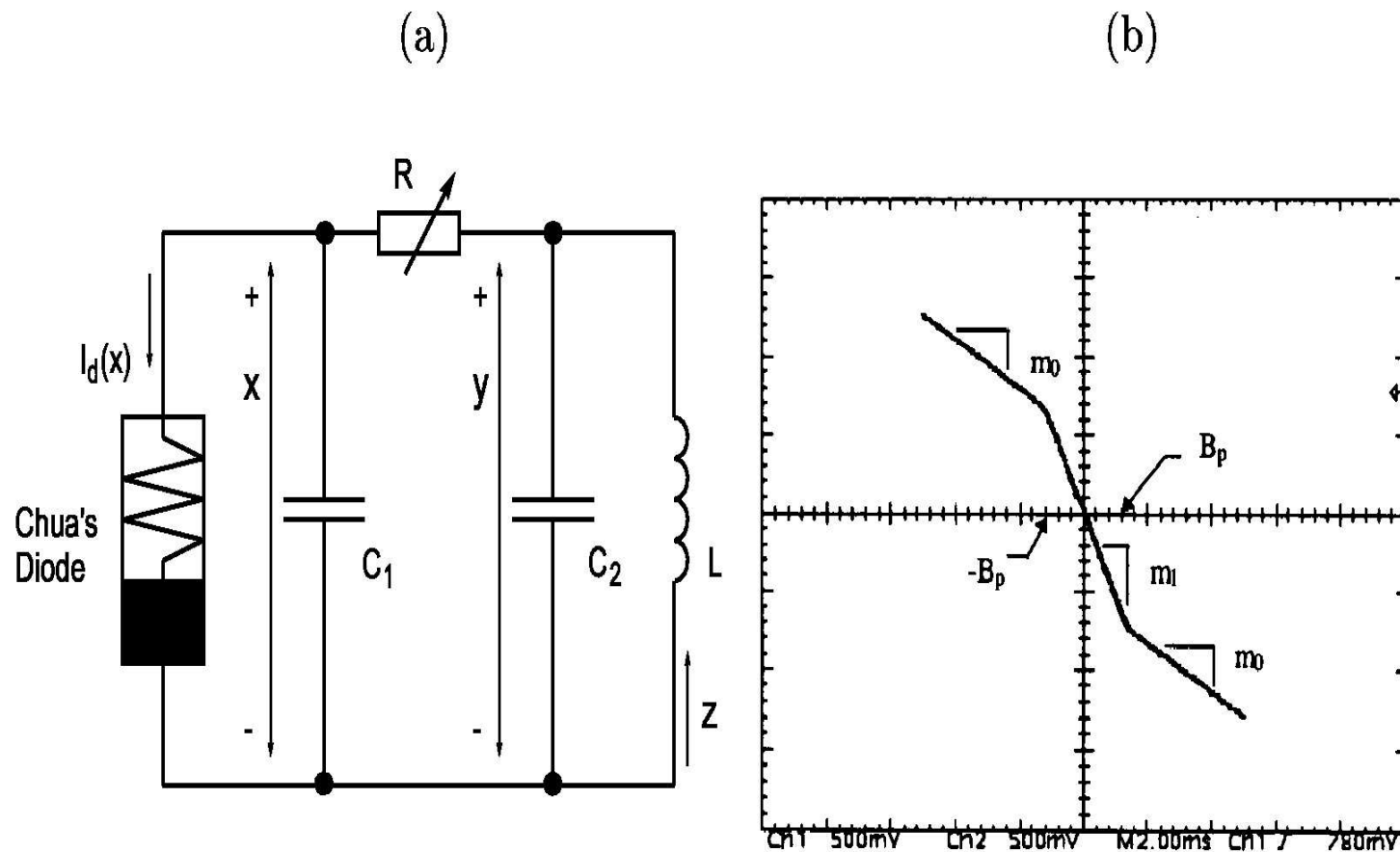
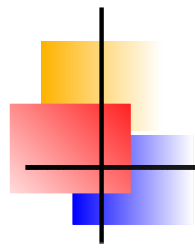


Figura 7: (a) o circuito de Chua e (b) característica corrente-tensão medida para o diodo de Chua implementado.



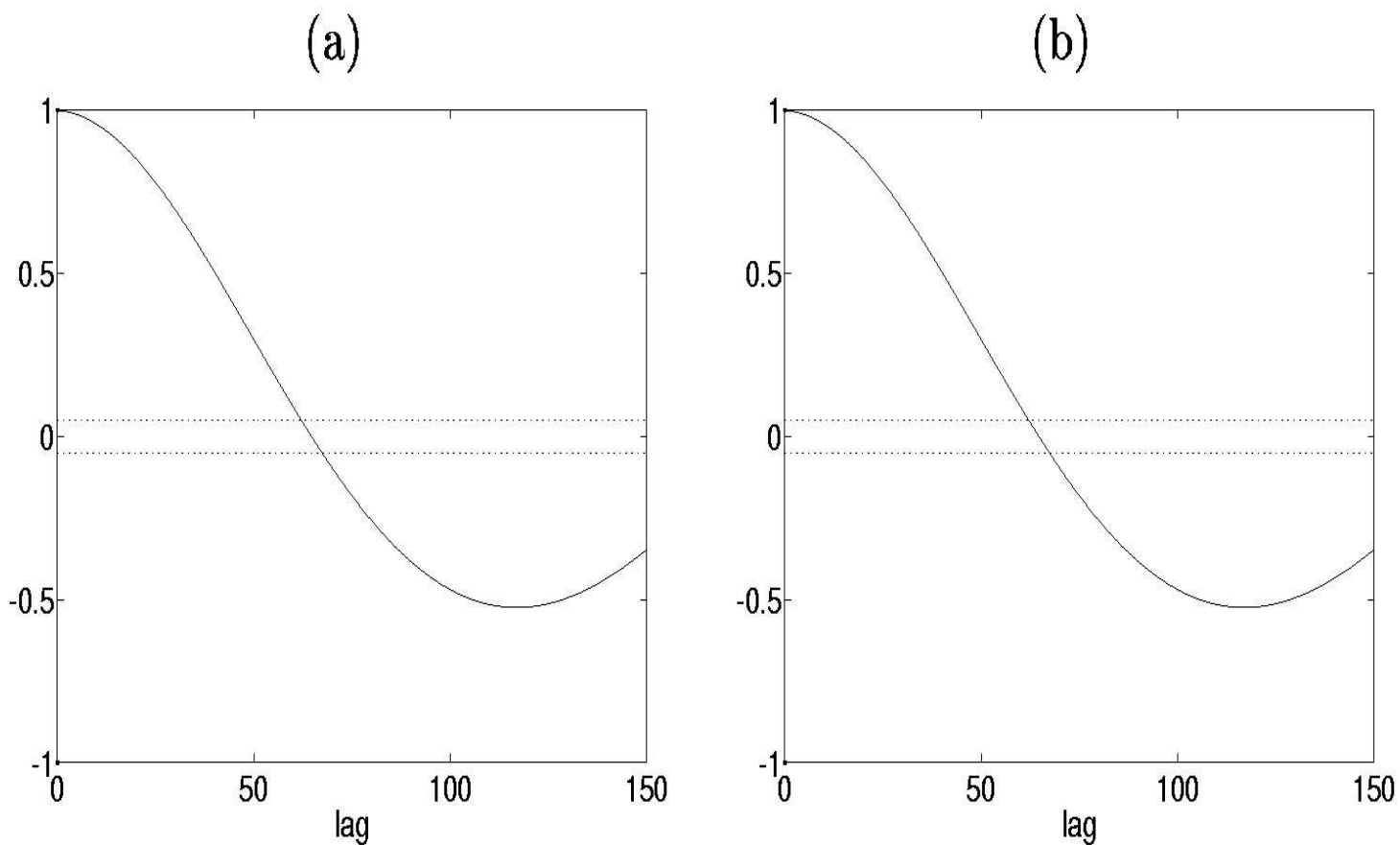
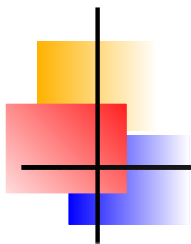


Figura 8:  $r_{y^*}(\tau)$  para o atrator dupla-volta, calculada a partir das componentes (a)  $x$ , (c)  $y$  e (e)  $z$ ;  $r_{y^{*2'}}(\tau)$  determinada a partir das componentes (b)  $x$ , (d)  $y$  e (f)  $z$ .

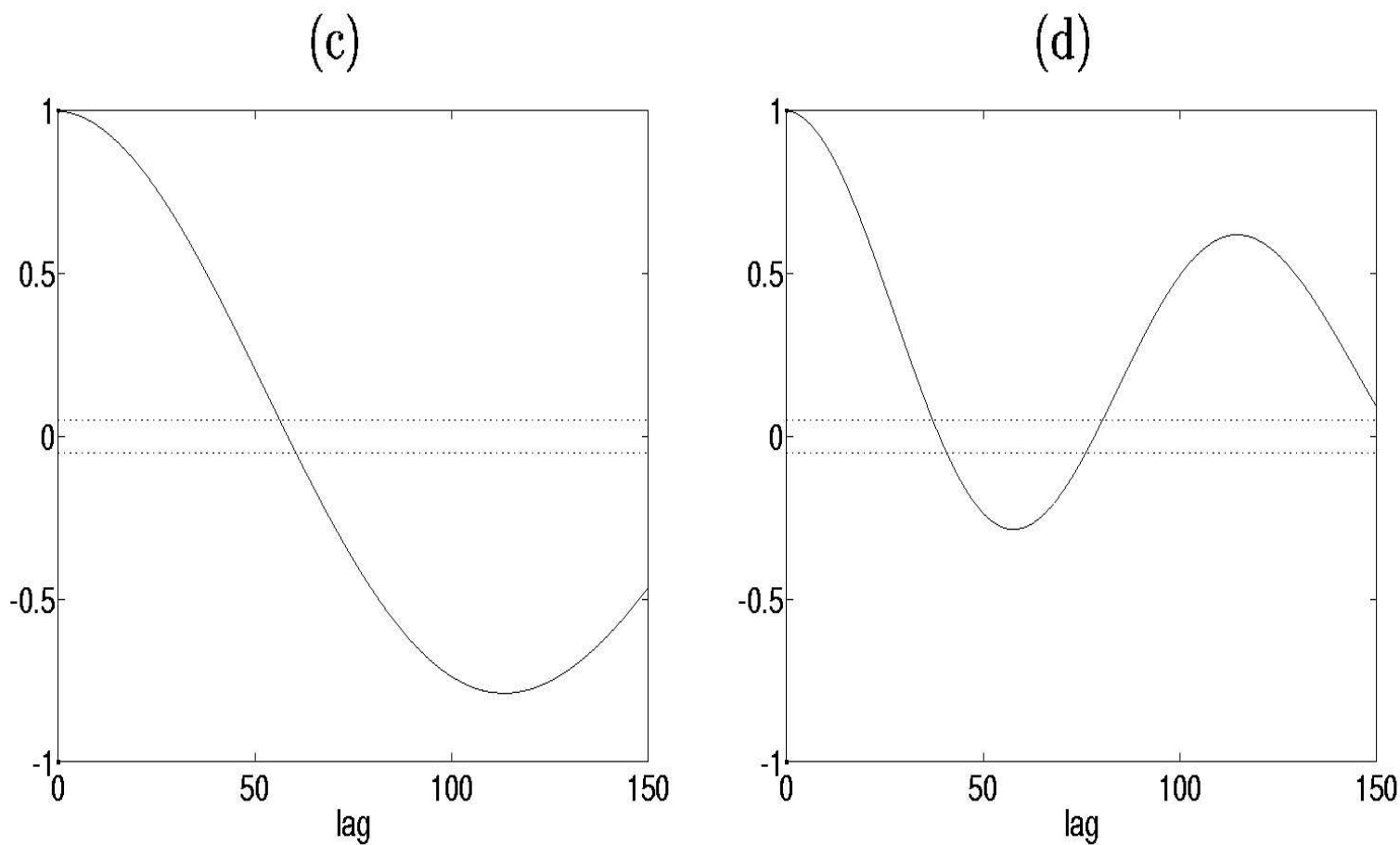
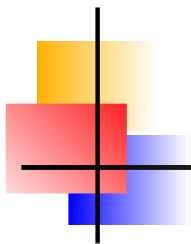


Figura 9:  $r_{y^*}(\tau)$  para o atrator dupla-volta, calculada a partir das componentes (a)  $x$ , (c)  $y$  e (e)  $z$ ;  $r_{y^{*2'}}(\tau)$  determinada a partir das componentes (b)  $x$ , (d)  $y$  e (f)  $z$ .

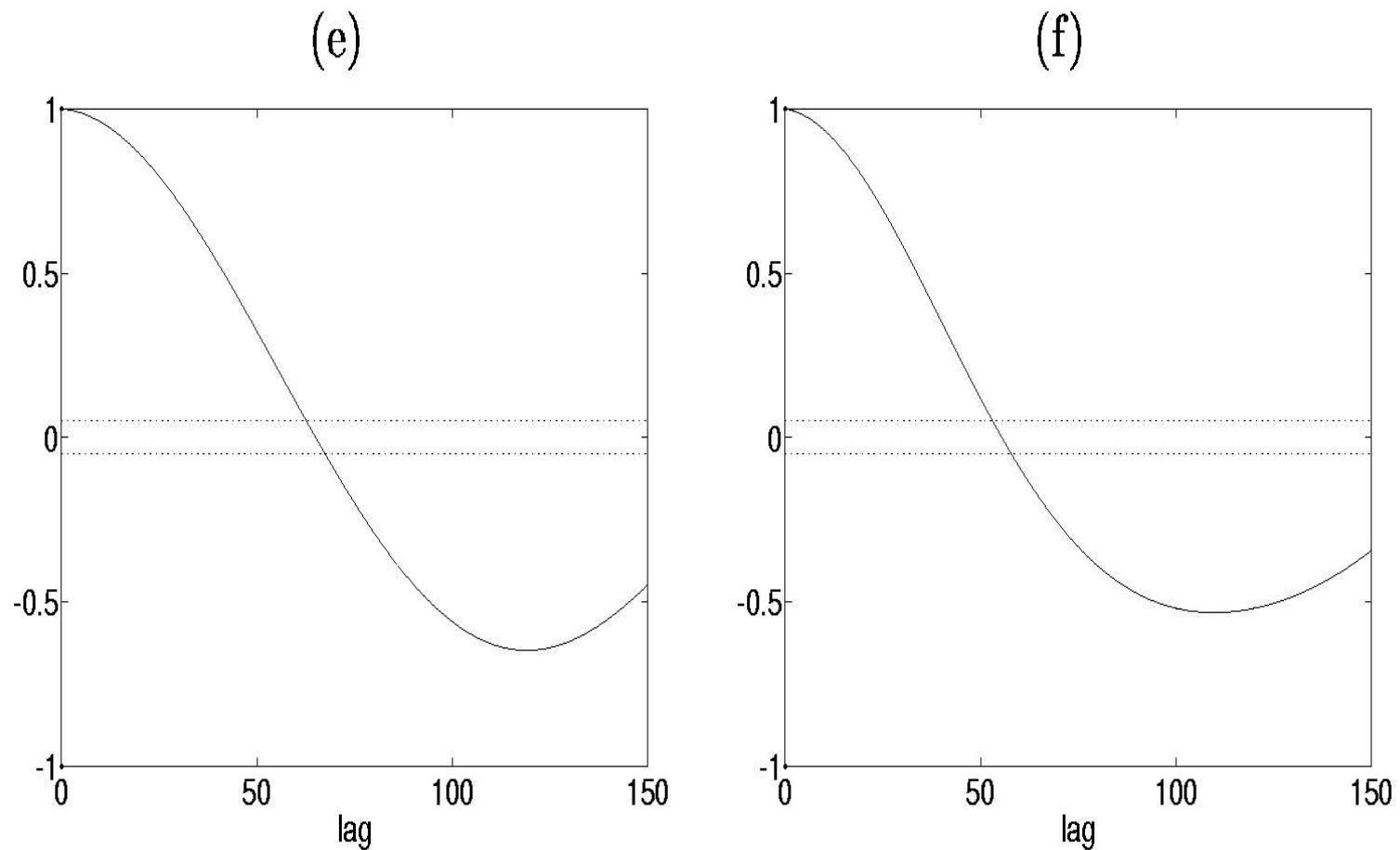
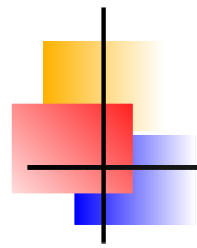


Figura 10:  $r_{y^*}(\tau)$  para o atrator dupla-volta, calculada a partir das componentes (a)  $x$ , (c)  $y$  e (e)  $z$ ;  $r_{y^{*2'}}(\tau)$  determinada a partir das componentes (b)  $x$ , (d)  $y$  e (f)  $z$ .



# *Seleção de Estrutura (ordem de modelos lineares)*

---

- ▶ Cancelamento de pólos e zeros;



# Seleção de Estrutura (ordem de modelos lineares)

---

- ▶ Cancelamento de pólos e zeros;
- ▶ *critério de informação de Akaike (AIC)* definido como

$$AIC(n_{\theta}) = N \ln[\sigma_{\text{erro}}^2(n_{\theta})] + 2n_{\theta},$$

sendo que  $N$  é o número de dados,  $\sigma_{\text{erro}}^2(n_{\theta})$  é a variância do erro de modelagem (erro de predição de um passo à frente ou resíduos) e  $n_{\theta} = \dim[\hat{\theta}]$  é o número de parâmetros no modelo.



# Seleção de Estrutura (ordem de modelos lineares)

- ▶ Cancelamento de pólos e zeros;
- ▶ *critério de informação de Akaike* (AIC) definido como

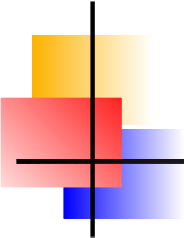
$$AIC(n_\theta) = N \ln[\sigma_{\text{erro}}^2(n_\theta)] + 2n_\theta,$$

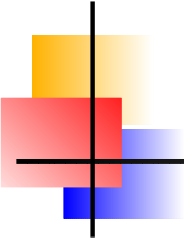
sendo que  $N$  é o número de dados,  $\sigma_{\text{erro}}^2(n_\theta)$  é a variância do erro de modelagem (erro de predição de um passo à frente ou resíduos) e  $n_\theta = \dim[\hat{\theta}]$  é o número de parâmetros no modelo.

- ▶ Há outros *critérios de informação* semelhantes. Erro final de predição (FPE) e o critério de informação de Bayes (BIC),

$$FPE(n_\theta) = N \ln[\sigma_{\text{erro}}^2(n_\theta)] + N \ln \left[ \frac{N + n_\theta}{N - n_\theta} \right]$$

$$BIC(n_\theta) = N \ln[\sigma_{\text{erro}}^2(n_\theta)] + n_\theta \ln N.$$

- 
- 
- ▶ O uso de critérios de informação pressupõe que existe uma ordem predefinida para incluir os termos candidatos seqüencialmente no modelo.

- 
- ▶ O uso de critérios de informação pressupõe que existe uma ordem predefinida para incluir os termos candidatos seqüencialmente no modelo.
  - ▶ Uso de coeficiente de agrupamento. A ordem do modelo é a primeira para a qual

$$| \Sigma_y(T_s) - \Sigma_{y_0}(T_s) | < \gamma$$

é satisfeita, sendo que  $\gamma \ll 1$ . Se um modelo discreto tiver integração então  $\Sigma_y = 1$ .





# Procedimento usando o coeficiente de agrupamento

---

1. De posse dos dados  $u(k)$  e  $y(k)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, N$ , obter uma saída modificada calculando-se

$$\tilde{y}(k) = \tilde{y}(k - 1) + y(k - 1),$$

sendo  $\tilde{y}(0) = 0$ ;



# Procedimento usando o coeficiente de agrupamento

---

1. De posse dos dados  $u(k)$  e  $y(k)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, N$ , obter uma saída modificada calculando-se

$$\tilde{y}(k) = \tilde{y}(k - 1) + y(k - 1),$$

sendo  $\tilde{y}(0) = 0$ ;

2. para  $n_y = 1 \dots n_{\max}$ , estimar parâmetros a partir dos dados  $u(k)$  e  $\tilde{y}(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ;



# Procedimento usando o coeficiente de agrupamento

---

1. De posse dos dados  $u(k)$  e  $y(k)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, N$ , obter uma saída modificada calculando-se

$$\tilde{y}(k) = \tilde{y}(k - 1) + y(k - 1),$$

sendo  $\tilde{y}(0) = 0$ ;

2. para  $n_y = 1 \dots n_{\max}$ , estimar parâmetros a partir dos dados  $u(k)$  e  $\tilde{y}(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ;
3. determinar os coeficientes de agrupamento  $\Sigma_{\tilde{y}}$  para os modelos estimados no passo 2. Ou seja, calcular  $\Sigma_{\tilde{y}}^{1,1}$ ,  $\Sigma_{\tilde{y}}^{2,2}$ ,  $\dots$ ,  $\Sigma_{\tilde{y}}^{n_{\max}, n_{\max}}$ ;



# Procedimento usando o coeficiente de agrupamento

1. De posse dos dados  $u(k)$  e  $y(k)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, N$ , obter uma saída modificada calculando-se

$$\tilde{y}(k) = \tilde{y}(k - 1) + y(k - 1),$$

sendo  $\tilde{y}(0) = 0$ ;

2. para  $n_y = 1 \dots n_{\max}$ , estimar parâmetros a partir dos dados  $u(k)$  e  $\tilde{y}(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ;
3. determinar os coeficientes de agrupamento  $\Sigma_{\tilde{y}}$  para os modelos estimados no passo 2. Ou seja, calcular  $\Sigma_{\tilde{y}}^{1,1}$ ,  $\Sigma_{\tilde{y}}^{2,2}$ ,  $\dots$ ,  $\Sigma_{\tilde{y}}^{n_{\max}, n_{\max}}$ ;
4. se o primeiro coeficiente de agrupamento que satisfaz

$$| \Sigma_{\tilde{y}}^{i,i} - 1 | < \gamma, \quad i = 1, 2, \dots, n_{\max}$$

para  $\Sigma_{\tilde{y}}^{r,r}$  ( $1 \leq r \leq n_{\max}$ ), sendo  $\gamma \ll 1$ , então uma ordem adequada para o modelo é  $n_y = r - 1$ .



## Exemplo - Determinação de ordem

---

- ▶ Seja o modelo contínuo

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = u(t),$$

sendo  $m=20$ ,  $c=k=5$ . O modelo (-11) foi simulado usando-se uma rotina de integração de Runge-Kutta de quarta ordem, dando origem a dados “contínuos”  $\{y(t), u(t)\}$  que foram subseqüentemente “amostrados” com período  $T_s$ , resultando em duas séries com  $N = 200$ .

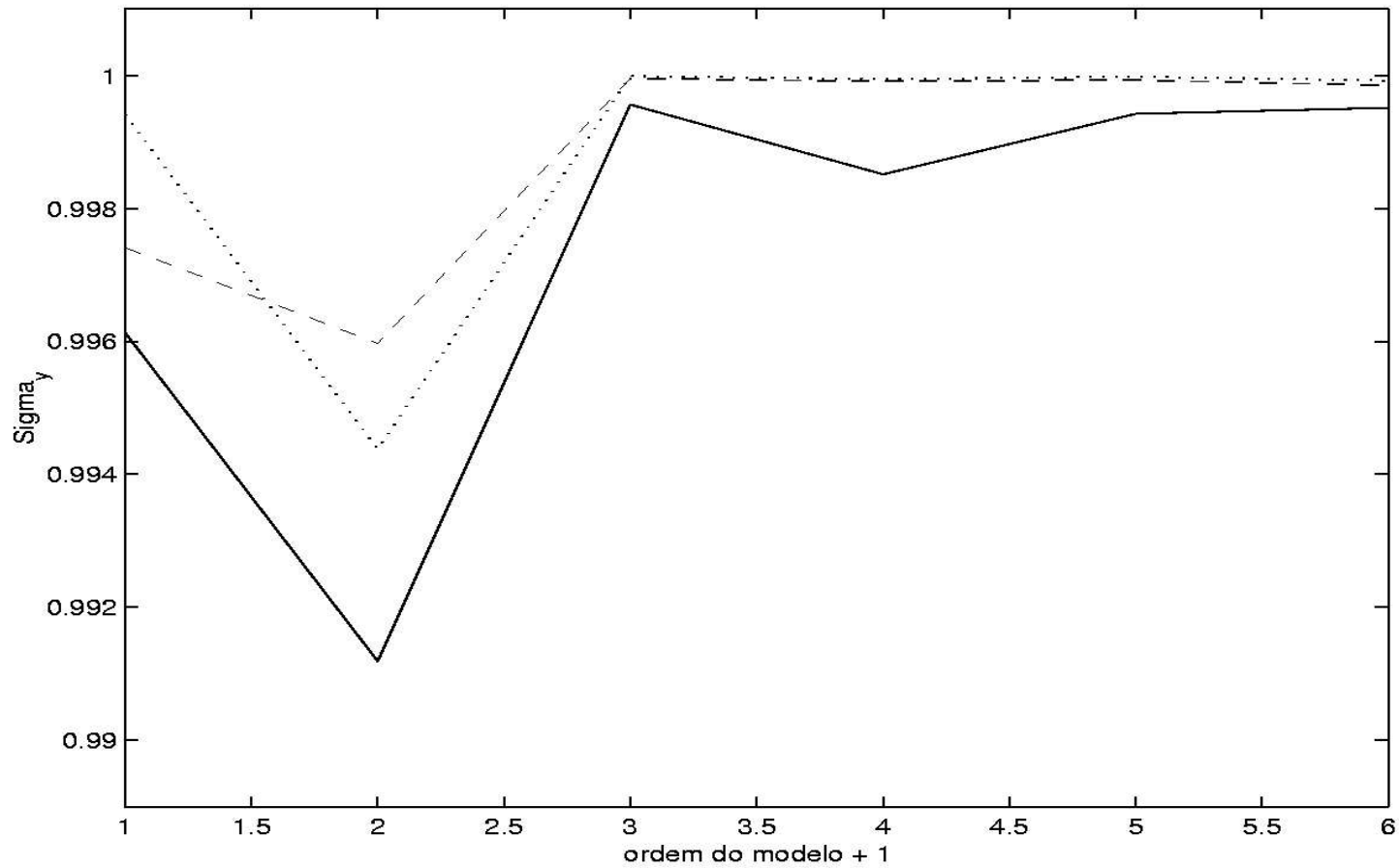
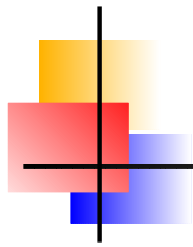


Figura 11: Coeficiente de agrupamento  $\Sigma_{\tilde{y}}$  para: (—)  $1/T_s = 0,75$  Hz, (- -)  $1/T_s = 1$  Hz e (···)  $1/T_s = 2$  Hz.

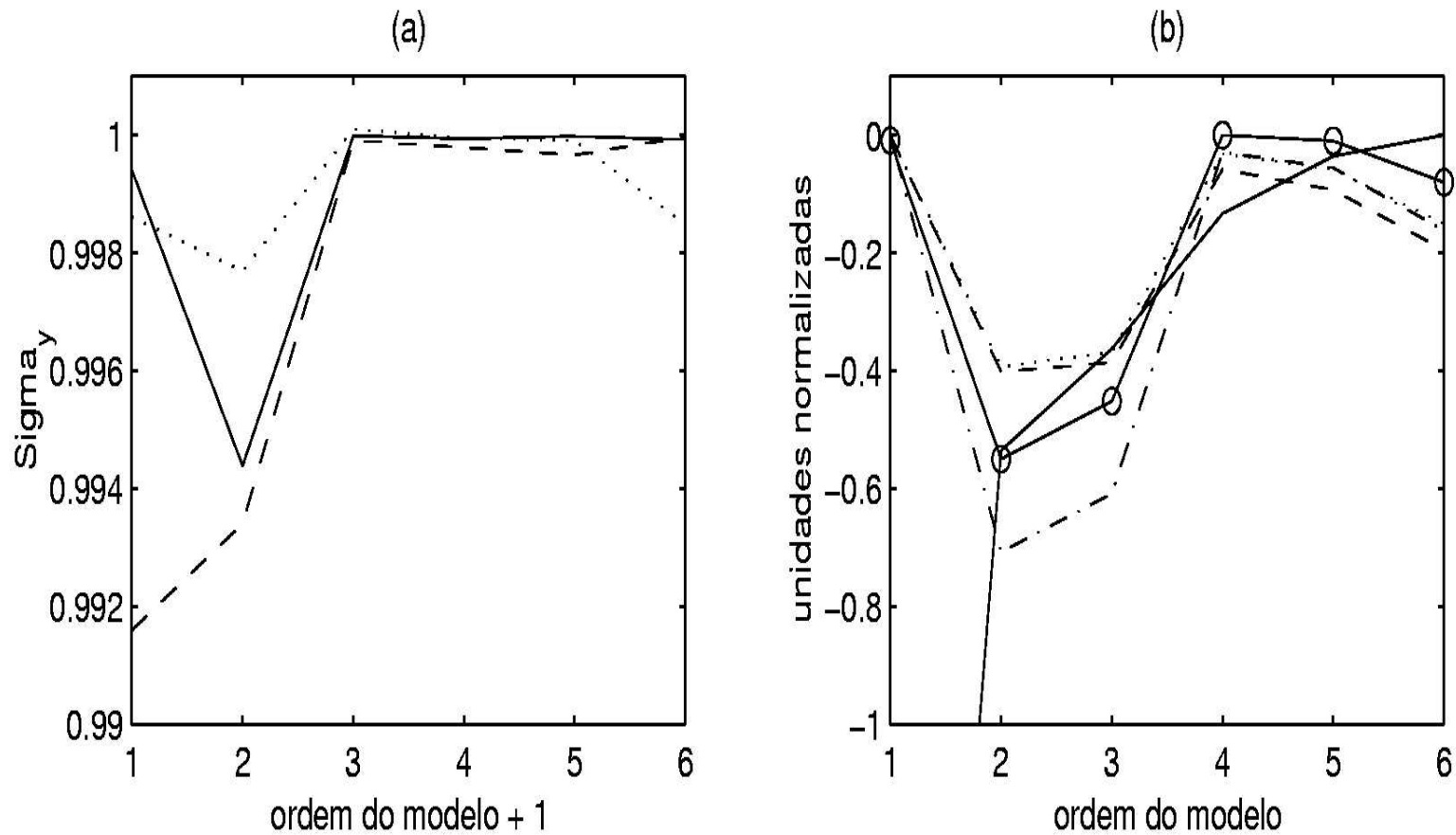
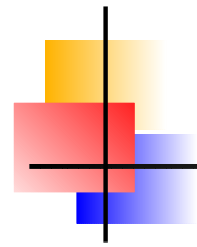


Figura 12: (a) coeficiente de agrupamento  $\Sigma_{\tilde{y}}$  para: (—) sem ruído, (- -) SNR=2,9 e ( $\cdots$ ) SNR=0,74. Para os demais gráficos: (—) teste do determinante, (- -) função de erro, ( $\cdots$ ) FPE, (-.-) AIC e (-o-) BIC, (b) sem ruído, (c) SNR=2,9 e (d) SNR=0,74.

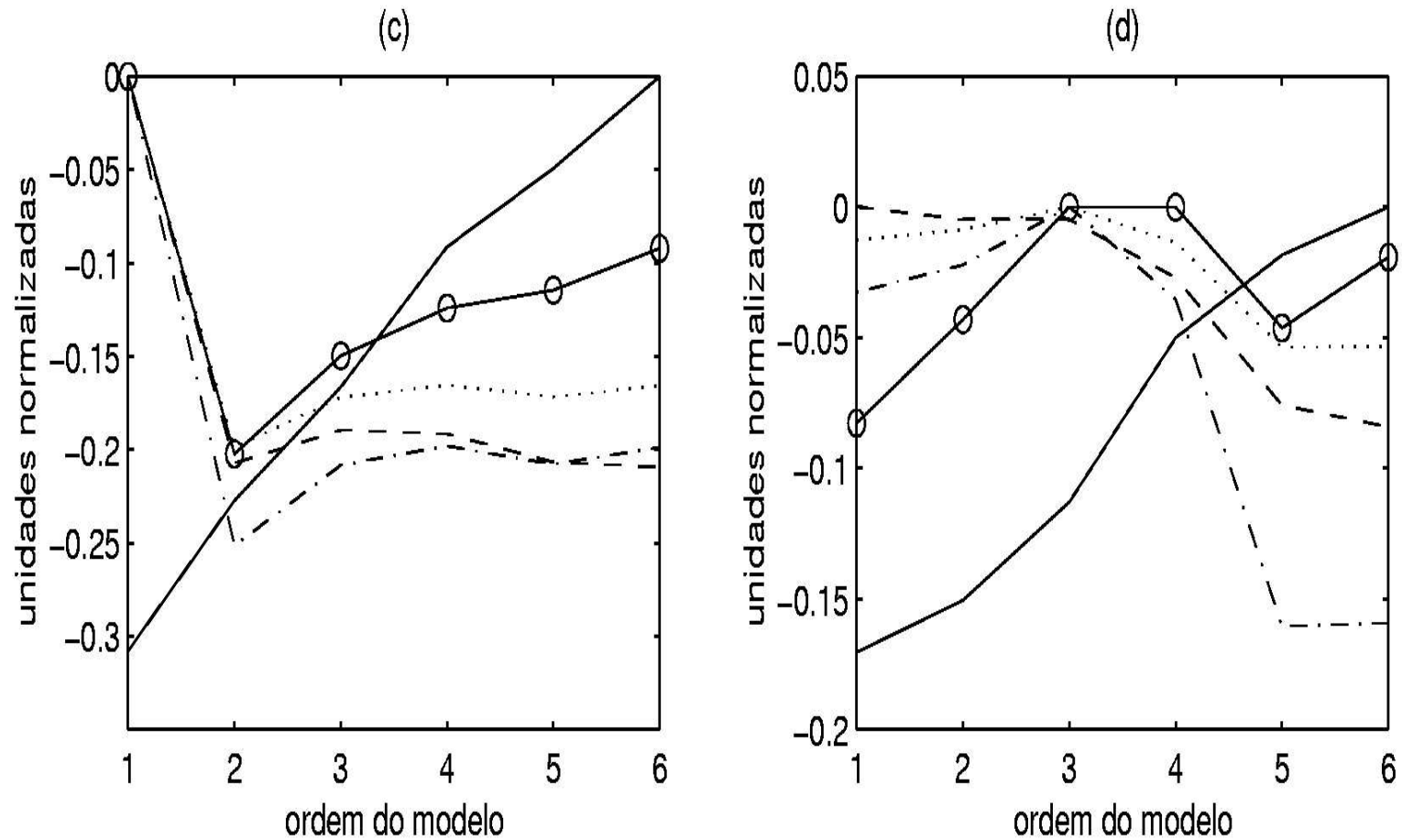
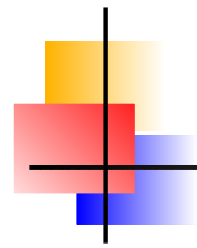


Figura 13: (a) coeficiente de agrupamento  $\Sigma_{\tilde{y}}$  para: (—) sem ruído, (- -) SNR=2,9 e (· · ·) SNR=0,74. Para os demais gráficos: (—) teste do determinante, (- -) função de erro, (· · ·) FPE, (- · -) AIC e (-o-) BIC, (b) sem ruído, (c) SNR=2,9 e (d) SNR=0,74.





# *Seleção da estrutura de modelos não-lineares*

---

▶ ERR;



# *Seleção da estrutura de modelos não-lineares*

---

- ▶ ERR;
- ▶ análise de agrupamento de termos;



# Seleção da estrutura de modelos não-lineares

---

- ▶ ERR;
- ▶ análise de agrupamento de termos;
- ▶ *pruning*.



## Exemplo - Determinação de estrutura de Duffing-Ueda

---

- ▶ A equação do oscilador de Duffing-Ueda foi integrada para obter 900 “observações” com  $T_s = \pi/30$ .



## Exemplo - Determinação de estrutura de Duffing-Ueda

---

- ▶ A equação do oscilador de Duffing-Ueda foi integrada para obter 900 “observações” com  $T_s = \pi/30$ .
- ▶ Escolhendo-se o grau de não-linearidade e os atrasos máximos, de forma a se ter  $\ell = 3$  e  $n_y = n_u = 3$ , uma família de modelos foi identificada, com número crescente de termos selecionados pelo critério ERR.

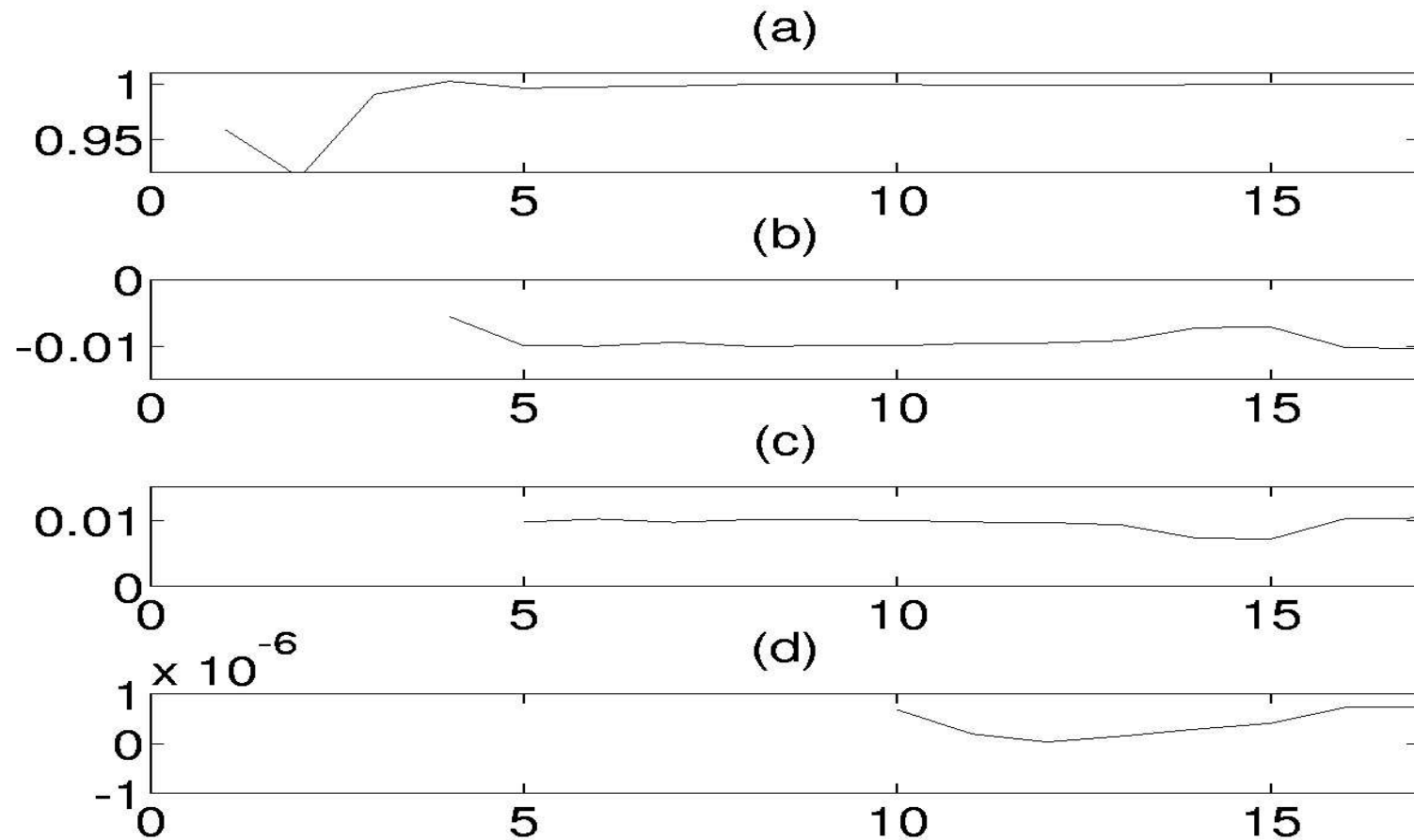
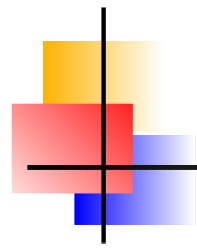
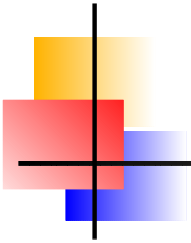


Figura 14: O eixo das abcissas é o número de termos (regressores) no modelo. (a)  $\Sigma_y$ , (b)  $\Sigma_{y^3}$ , (c)  $\Sigma_u$  and (d)  $\Sigma_{u^3}$ .

- 
- 
- ▶ Gerou-se um conjunto de termos candidatos tomados apenas dentre os agrupamentos efetivos. Procedeu-se à identificação de modelos exatamente como antes.

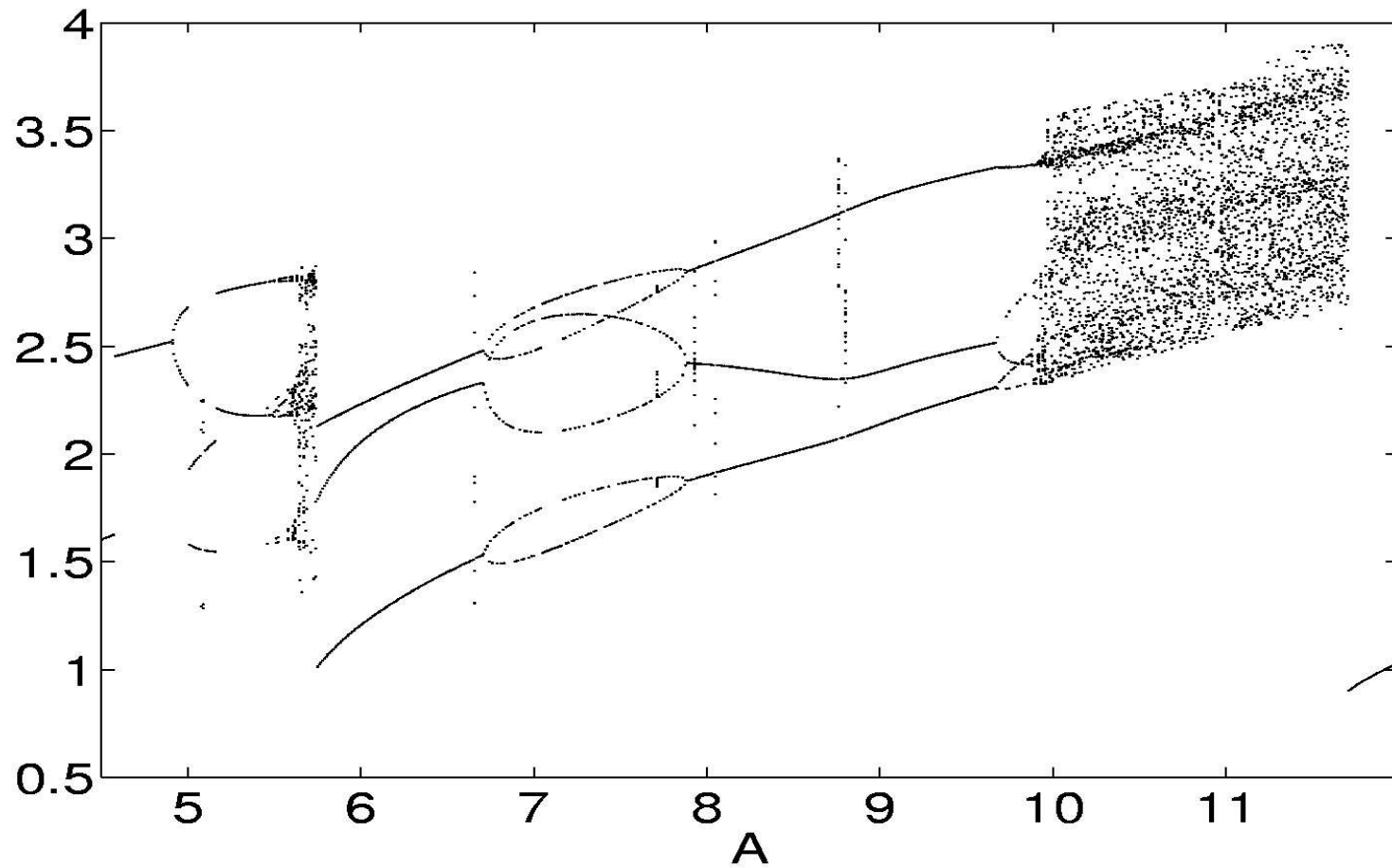
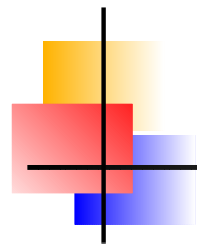


Figura 15: Diagrama de bifurcação de modelo identificado com 14 termos, escolhidos a partir de agrupamentos efetivos.