

Capítulo 2 - Representações Lineares

Eduardo Mendes

`emmendes@cpdee.ufmg.br`

Departamento de Engenharia Eletrônica
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte, MG, Brasil



Introdução

Há diversas maneiras de representar o mesmo modelo matemático, ou seja, há várias formas em que as equações que descrevem o comportamento do sistema podem ser escritas. Exemplos:

- ▶ funções de transferência;



Introdução

Há diversas maneiras de representar o mesmo modelo matemático, ou seja, há várias formas em que as equações que descrevem o comportamento do sistema podem ser escritas. Exemplos:

- ▶ funções de transferência;
- ▶ espaço de estados;



Introdução

Há diversas maneiras de representar o mesmo modelo matemático, ou seja, há várias formas em que as equações que descrevem o comportamento do sistema podem ser escritas. Exemplos:

- ▶ funções de transferência;
- ▶ espaço de estados;
- ▶ ARMAX etc.

Funções de Transferência

Funções de transferência descrevem como uma determinada entrada é dinamicamente “transferida” para a saída do sistema.

- ▶ Função de transferência de um circuito elétrico

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + v_c(t) = v(t),$$
$$C \frac{dv_c(t)}{dt} = i(t).$$

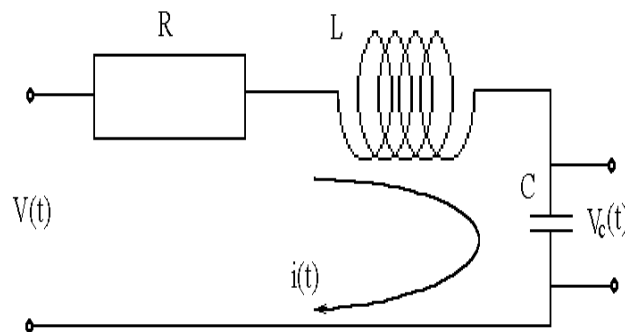
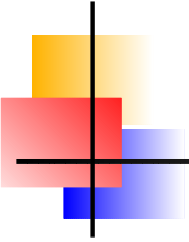


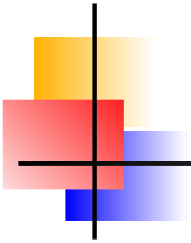
Figura 1: Circuito RLC.

- 
-
- ▶ Aplicando-se a transformada de Laplace e considerando-se condições iniciais nulas, tem-se

$$LI(s)s + RI(s) + V_c(s) = V(s),$$

$$CV_c(s)s = I(s).$$

$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{Cs}{CLs^2 + RCs + 1}.$$

- 
- ▶ Aplicando-se a transformada de Laplace e considerando-se condições iniciais nulas, tem-se

$$LI(s)s + RI(s) + V_c(s) = V(s),$$

$$CV_c(s)s = I(s).$$

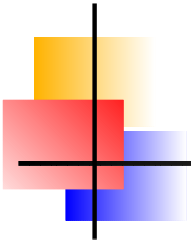
$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{C s}{CL s^2 + RC s + 1}.$$

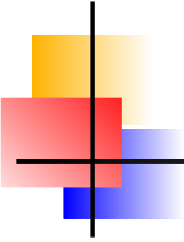
- ▶ Pólos, zeros e resíduos

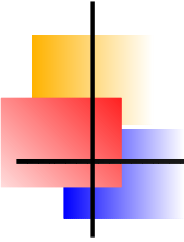
$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_q s^q}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}$$

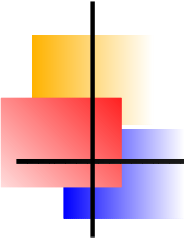


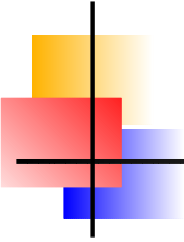
▶ Os zeros de $H(s)$ são os zeros do polinômio $N(s)$.

- 
-
- ▶ Os zeros de $H(s)$ são os zeros do polinômio $N(s)$.
 - ▶ Os pólos de $H(s)$ são os zeros do polinômio $D(s)$.

- 
-
- ▶ Os zeros de $H(s)$ são os zeros do polinômio $N(s)$.
 - ▶ Os pólos de $H(s)$ são os zeros do polinômio $D(s)$.
 - ▶ A *ordem* de uma função de transferência é igual ao número de pólos.

- 
-
- ▶ Os zeros de $H(s)$ são os zeros do polinômio $N(s)$.
 - ▶ Os pólos de $H(s)$ são os zeros do polinômio $D(s)$.
 - ▶ A *ordem* de uma função de transferência é igual ao número de pólos.
 - ▶ Para funções de transferência de sistemas reais: $n \geq q$.

- 
-
- ▶ Os zeros de $H(s)$ são os zeros do polinômio $N(s)$.
 - ▶ Os pólos de $H(s)$ são os zeros do polinômio $D(s)$.
 - ▶ A *ordem* de uma função de transferência é igual ao número de pólos.
 - ▶ Para funções de transferência de sistemas reais: $n \geq q$.
 - ▶ Se $\text{Re}[p_i] > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, diz-se que a função de transferência é *instável*.

- 
- ▶ Os zeros de $H(s)$ são os zeros do polinômio $N(s)$.
 - ▶ Os pólos de $H(s)$ são os zeros do polinômio $D(s)$.
 - ▶ A *ordem* de uma função de transferência é igual ao número de pólos.
 - ▶ Para funções de transferência de sistemas reais: $n \geq q$.
 - ▶ Se $\text{Re}[p_i] > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, diz-se que a função de transferência é *instável*.
 - ▶ Se $\text{Re}[z_i] > 0$, $i = 1, 2, \dots, q$, a função de transferência é de *fase não mínima*.



► Seja

$$H(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_q)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}.$$

O *resíduo* de $H(s)$ no pólo p_i , J_i , é definido como

$$J_i = H(s)(s - p_i) \Big|_{s=p_i}.$$



Decomposição em frações parciais

Decomposição modal (pólos reais e distintos)

$$H(s) = \frac{5s + 3}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}.$$

Neste caso, $H(s)$ pode ser decomposta como se segue:

$$H(s) = \frac{J_1}{s + 1} + \frac{J_2}{s + 2} + \frac{J_3}{s + 3},$$

sendo

$$J_1 = H(s)(s + 1) \Big|_{s=-1} = -1.$$

Semelhantemente, tem-se $J_2 = 7$ e $J_3 = -6$. Portanto, a decomposição em frações parciais de $H(s)$ é

$$H(s) = \frac{-1}{s + 1} + \frac{7}{s + 2} + \frac{-6}{s + 3}.$$

- 
- ▶ Pólos complexos de multiplicidade unitária.

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{J_1}{s - p_1} + \frac{J_2}{s - p_2} + \frac{J_3}{s - p_3} + \dots + \frac{J_n}{s - p_n} \\ &= \frac{J_1}{s - p_1} + \frac{J_1^*}{s - p_1^*} + \frac{J_3}{s - p_3} + \dots + \frac{J_n}{s - p_n} \\ &= \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s - p_1)(s - p_1^*)} + \frac{J_3}{s - p_3} + \dots + \frac{J_n}{s - p_n}, \end{aligned}$$

sendo que $p_1^* = p_2$ e $J_1^* = J_2$ são, respectivamente, os complexos conjugados de p_1 e J_1 . Também, $\alpha_1 = J_1 + J_1^* = 2\text{Re}[J_1]$ e $\alpha_2 = -(p_1 J_1^* + p_1^* J_1)$.

- 
- ▶ Pólos complexos de multiplicidade unitária.

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{J_1}{s - p_1} + \frac{J_2}{s - p_2} + \frac{J_3}{s - p_3} + \dots + \frac{J_n}{s - p_n} \\
 &= \frac{J_1}{s - p_1} + \frac{J_1^*}{s - p_1^*} + \frac{J_3}{s - p_3} + \dots + \frac{J_n}{s - p_n} \\
 &= \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s - p_1)(s - p_1^*)} + \frac{J_3}{s - p_3} + \dots + \frac{J_n}{s - p_n},
 \end{aligned}$$

sendo que $p_1^* = p_2$ e $J_1^* = J_2$ são, respectivamente, os complexos conjugados de p_1 e J_1 . Também, $\alpha_1 = J_1 + J_1^* = 2\text{Re}[J_1]$ e $\alpha_2 = -(p_1 J_1^* + p_1^* J_1)$.

- ▶ Decomposição modal (pólos complexos e distintos)

$$H(s) = \frac{s + 1}{s(s^2 + s + 1)},$$

tem pólos: $s = -0,5 \pm j0,866$ e $s = 0$.



► Então

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{J_1}{s - p_1} + \frac{J_1^*}{s - p_1^*} + \frac{J_3}{s} \\ &= \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s - p_1)(s - p_1^*)} + \frac{J_3}{s}. \end{aligned}$$



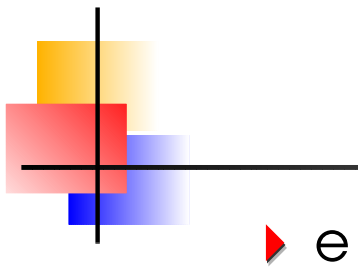
▶ Então

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{J_1}{s - p_1} + \frac{J_1^*}{s - p_1^*} + \frac{J_3}{s} \\ &= \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s - p_1)(s - p_1^*)} + \frac{J_3}{s}. \end{aligned}$$

▶ Logo

$$J_1 = \frac{s+1}{s(s+0,5-j0,866)} \Big|_{s=-0,5-j0,866} = -0,5 + j0,2887,$$

$$\text{e } J_1^* = -0,5 - j0,2887.$$

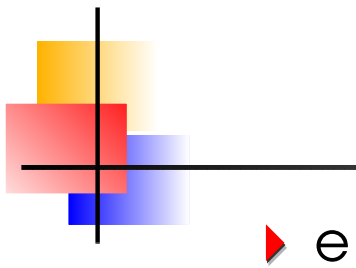


$$\alpha_1 = 2\text{Re}[J_1] = 2(-0,5) = -1,0$$

$$\alpha_2 = -(p_1 J_1^* + p_1^* J_1)$$

$$= -[(-0,5-j0,866)(-0,5-j0,2887)+(-0,5+j0,866) \times \\ \times (-0,5+j0,2887)]$$

$$= 0.$$



$$\alpha_1 = 2\text{Re}[J_1] = 2(-0,5) = -1,0$$

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= -(p_1 J_1^* + p_1^* J_1) \\ &= -[(-0,5-j0,866)(-0,5-j0,2887)+(-0,5+j0,866) \times \\ &\quad \times (-0,5+j0,2887)] \\ &= 0.\end{aligned}$$



$$J_3 = \left. \frac{s+1}{s^2+s+1} \right|_{s=0} = 1.$$



► e

$$\alpha_1 = 2\text{Re}[J_1] = 2(-0,5) = -1,0$$

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= -(p_1 J_1^* + p_1^* J_1) \\ &= -[(-0,5-j0,866)(-0,5-j0,2887)+(-0,5+j0,866) \times \\ &\quad \times (-0,5+j0,2887)] \\ &= 0.\end{aligned}$$

►

$$J_3 = \left. \frac{s+1}{s^2+s+1} \right|_{s=0} = 1.$$

► Portanto,

$$H(s) = \frac{-s}{s^2 + s + 1} + \frac{1}{s}.$$



Pólos com multiplicidade > 1

$$H(s) = \frac{b_r}{(s - p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(s - p_1)^{r-1}} + \dots + \frac{b_1}{(s - p_1)} + \frac{J_{r+1}}{s - p_{r+1}} + \dots + \frac{J_n}{s - p_n},$$

sendo que b_i , $i = 1, \dots, r$ são:

$$\begin{aligned} b_r &= H(s)(s - p_1)^r \Big|_{s=p_1} \\ b_{r-1} &= \frac{d}{ds} H(s)(s - p_1)^r \Big|_{s=p_1} \\ &\vdots \\ b_{r-i} &= \frac{1}{i!} \frac{d^i}{ds^i} H(s)(s - p_1)^r \Big|_{s=p_1} \\ &\vdots \\ b_1 &= \frac{1}{r-1} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} H(s)(s - p_1)^r \Big|_{s=p_1}. \end{aligned}$$



Decomposição modal (pólos múltiplos)

► Considere

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3}.$$



Decomposição modal (pólos múltiplos)

► Considere

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3}.$$

► Decompondo em frações parciais

$$H(s) = \frac{b_3}{(s + 1)^3} + \frac{b_2}{(s + 1)^2} + \frac{b_1}{(s + 1)},$$



Decomposição modal (pólos múltiplos)

► Considere

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3}.$$

► Decompondo em frações parciais

$$H(s) = \frac{b_3}{(s + 1)^3} + \frac{b_2}{(s + 1)^2} + \frac{b_1}{(s + 1)},$$

► Onde

$$b_3 = H(s)(s + 1)^3 \Big|_{s=-1} = 2$$

$$b_2 = \frac{d}{ds} H(s)(s + 1)^3 \Big|_{s=-1} = 0$$

$$b_1 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} H(s)(s + 1)^3 \Big|_{s=-1} = 1 .$$



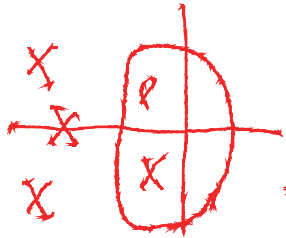
Índices de Dominância Modal

- ▶ Muitos processos industriais podem ser representados por

$$H(s) = \frac{K(s - z)^j e^{-\tau_d s}}{s^i (\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)^r}$$

Índices de Dominância Modal

- ▶ Muitos processos industriais podem ser representados por



$$H(s) = \frac{K(s - z)^j e^{-\tau_d s}}{s^i (\tau_1 s + 1) (\tau_2 s + 1)^r}$$

$$y(t) = K_0 + K_1 e^{-t/\tau_1} + K_2 e^{-t/\tau_2} + \dots$$

- ▶ Funções de transferência de ordem elevada podem, freqüentemente, ser simplificadas, principalmente se alguns “modos” do sistema forem dominantes. Os Índices de Dominância Modal (MDI) são definidos da seguinte forma para pólos reais e complexos, respectivamente:

$$\gamma_i = \frac{-J_i}{p_i}, \quad \text{e} \quad \gamma_i = \text{Re} \left[\frac{-J_i}{p_i} \right].$$

Redução de ordem usando dominância modal

$$H(s) = \frac{7,526s^3 + 10,357s^2 + 0,92051s + 0,63827}{20,0141s^4 + 11,749s^3 + 16,987s^2 + 1,1602s + 1}$$

que tem pólos em $s = -0,2795 \pm j0,88306$ e $s = -0,0141 \pm j0,2547$.
Os resíduos nestes pólos são os pares $J_{1,2} = 0,18235 \pm j0,24077$ e $J_{3,4} = 5,6638 \times 10^{-3} \pm j2,2615 \times 10^{-3}$, respectivamente, os MDI são:

$\frac{M_1 \phi_1}{M_2 \phi_2}$
 $\Delta \frac{M_1 \phi_1}{M_2 \phi_2}$

$$\gamma_{1,2} = -\text{Re} \left[\frac{0,18235 \pm j0,24077}{-0,2795 \pm j0,88306} \right] = 0,32676$$

$\frac{J_1}{s} + \frac{J_2}{s}$

$$\gamma_{3,4} = -\text{Re} \left[\frac{5,6638 \times 10^{-3} \pm j2,2615 \times 10^{-3}}{-0,0141 \pm j0,2547} \right] = -7,6281 \times 10^{-3}$$

Os valores percentuais são $|\gamma_{1,2}| = 48,86\%$ e $|\gamma_{3,4}| = 1,14\%$.

- 
-
- ▶ Funções de transferência simplificadas que retêm pólos lentos e rápidos, respectivamente, são:

$$R_l(s) = \frac{2,9668 \times 10^{-2}s + 4,1527 \times 10^{-2}}{s^2 + 2,8134 \times 10^{-2}s + 6,5061 \times 10^{-2}}$$

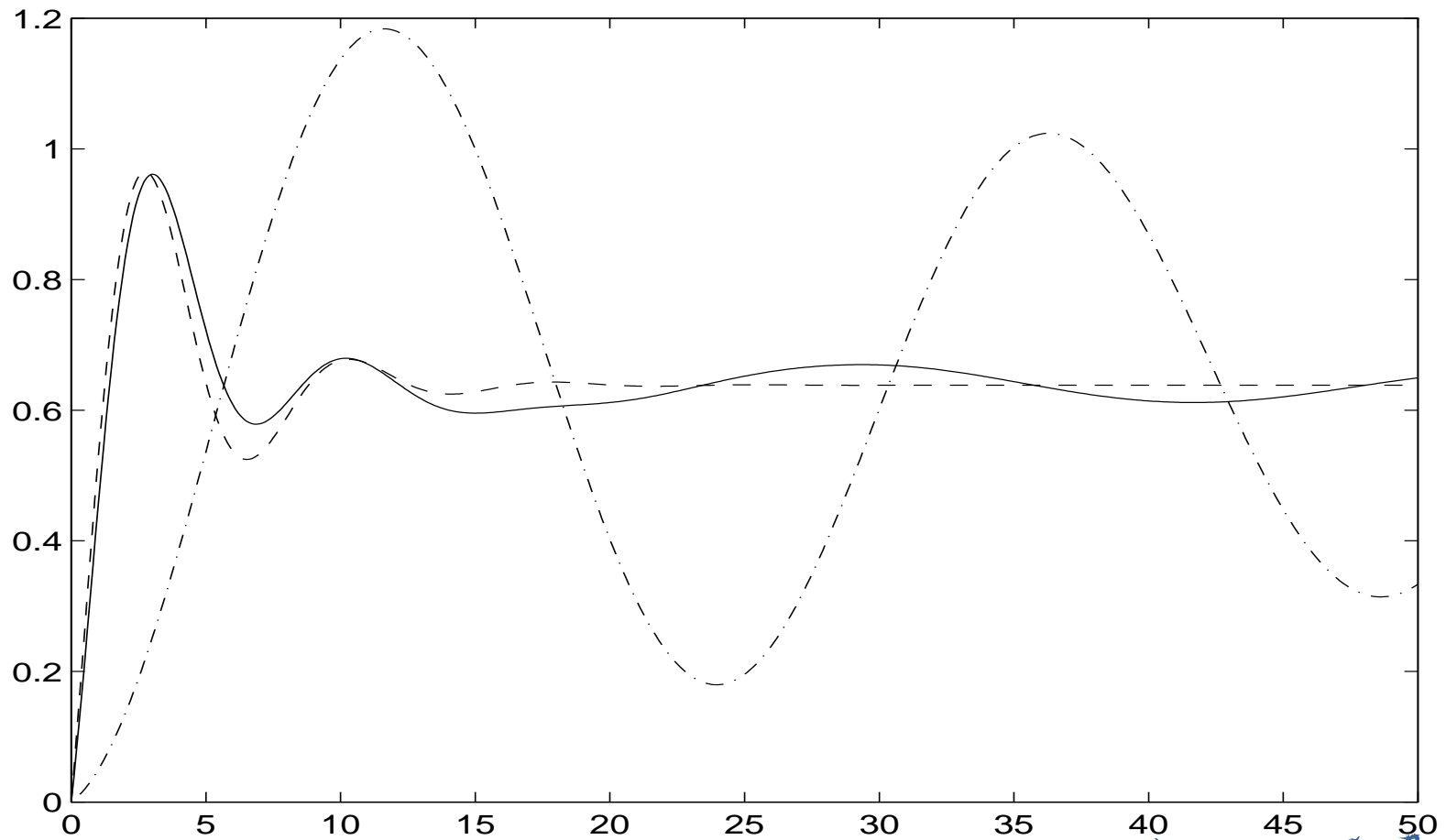
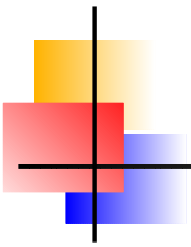
$$R_r(s) = \frac{0,49496s + 0,49017}{s^2 + 0,55890s + 0,76797}$$

- 
- ▶ Funções de transferência simplificadas que retêm pólos lentos e rápidos, respectivamente, são:

$$R_1(s) = \frac{2,9668 \times 10^{-2}s + 4,1527 \times 10^{-2}}{s^2 + 2,8134 \times 10^{-2}s + 6,5061 \times 10^{-2}}$$

$$R_r(s) = \frac{0,49496s + 0,49017}{s^2 + 0,55890s + 0,76797}$$

- ▶ Os coeficientes dos numeradores de $R_r(s)$ e de $R_1(s)$ foram calculados de forma a ajustar *coeficientes de Padé* da função de transferência original.



$$y(t) = \underline{k_1} e^{-t} + k_2 e^{-t} + \underline{k_3} e^{-t} + A e^{-t}$$

Figura 2: Respostas ao degrau do (—) modelo original e dos modelos simplificados (---) $R_1(s)$ e (- -) $R_r(s)$



Resposta Temporal

- ▶ A função de transferência é a transformada de Laplace da resposta ao impulso.



Resposta Temporal

- ▶ A função de transferência é a transformada de Laplace da resposta ao impulso.
- ▶ A resposta temporal $y(t)$ de um sistema, cuja resposta ao impulso é $h(t)$, quando excitado por uma entrada $u(t)$, é:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \{H(s)U(s)\}.$$



Resposta temporal de uma função de transferência

- ▶ A resposta ao impulso de $H(s)$ é $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$, ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s+2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-6}{s+3}\right\}$$



Resposta temporal de uma função de transferência

▶ A resposta ao impulso de $H(s)$ é $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$, ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s+2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-6}{s+3}\right\}$$

▶ ou

$$h(t) = -e^{-t} + 7e^{-2t} - 6e^{-3t}.$$

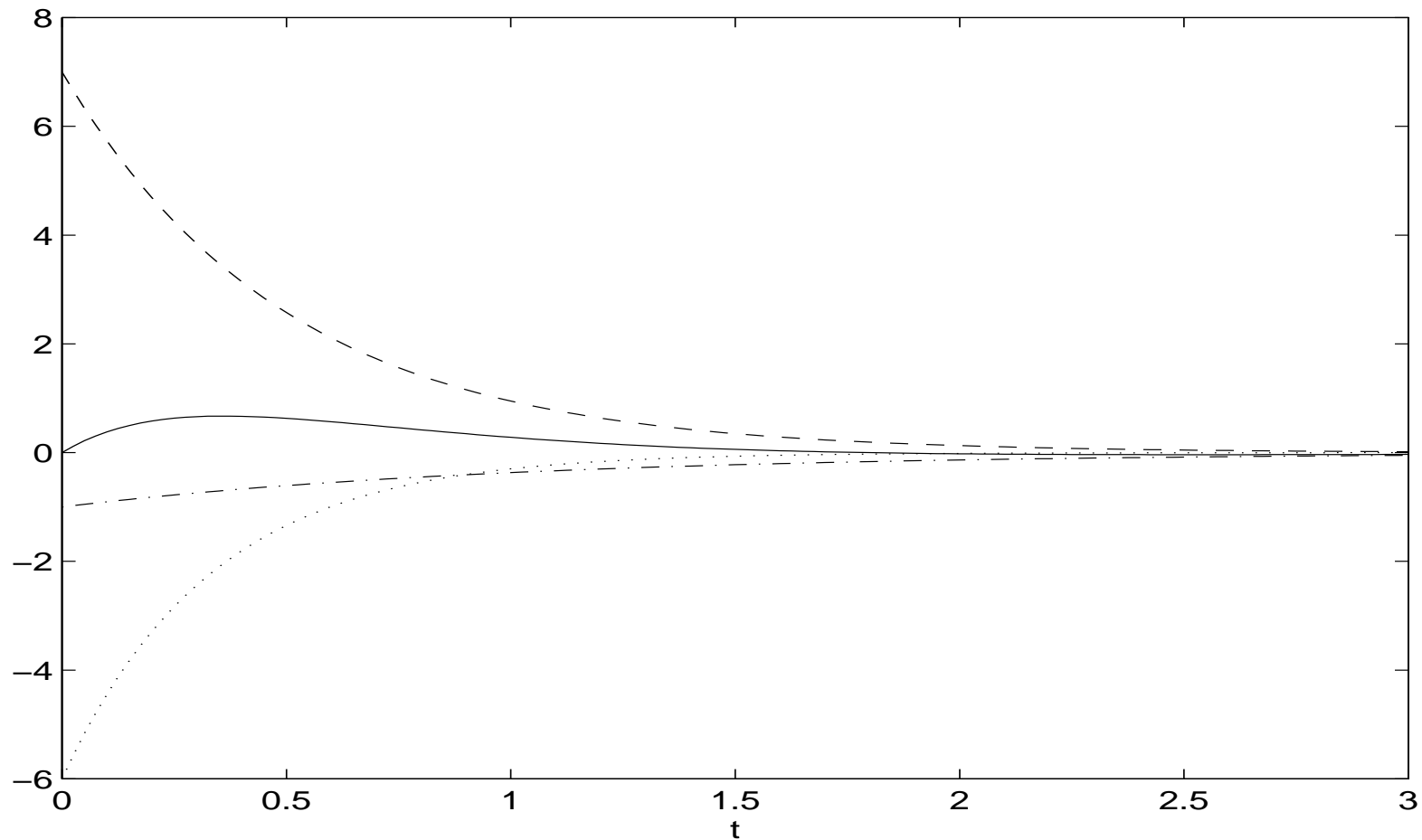
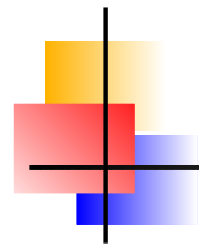


Figura 3: Respostas ao impulso da (—) função de transferência completa e dos três modos (---) $-1/(s + 1)$, (- -) $7/(s + 2)$ e (···) $-6/(s + 3)$.



Resposta temporal de modelo reduzido

- ▶ A resposta ao degrau de $R_r(s)$ (ver exemplo 14) é

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{R_r(s)U(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{0,49496s + 0,49017}{s^2 + 0,55890s + 0,76797} \frac{1}{s} \right\}.$$



Resposta temporal de modelo reduzido

- ▶ A resposta ao degrau de $R_r(s)$ (ver exemplo 14) é

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{R_r(s)U(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{0,49496s + 0,49017}{s^2 + 0,55890s + 0,76797} \frac{1}{s} \right\}.$$

- ▶ A decomposição em frações parciais resulta em

$$R_r(s)U(s) = \frac{J_1 s + J_2}{s^2 + 0,55890s + 0,76797} + \frac{J_3}{s}$$

ou

$$R_r(s)U(s) = \frac{-0,638s}{s^2 + 0,55890s + 0,76797} + \frac{0,138}{s^2 + 0,55890s + 0,76797} + \frac{0,638}{s}.$$



Finalmente, tomando-se a transformada inversa de Laplace, tem-se

$$y(t) = \frac{0,638}{\sqrt{1-0,1017}} e^{-0,2794t} \text{sen}(0,8306t - \phi) + \frac{0,138}{0,76797} \frac{0,8763}{\sqrt{1-0,1017}} e^{-0,2794t} \text{sen}(0,8306t) + 0,638,$$

sendo que

$\phi = \tan^{-1} \sqrt{(1 - \zeta^2)}/\zeta = \tan^{-1} \sqrt{(1 - 0,1017)}/0,3188 = 1,25 \text{ rad}$ ou $\phi = 71,4^\circ$. A resposta $y(t)$ em (-28) é a curva tracejada da Figura 2.



Funções de transferência de primeira ordem

A resposta ao impulso da função de transferência

$$H(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

é

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau}$$

e a resposta ao degrau é

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{K/\tau}{s(s + 1/\tau)} = \frac{J_1}{s + 1/\tau} + \frac{J_2}{s},$$

sendo que $J_1 = -K$ e $J_2 = K$. Portanto,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} = K \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

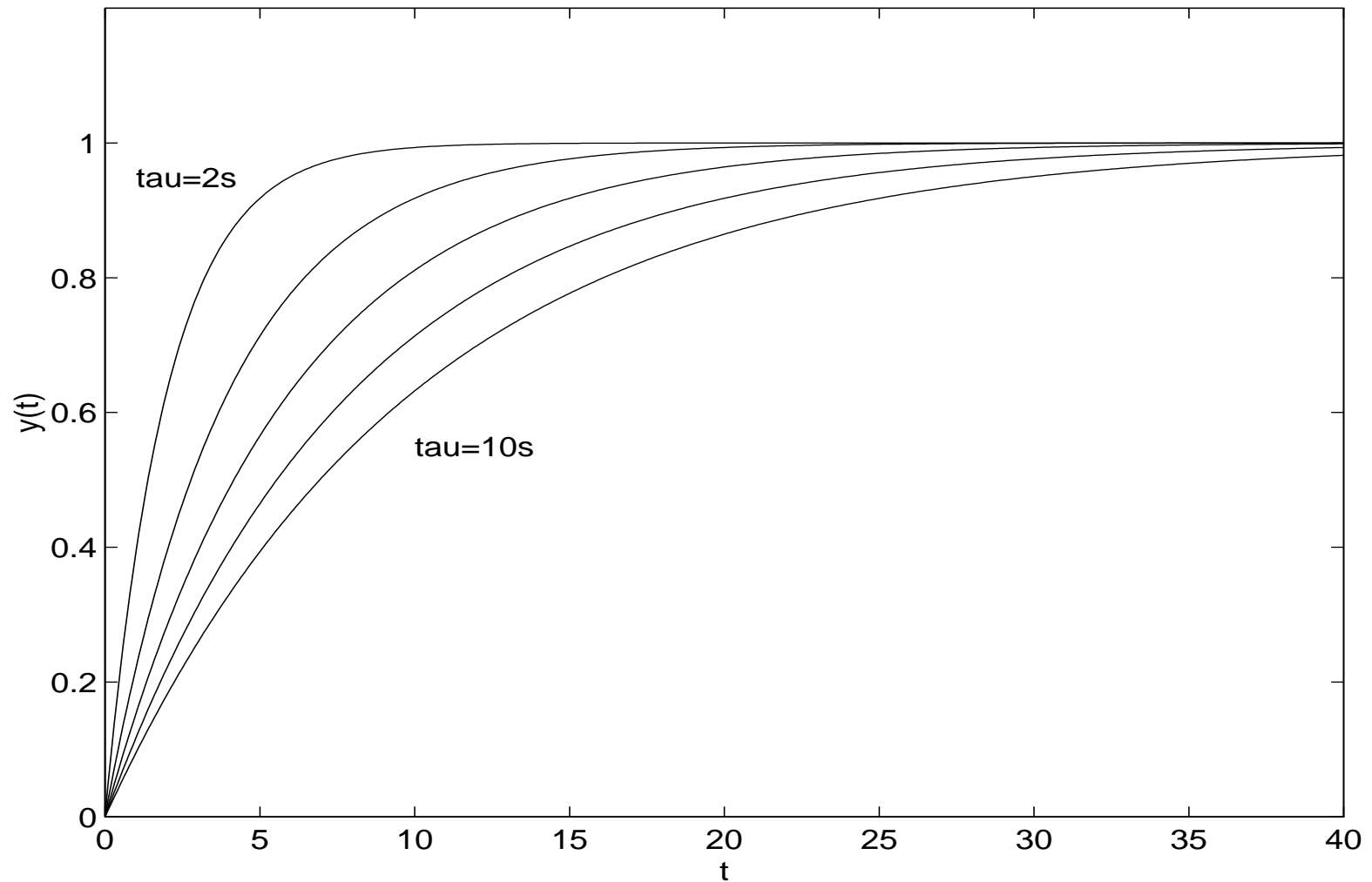
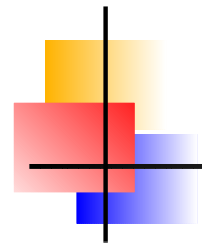


Figura 4: Respostas ao degrau unitário de $H(s) = 1/(\tau s + 1)$ para $\tau = 2, 4, 6, 8$ e 10 s .



Funções de transferência de segunda ordem

As respostas ao impulso e ao degrau da função de transferência de segunda ordem

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

são, respectivamente:

$$h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t)$$

$$h(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \text{sen} \left(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \tan^{-1} \sqrt{1 - \zeta^2} / \zeta \right).$$

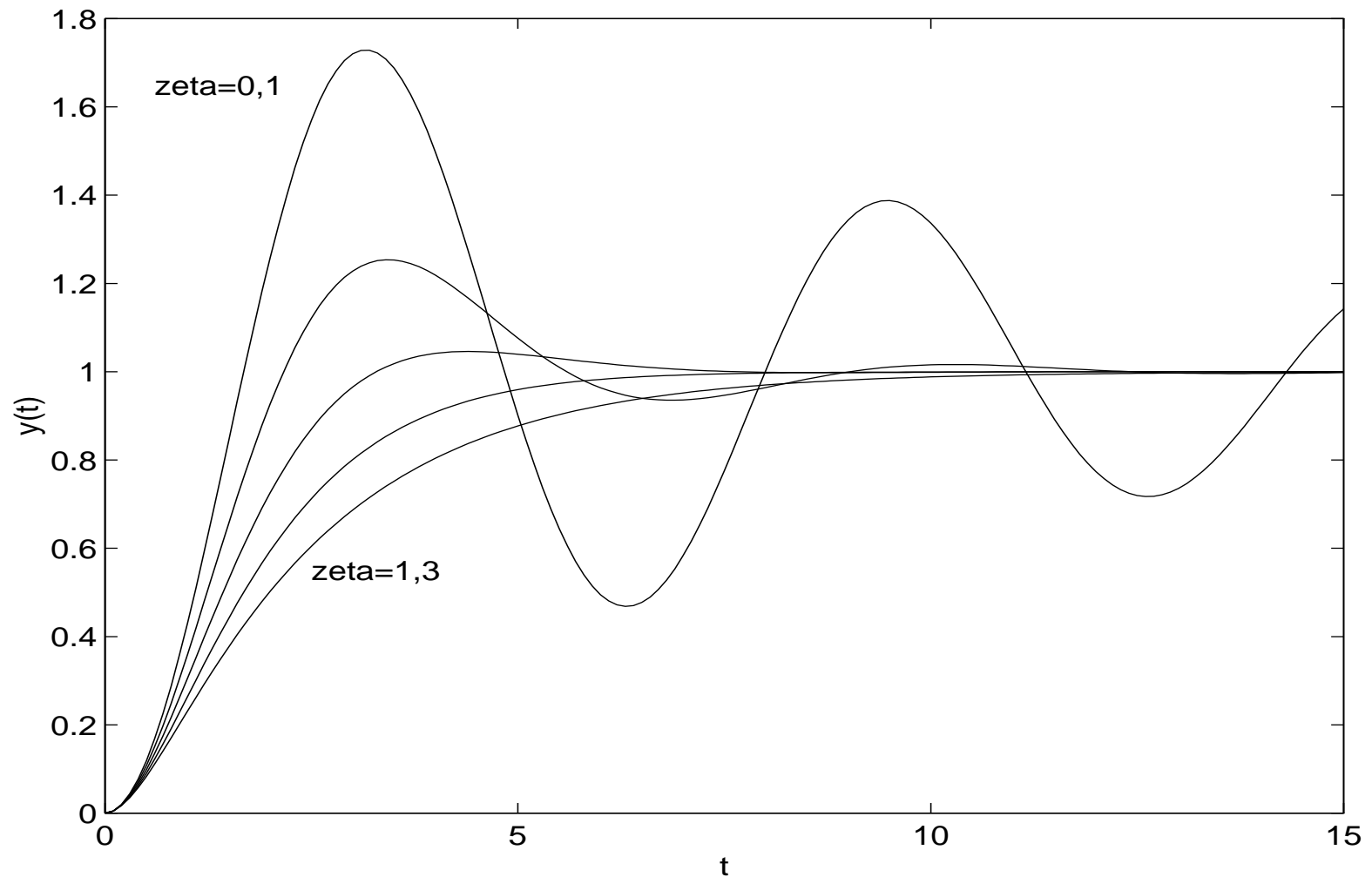
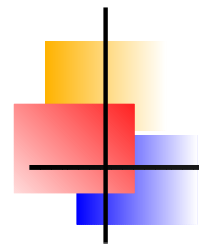


Figura 5: Respostas ao degrau unitário de $H(s) = 1/(s^2 + 2\zeta s + 1)$ para $\zeta = 0,1, 0,4, 0,7, 1,0$ e $1,3$.



Funções de transferência com atraso puro de tempo

- ▶ A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é definida como

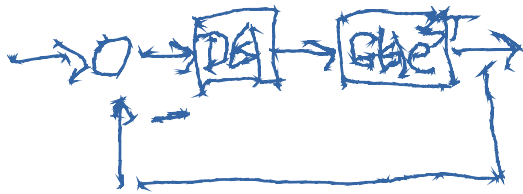
$$F(s) = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau.$$

Funções de transferência com atraso puro de tempo

- ▶ A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é definida como

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

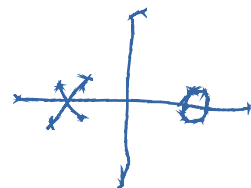
- ▶ Um atraso de τ_d unidades de tempo nessa função pode ser representado como $f(t - \tau_d)$ e



$$F_a(s) = \int_0^{\infty} f(\tau - \tau_d) e^{-s\tau} d\tau.$$

$$\frac{D(s)G(s)e^{-s\tau_d}}{1 + D(s)G(s)e^{-s\tau_d}}$$

$e^{-s\tau_d} = 1 - s\tau_d + \dots$
 Infinitos polos



$$\frac{s - \tau_d/\tau_d}{s + \tau_d/\tau_d}$$

$$1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \dots$$

Funções de transferência com atraso puro de tempo

- ▶ A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é definida como

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} d\tau.$$

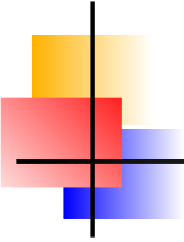
- ▶ Um atraso de τ_d unidades de tempo nessa função pode ser representado como $f(t - \tau_d)$ e

$$F_a(s) = \int_0^{\infty} f(\tau - \tau_d)e^{-s\tau} d\tau.$$

- ▶ Substituindo-se $\tau = t - \tau_d$, tem-se

delayest ()

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t - \tau_d)e^{-s(t-\tau_d)} dt \\ e^{-\tau_d s} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t - \tau_d)e^{-st} dt \\ &= F_a(s). \end{aligned}$$

- 
- ▶ É possível representar $e^{-\tau_d s}$ de forma aproximada como uma razão de polinômios em s , usando *aproximações de Padé* como se segue:

$$e^{-\tau_d s} \approx R_n(s) = \frac{Q_n(-\tau_d s)}{Q_n(\tau_d s)},$$

sendo

$$Q_n(s) = \sum_{j=0}^n \frac{(n+j)!}{j!(n-j)!} (\tau_d s)^{n-j}.$$



Aproximação de atraso puro de tempo

- ▶ Sejam as seguintes aproximações do atraso puro de tempo e^{-s} :

$$R_1(s) = \frac{-s + 2}{s + 2}$$

$$R_2(s) = \frac{s^2 - 6s + 12}{s^2 + 6s + 12}$$

$$R_3(s) = \frac{-s^3 + 12s^2 - 60s + 120}{s^3 + 12s^2 + 60s + 120}.$$



Aproximação de atraso puro de tempo

- ▶ Sejam as seguintes aproximações do atraso puro de tempo e^{-s} :

$$R_1(s) = \frac{-s + 2}{s + 2}$$

$$R_2(s) = \frac{s^2 - 6s + 12}{s^2 + 6s + 12}$$

$$R_3(s) = \frac{-s^3 + 12s^2 - 60s + 120}{s^3 + 12s^2 + 60s + 120}.$$

- ▶ As respostas são

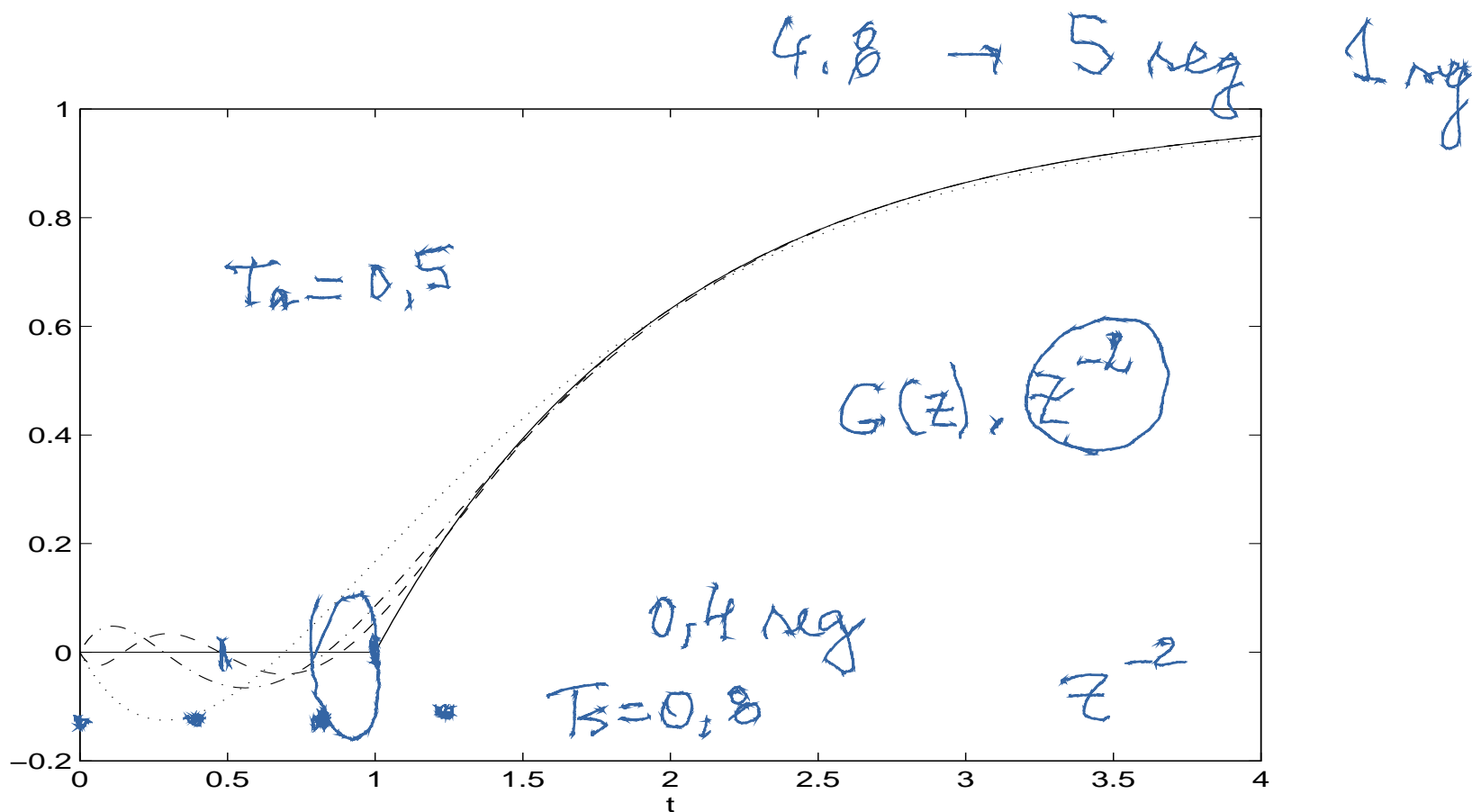
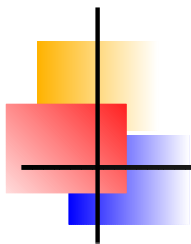


Figura 6: Respostas ao degrau unitário de (—) $H(s) = e^{-s}/s + 1$ e das respectivas funções de transferência utilizando aproximações para o atraso puro de tempo de (\cdots) $R_1(s)$, ($- \cdot -$) $R_2(s)$ e ($- -$) $R_3(s)$.



Resposta em Freqüência

- ▶ Seja um sistema linear com função de transferência $H(s)$ excitado por uma senóide $u(t) = \text{sen}(\omega t)$,
 $\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s) = \omega/(s^2 + \omega^2)$. A resposta em regime permanente de $H(s)$ é:

$$\mathcal{L}^{-1} \{H(s)U(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ H(s) \left[\frac{J}{s + j\omega} + \frac{J^*}{s - j\omega} \right] \right\}.$$



Resposta em Freqüência

- ▶ Seja um sistema linear com função de transferência $H(s)$ excitado por uma senóide $u(t) = \text{sen}(\omega t)$, $\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s) = \omega/(s^2 + \omega^2)$. A resposta em regime permanente de $H(s)$ é:

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\left[\frac{J}{s + j\omega} + \frac{J^*}{s - j\omega}\right]\right\}.$$

- ▶ Os resíduos nos pólos $s = \pm j\omega$ são:

$$\begin{aligned} J &= H(s) \left[\frac{\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} \right] (s + j\omega) \Big|_{s = -j\omega} \\ &= H(-j\omega) \frac{\omega}{-2j\omega} = -\frac{H(-j\omega)}{2j}. \\ J^* &= \frac{H(j\omega)}{2j}. \end{aligned}$$



▶ A resposta em frequência do sistema, $H(j\omega)$ é:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi},$$
$$H(-j\omega) = |H(-j\omega)| e^{-j\phi} = |H(j\omega)| e^{-j\phi}.$$

- 
-
- ▶ A resposta em frequência do sistema, $H(j\omega)$ é:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi},$$
$$H(-j\omega) = |H(-j\omega)| e^{-j\phi} = |H(j\omega)| e^{-j\phi}.$$

- ▶ A resposta temporal do sistema acima é:

$$y(t) = J e^{-j\omega t} + J^* e^{j\omega t} + J_{p_1} e^{p_1 t} + \dots + J_{p_n} e^{p_n t}.$$

- 
- ▶ A resposta em frequência do sistema, $H(j\omega)$ é:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi},$$
$$H(-j\omega) = |H(-j\omega)| e^{-j\phi} = |H(j\omega)| e^{-j\phi}.$$

- ▶ A resposta temporal do sistema acima é:

$$y(t) = J e^{-j\omega t} + J^* e^{j\omega t} + \underbrace{J_{p_1} e^{p_1 t} + \dots + J_{p_n} e^{p_n t}}.$$

- ▶ Se o sistema for assintoticamente estável (ou seja, $p_i < 0$, $i = 1, \dots, n$), a saída do sistema será

$$y(t) = J e^{-j\omega t} + J^* e^{j\omega t},$$

que é a representação de Euler de uma senóide.



► Usando as definições dos resíduos, tem-se

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{H(j\omega)}{2j} e^{j\omega t} - \frac{H(-j\omega)}{2j} e^{-j\omega t} \\&= \frac{|H(j\omega)| e^{j\phi}}{2j} e^{j\omega t} - \frac{|H(j\omega)| e^{-j\phi}}{2j} e^{-j\omega t} \\&= |H(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \\&= |H(j\omega)| \operatorname{sen}(\omega t + \phi).\end{aligned}$$



Resposta em freqüência de sistema com dominância modal

A resposta em freqüência de

$$H(s) = \frac{7,526s^3 + 10,357s^2 + 0,92051s + 0,63827}{20,0141s^4 + 11,749s^3 + 16,987s^2 + 1,1602s + 1}$$

é mostrada na figura

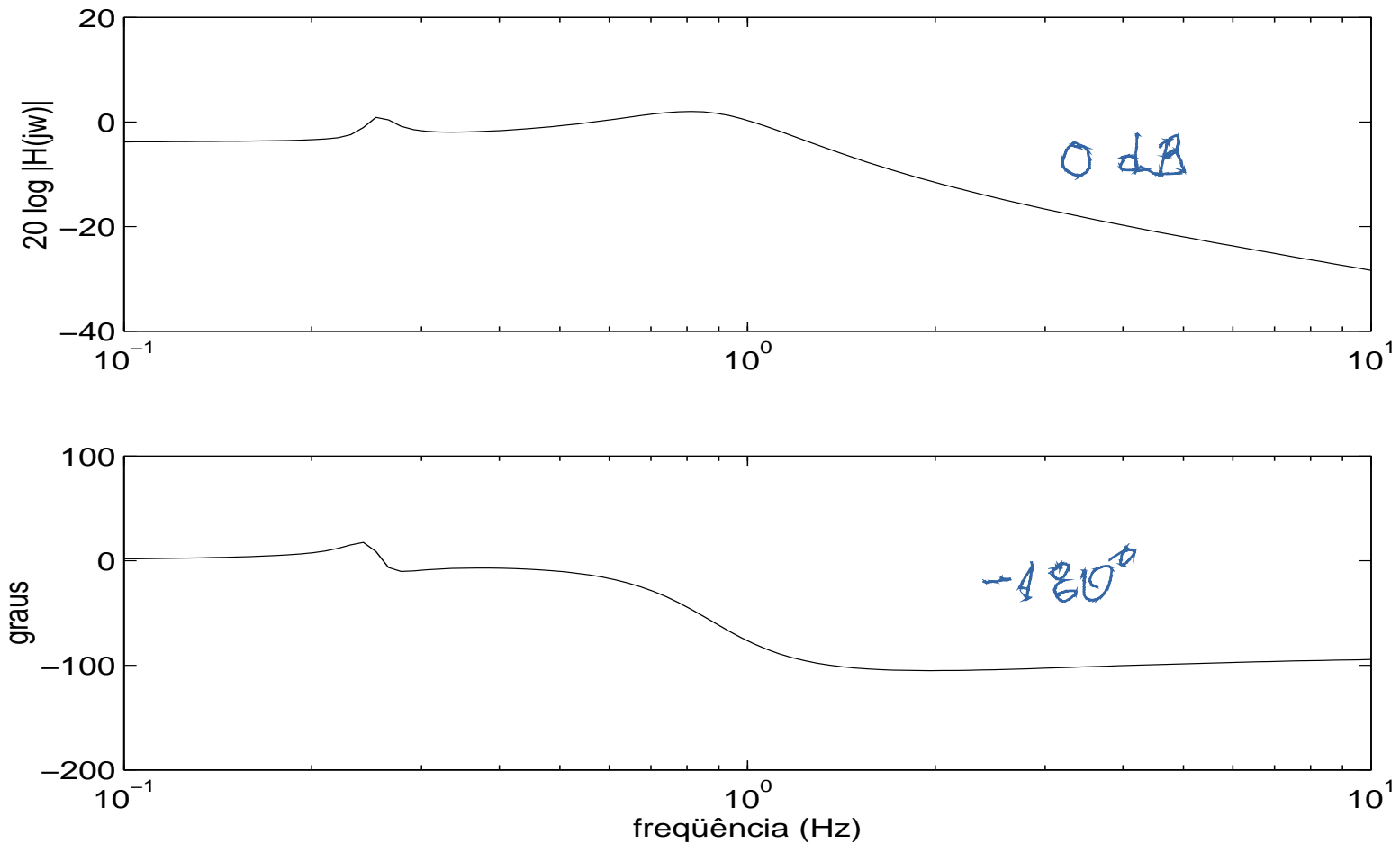
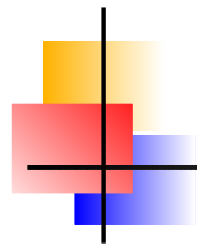
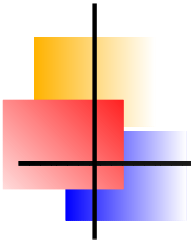


Figura 7: Respostas em frequência. O diagrama superior mostra o ganho, e o inferior a fase. A ressonância em torno de 0,27 rad/s, devida aos pólos lentos, é relativamente pequena .



A figura abaixo mostra as respostas em frequência de (—) $K = 1$, (--) $1/j\omega$ e (-.-) $j\omega$.

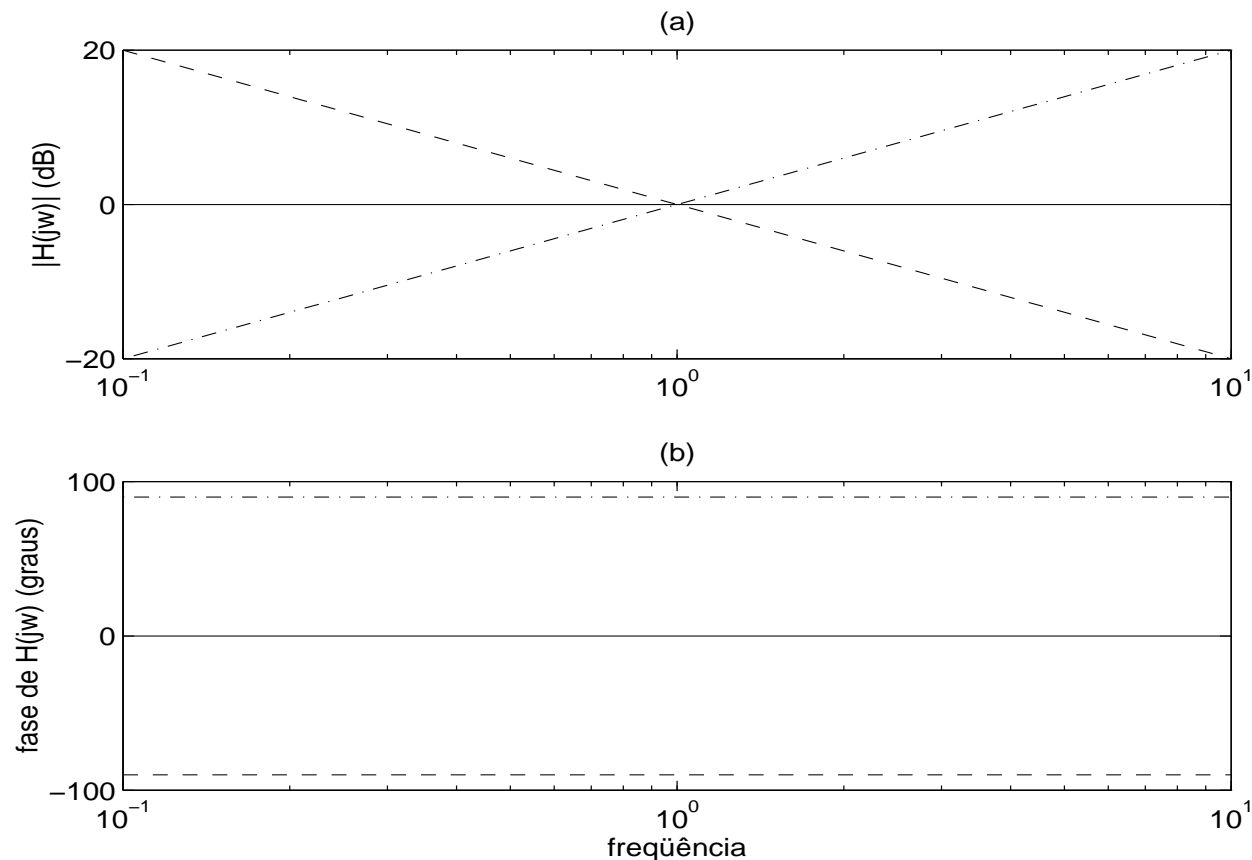


Figura 8: Respostas em frequência de (—) $K = 1$, (--) $1/j\omega$ e (-.-) $j\omega$. (a) ganho, e (b) fase .



Funções de transferência de primeira ordem

► Seja

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau}.$$



Funções de transferência de primeira ordem

▶ Seja

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau}.$$

▶ O módulo dessa função é

$$\begin{aligned} 20 \log | H(j\omega) | &= 20 \log \left| \frac{K - j\omega\tau K}{1 + \omega^2\tau^2} \right| \\ &= 20 \log \sqrt{\frac{K^2}{(1 + \omega^2\tau^2)^2} + \frac{(K\omega\tau)^2}{(1 + \omega^2\tau^2)^2}} \\ &= 20 \log \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \\ &= 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \text{ dB.} \end{aligned}$$



Funções de transferência de primeira ordem

▶ Seja

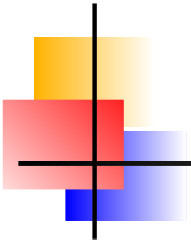
$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau}.$$

▶ O módulo dessa função é

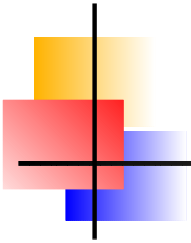
$$\begin{aligned} 20 \log | H(j\omega) | &= 20 \log \left| \frac{K - j\omega\tau K}{1 + \omega^2\tau^2} \right| \\ &= 20 \log \sqrt{\frac{K^2}{(1 + \omega^2\tau^2)^2} + \frac{(K\omega\tau)^2}{(1 + \omega^2\tau^2)^2}} \\ &= 20 \log \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \\ &= 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \text{ dB.} \end{aligned}$$

▶ Para baixas frequências, $\omega \ll 1/\tau$ e $1 + \omega^2\tau^2 \approx 1$, logo

$$20 \log | H(j\omega) | = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1} = 20 \log K \text{ dB.}$$

- 
-
- ▶ Para altas frequências, $\omega \gg 1/\tau$ e $1 + \omega^2\tau^2 \approx \omega^2\tau^2$ e

$$\begin{aligned} 20 \log | H(j\omega) | &= 20 \log K - 20 \log \sqrt{\omega^2\tau^2} \\ &= 20 \log K - 20 \log \omega\tau \text{ dB.} \end{aligned}$$

- 
-
- ▶ Para altas frequências, $\omega \gg 1/\tau$ e $1 + \omega^2\tau^2 \approx \omega^2\tau^2$ e

$$\begin{aligned} 20 \log | H(j\omega) | &= 20 \log K - 20 \log \sqrt{\omega^2\tau^2} \\ &= 20 \log K - 20 \log \omega\tau \text{ dB.} \end{aligned}$$

- ▶ O ângulo de fase é $\phi = -\tan^{-1}\omega\tau$.

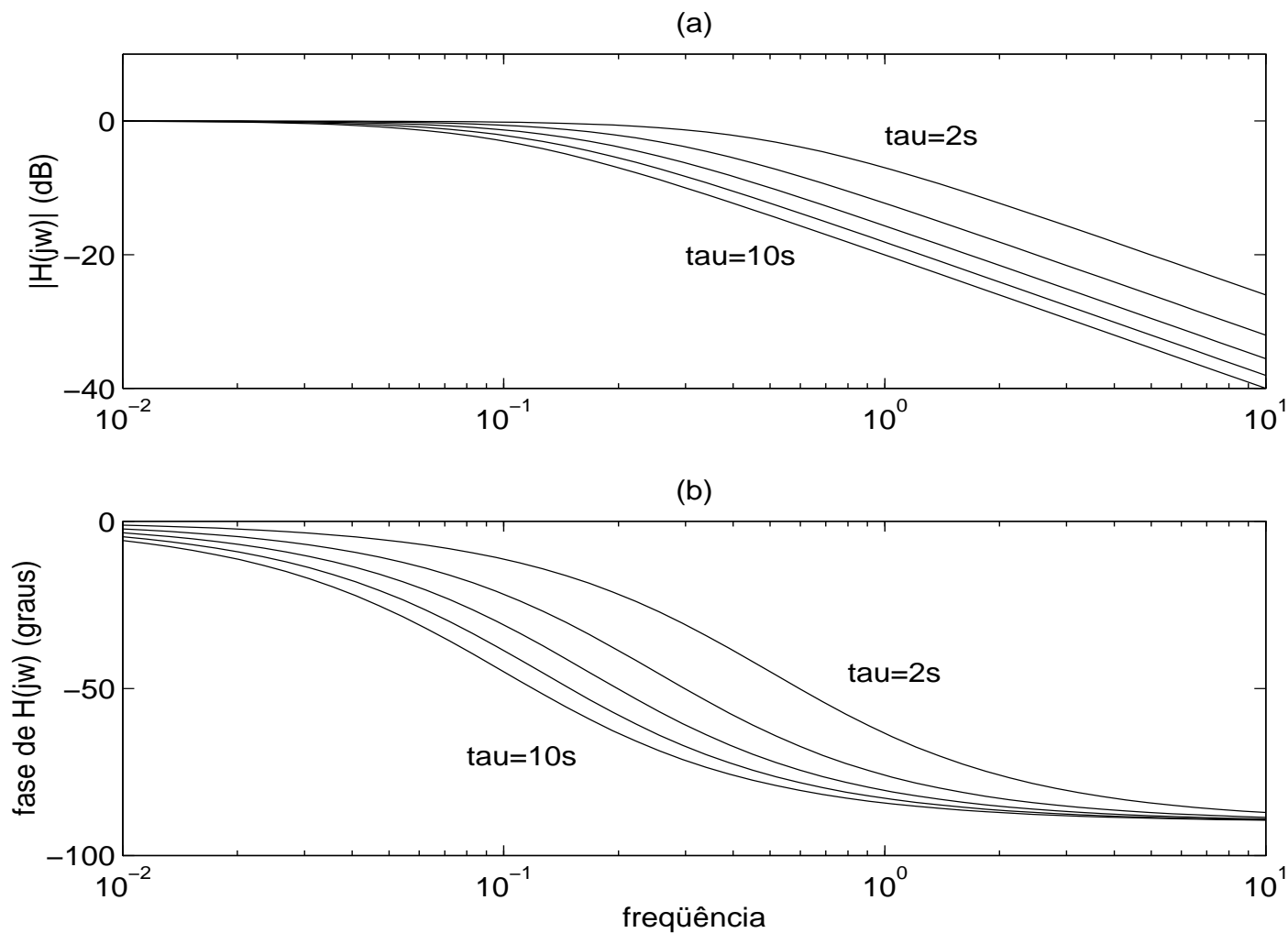
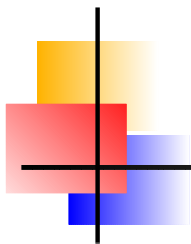


Figura 9: Respostas em frequência de $H(s) = 1/(\tau j\omega + 1)$, para vários valores do parâmetro τ . (a) ganho, e (b) fase .

Resposta em freqüência de $(1 + j\omega\tau)$

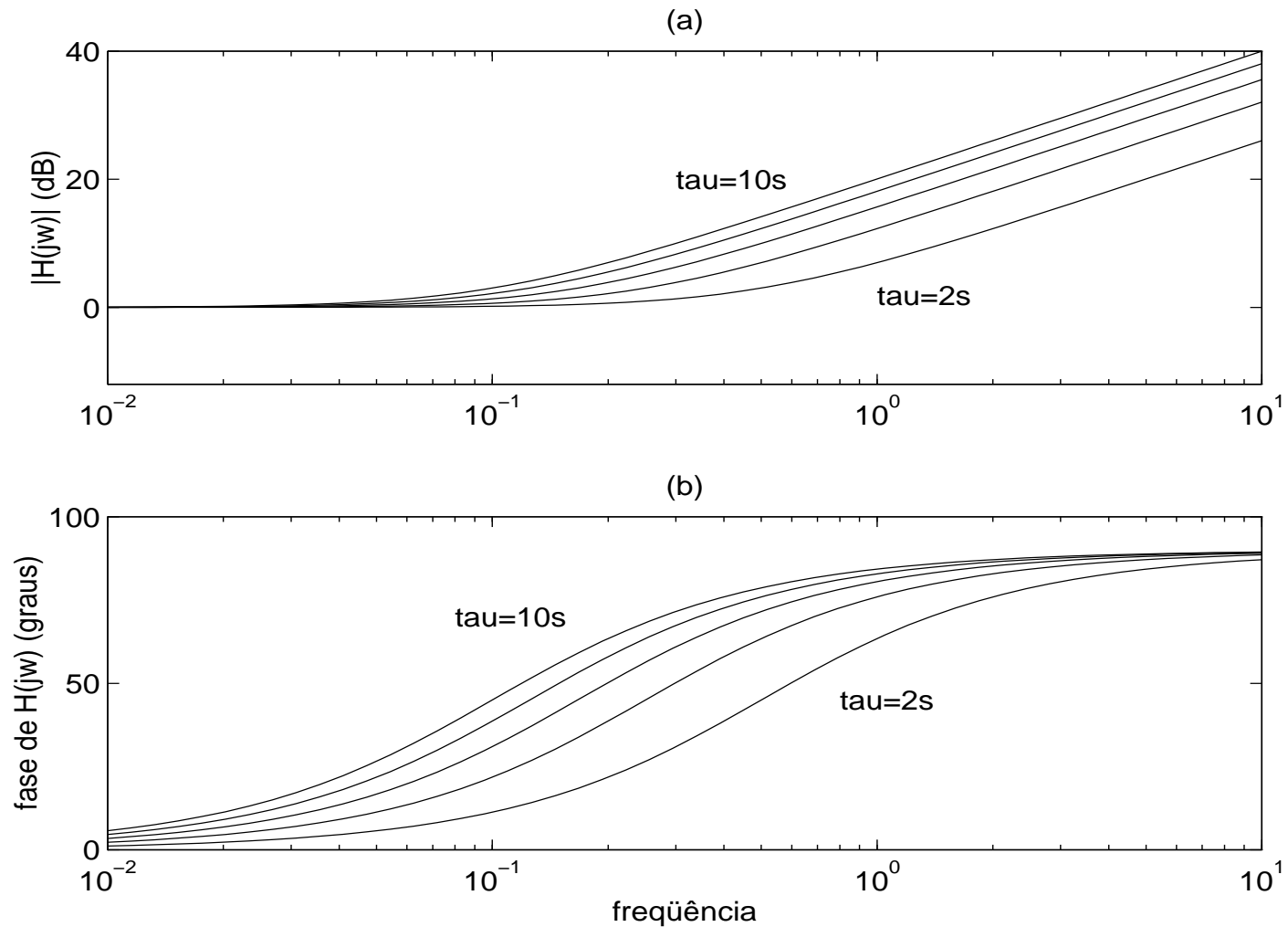


Figura 10: Respostas em freqüência de $\tau j\omega + 1$. (a) ganho, $20 \log \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$ e (b) fase $\phi = \tan^{-1}\omega\tau$.



Funções de transferência de segunda ordem

▶ O módulo de

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2}$$



Funções de transferência de segunda ordem

▶ O módulo de

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2}$$

▶ é

$$20 \log | H(j\omega) | = -20 \log \sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2} \text{ dB.}$$



Funções de transferência de segunda ordem

- ▶ O módulo de

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2}$$

- ▶ é

$$20 \log | H(j\omega) | = -20 \log \sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2} \text{ dB.}$$

- ▶ Para baixas frequências ($\omega \ll \omega_n$), tem-se

$$20 \log | H(j\omega) | = -20 \log \sqrt{1} = 0 \text{ dB.}$$



▶ Para altas frequências ($\omega \gg \omega_n$), tem-se

$$20 \log | H(j\omega) | = -20 \log \omega^2 / \omega_n^2 = -40 \log \omega / \omega_n \text{ dB.}$$

- 
-
- ▶ Para altas frequências ($\omega \gg \omega_n$), tem-se

$$20 \log | H(j\omega) | = -20 \log \omega^2 / \omega_n^2 = -40 \log \omega / \omega_n \text{ dB.}$$

- ▶ O ângulo de fase é dado por

$$\phi = -\tan^{-1} \left(\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - \omega^2/\omega_n^2} \right).$$

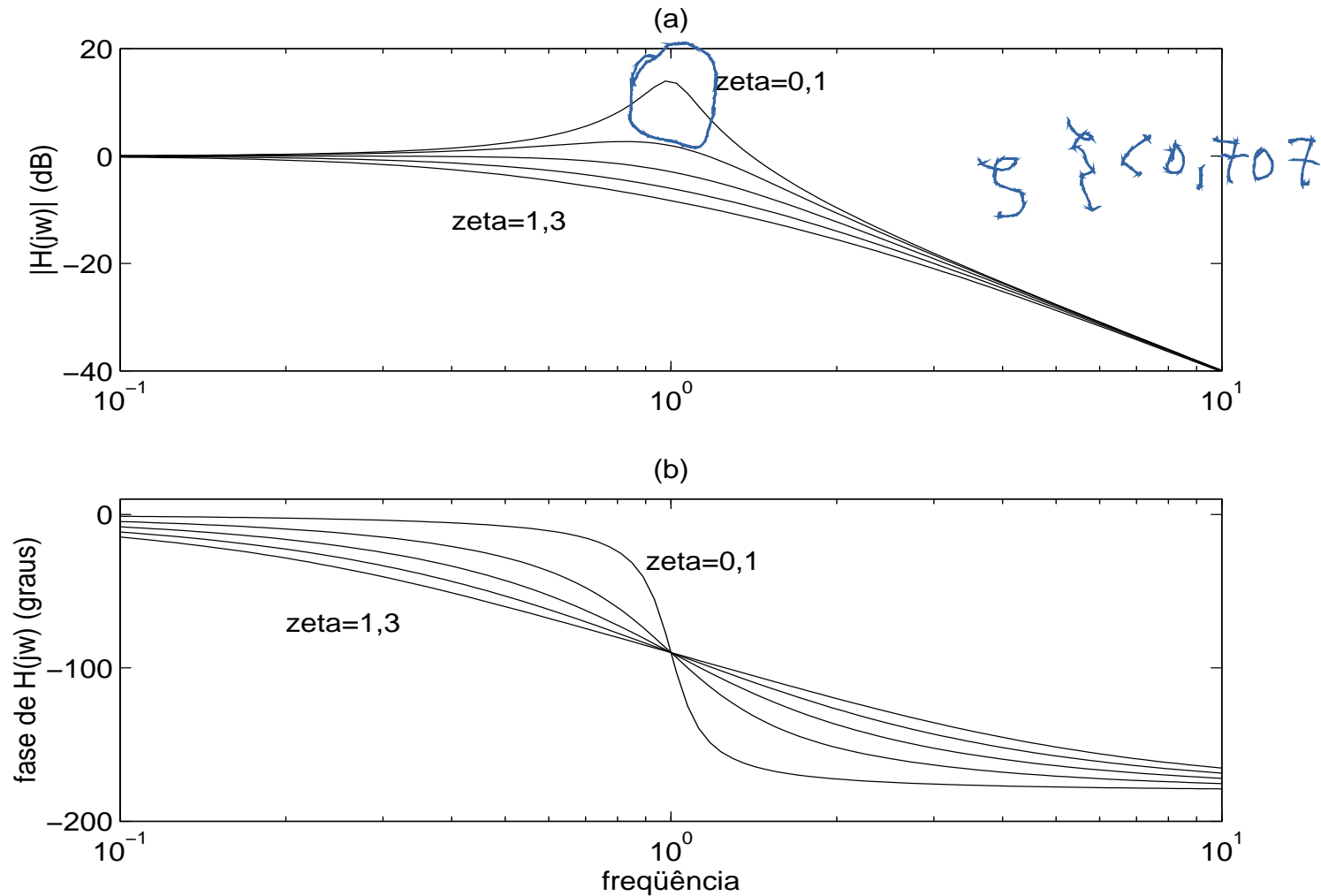
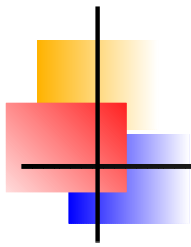


Figura 11: Respostas em freqüência de (-50), para vários valores do quociente de amortecimento ζ . (a) ganho, e (b) fase .



Funções de transferência com atraso puro de tempo

- ▶ A resposta em frequência do atraso puro de tempo pode ser obtida facilmente lembrando que, por definição, $e^{-\tau_d s}$ representa uma grandeza que é complexa com módulo unitário e com ângulo de fase igual a $-\omega\tau_d$.

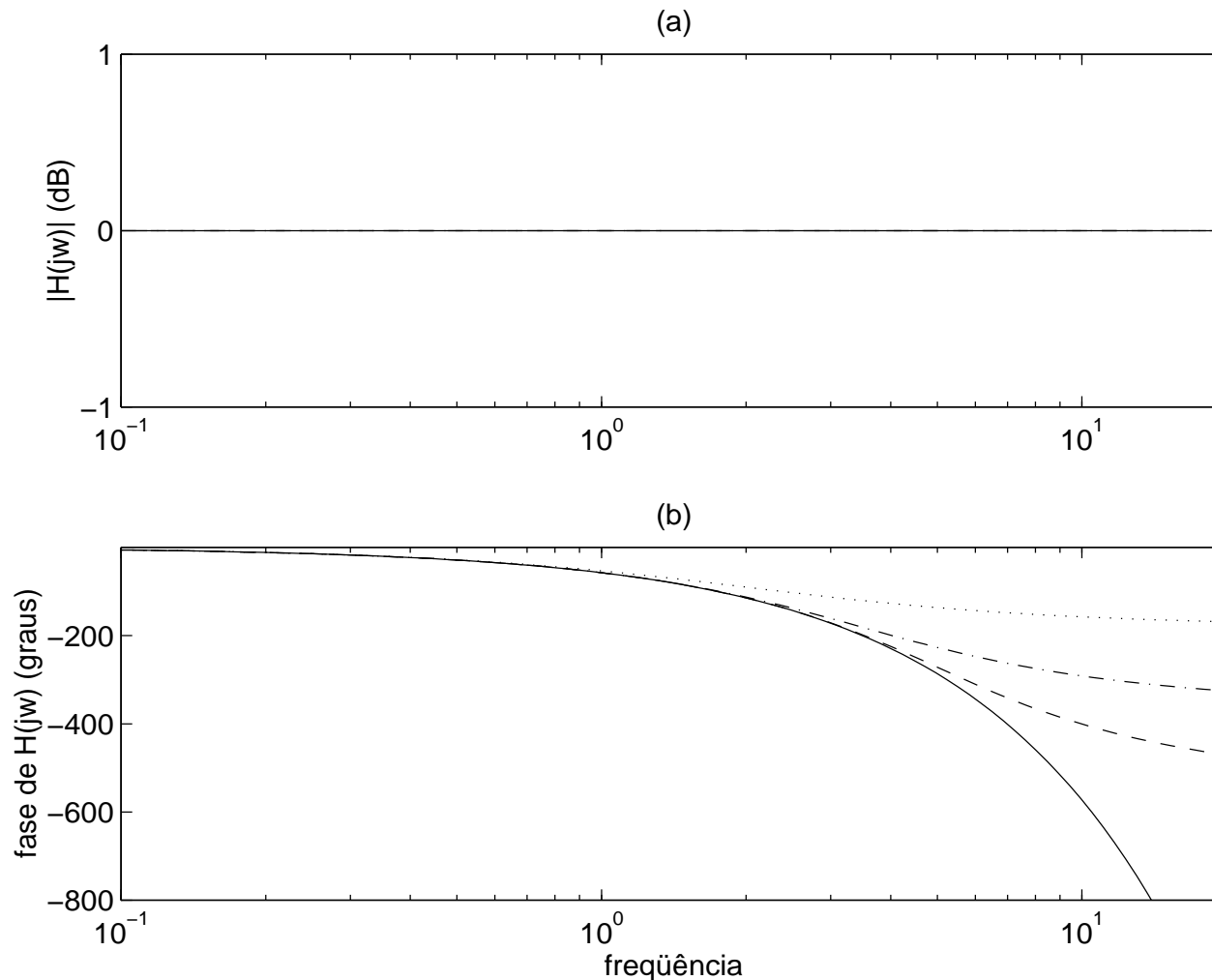
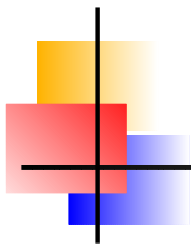


Figura 12: Resposta em frequência de (—) $e^{-j\omega}$ e das aproximações de primeira, segunda e terceira ordem (\cdots) $R_1(j\omega)$, ($-\cdot-$) $R_2(j\omega)$ e ($- -$) $R_3(j\omega)$, respectivamente.



Representação no Espaço de Estados

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u},$$

sendo que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado; $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de entradas; $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saídas medidas e A , B , C e D são matrizes constantes. Será multivariável se $r > 1$ e/ou $p > 1$.



Função de transferência a partir do espaço de estados

- ▶ A transformada de Laplace ao modelo acima é

$$X(s)s = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s),$$



Função de transferência a partir do espaço de estados

- ▶ A transformada de Laplace do modelo acima é

$$X(s)s = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s),$$

- ▶ Manipulando a primeira equação, tem-se

$$(Is - A)X(s) = BU(s)$$

$$X(s) = (Is - A)^{-1} BU(s),$$



Função de transferência a partir do espaço de estados

- ▶ A transformada de Laplace do modelo acima é

$$X(s)s = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s),$$

- ▶ Manipulando a primeira equação, tem-se

$$(Is - A)X(s) = BU(s)$$

$$X(s) = (Is - A)^{-1}BU(s),$$

- ▶ e substituindo-se esse resultado na segunda, chega-se a

$$Y(s) = C(Is - A)^{-1}BU(s) + DU(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(Is - A)^{-1}B + D.$$

- 
-
- ▶ Seja a função de transferência

$$H(s) = C (I s - A)^{-1} B.$$

Os pólos de $H(s)$ são idênticos aos autovalores da matriz A .



Representação em espaço de estados de um circuito

As equações de um circuito RLC-série podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\frac{di(t)}{dt} &= \frac{1}{L} (-Ri(t) - v_c(t) + v(t)) \\ \frac{dv_c(t)}{dt} &= \frac{i(t)}{C},\end{aligned}$$

e que podem ser representadas em forma matricial como:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{i}(t) \\ \dot{v}_c(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v(t) \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}.\end{aligned}$$

Se $C = I$, o vetor de saída iguala o vetor \mathbf{X}

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx}.\end{aligned}$$

Representações Discretas

Considere o seguinte modelo geral:

$$A(q)y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}v(k),$$

sendo q^{-1} o operador de atraso, de forma que $y(k)q^{-1} = y(k-1)$, $v(k)$ ruído branco e $A(q)$, $B(q)$, $C(q)$, $D(q)$ e $F(q)$ os polinômios definidos a seguir:

q operador em \oplus
 q^{-1} q^{-2}
 z^{-1} z^{-2}

$y(k)$
 $y(k) = 2y(k-1) + x(k)$ AR
 $Y(z) = 2Y(z)z^{-1} + X(z)$
 $Y(z)[1 - 2z^{-1}] = X(z)$
 $Y(z) = \frac{X(z)}{1 - 2z^{-1}}$

$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{n_y}q^{-n_y};$$

$$B(q) = b_1q^{-1} + \dots + b_{n_u}q^{-n_u};$$

$$C(q) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_{n_\xi}q^{-n_\xi};$$

$$D(q) = 1 + d_1q^{-1} + \dots + d_{n_d}q^{-n_d};$$

$$F(q) = 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{n_f}q^{-n_f}.$$

$1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{n_y}z^{-n_y}$

$y(k) = 2y(k-1) + x(k)$
 $+ u(k) + v(k)$
 $Y(z)[1 - 2z^{-1}] = X(z)$
 $U(z)[1 + z^{-1}]$
 $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 2z^{-1}}$

$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k)$ AR

$A(q)y(k) = B(q)u(k)$ MA



Modelo de resposta ao impulso finita

O somatório de convolução é:

$$y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k-j) + \nu(k).$$

A equação acima é também conhecida como o modelo de resposta ao impulso infinita. Se $H(q)$ for estável, então existe $M < \infty$, de forma que $h(k) = 0, \forall k > M$. Truncando a equação resulta no modelo de resposta ao impulso finita

$$y(k) = \sum_{j=0}^M h(j)u(k-j) + e(k).$$

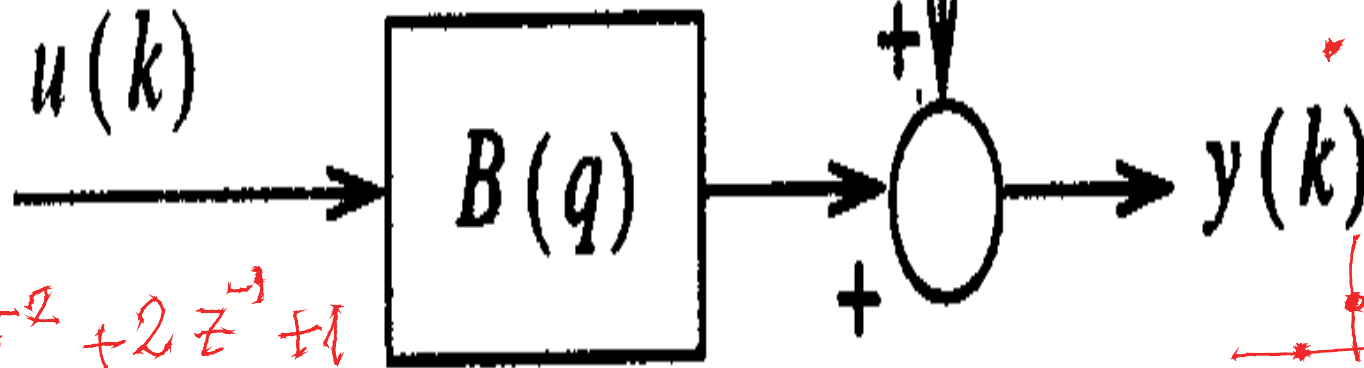
O modelo FIR pode ser obtido a partir do modelo geral, tomando-se $A(q) = C(q) = D(q) = F(q) = 1$ e $B(q)$ um polinômio arbitrário de ordem M , ou seja, $n_u = M$. Nesse caso, tem-se

$$y(k) = B(q)u(k) + e(k).$$

→ Só Zero

$$y(k) = B(q)x(k) + ve(k) = v(k)$$

$$y(k) = \underbrace{u(k-2)}_4 + 2 \underbrace{x(k-1)}_4 + u(k)$$



$$\frac{Y(z)}{U(z)} = z^{-2} + 2z^{-1} + 1$$

no zeros

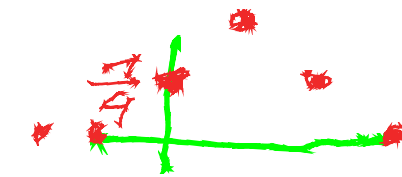
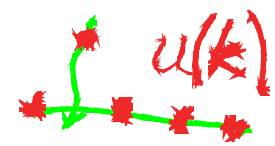


Figura 13: Representação Esquemática do modelo FIR

Modelo ARX

O modelo auto-regressivo com entradas externas pode ser obtido a partir do modelo geral, tomando-se

$C(q) = D(q) = F(q) = 1$ e $A(q)$ e $B(q)$ polinômios arbitrários, resultando em

$$1 + \dots + q^{-1}$$

$$y(k) = \frac{B}{A} u$$

$$\frac{A \nu}{A}$$

ARMAX

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + \nu(k).$$

AR

MV A MA

$$B(q) = 1$$

O modelo ARX é normalmente classificado como pertencendo à classe de modelos de *erro na equação*. O modelo ARX pode ser reescrito da seguinte forma:

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{1}{A(q)}\nu(k),$$

o que coloca em evidência as funções de transferência do sistema $H(q) = B(q)/A(q)$ e de ruído $C(q)/[D(q)A(q)] = 1/A(q)$. O ruído que aparece adicionado à saída $e(k) = \nu(k)/A(q)$ não é branco.

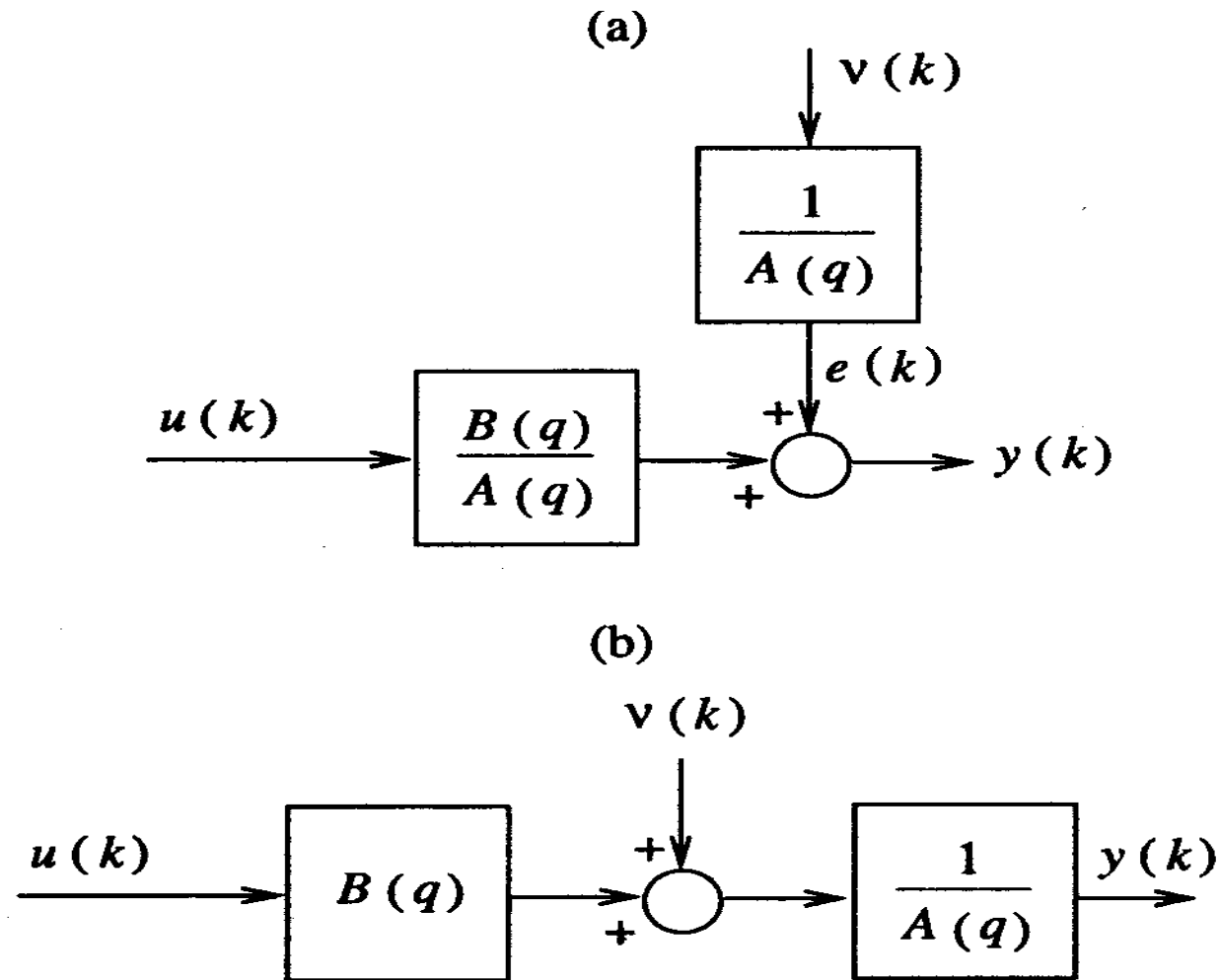
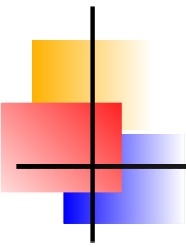


Figura 14: Representação Esquemática do modelo ARX



Modelo AR para um sistema fisiológico

Se uma pessoa normal esticar o braço, a sua mão não ficará perfeitamente estática. Pelo contrário, haverá um movimento oscilatório conhecido como *tremor*. Esse movimento pode ser representado por um modelo AR, excitado por ruído branco. Foi observado que o braço humano esticado comporta-se como um oscilador amortecido, excitado por atividade muscular não correlacionada. Além disso, o espectro do sinal de tremor não revela harmônicas de mais alta ordem, o que indica que o sistema é basicamente linear. Assim sendo, o tremor de mão pode ser modelado por

$$y(k) = a_1 y(k - 1) + a_2 y(k - 2) + \nu(k),$$



sendo

$$a_1 = 2 \cos \left(\frac{2\pi}{T} \right)$$
$$\exp \left(\frac{-1}{\tau} \right) a_2 = \exp \left(\frac{-2}{\tau} \right),$$

e $\nu(k)$ é ruído gaussiano com média zero e variância unitária.
 $T = 40$ é o período característico e $\tau = 91$ é o tempo de relaxação.

Modelo ARMAX

O modelo auto-regressivo com média móvel e entradas exógenas pode ser obtido a partir do modelo geral (-64), tomando-se $D(q) = F(q) = 1$ e $A(q)$, $B(q)$ e $C(q)$ polinômios arbitrários, resultando em

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + C(q)v(k),$$

ou, alternativamente,

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{A(q)}v(k)$$

$$y(k) = H(q)u(k) + e(k),$$

filter

2 zero
3 polos

1 zero (3 zeros)

tfest

R, m i

sendo $e(k)$ não branco. O modelo ARMAX pertence à classe de modelos de *erro na equação*. No presente caso o erro na equação é modelado como um processo de média móvel (MA), e o ruído adicionado à saída, $e(k)$, é modelado como ruído branco filtrado por um filtro ARMA.

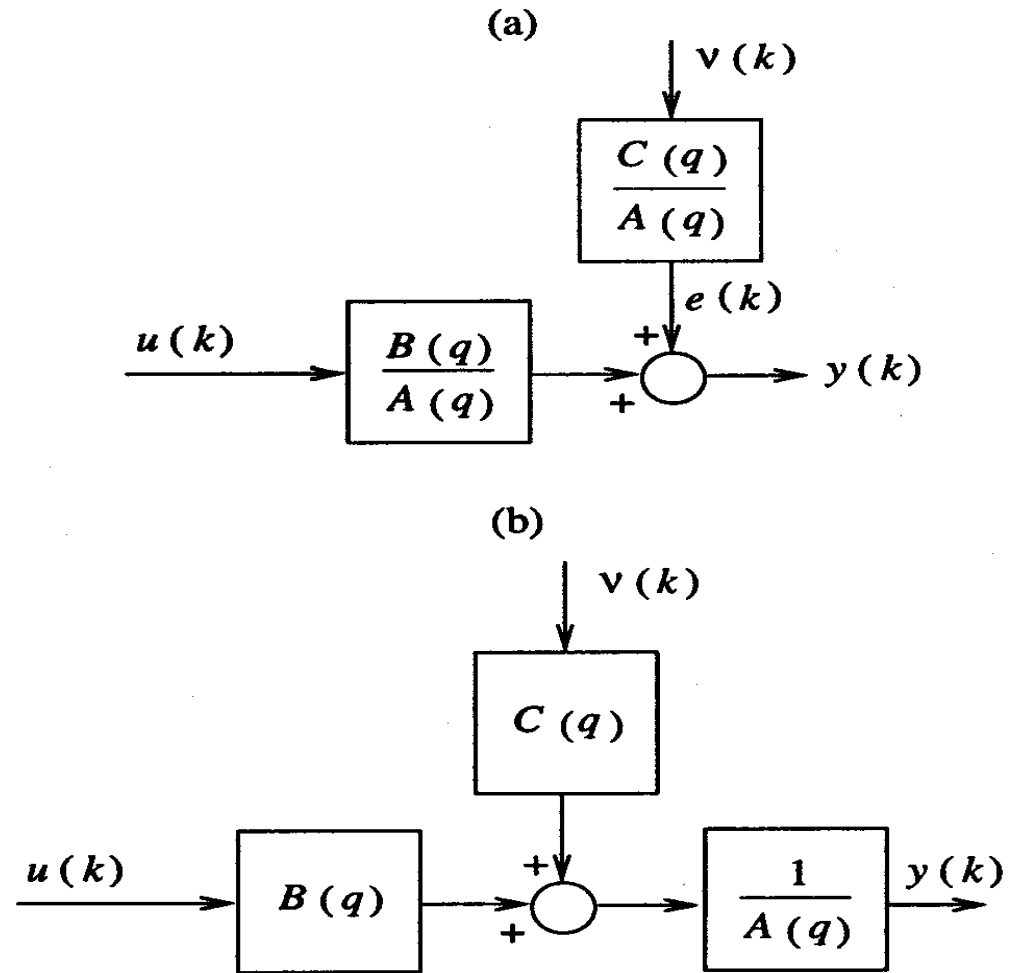
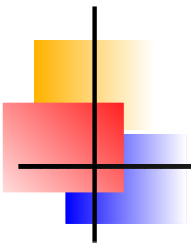


Figura 15: Representação Esquemática do modelo ARMAX



Modelo de erro na saída

Este modelo pode ser obtido a partir do modelo geral tomando-se $A(q) = C(q) = D(q) = 1$ e $B(q)$ e $F(q)$ polinômios arbitrários, resultando em

$$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + \nu(k),$$

sendo que o fato do ruído branco $\nu(k)$ ser diretamente adicionado à saída justifica o nome desta classe de modelos. É comum representar esse tipo de modelo usando uma variável auxiliar $w(k)$

$$\begin{aligned} F(q)w(k) &= B(q)u(k) \\ y(k) &= w(k) + \nu(k). \end{aligned}$$

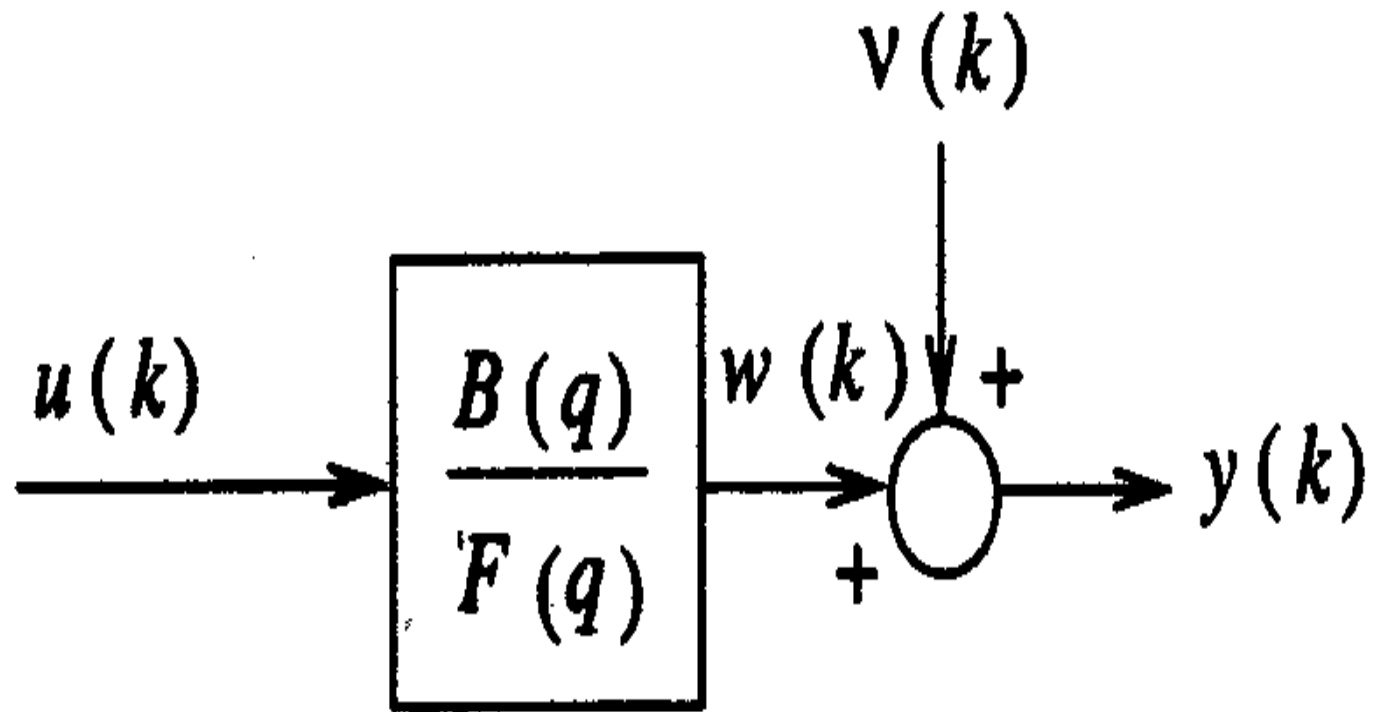


Figura 16: Representação Esquemática do modelo erro na saída



Modelo Box-Jenkins

Este modelo pode ser obtido a partir do modelo geral tomando-se $A(q) = 1$ e os demais polinômios arbitrários, resultando em

$$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}\nu(k).$$

delayert()
↑
k
atrasos

As funções de transferência do sistema $B(q)/F(q)$ e do ruído $C(q)/D(q)$ não têm parâmetros comuns, ou seja, são independentemente parametrizadas. O modelo Box-Jenkins também é do tipo erro na saída.

$$\underline{F}y = \underline{B}u + \frac{\cancel{C}}{D}\nu$$

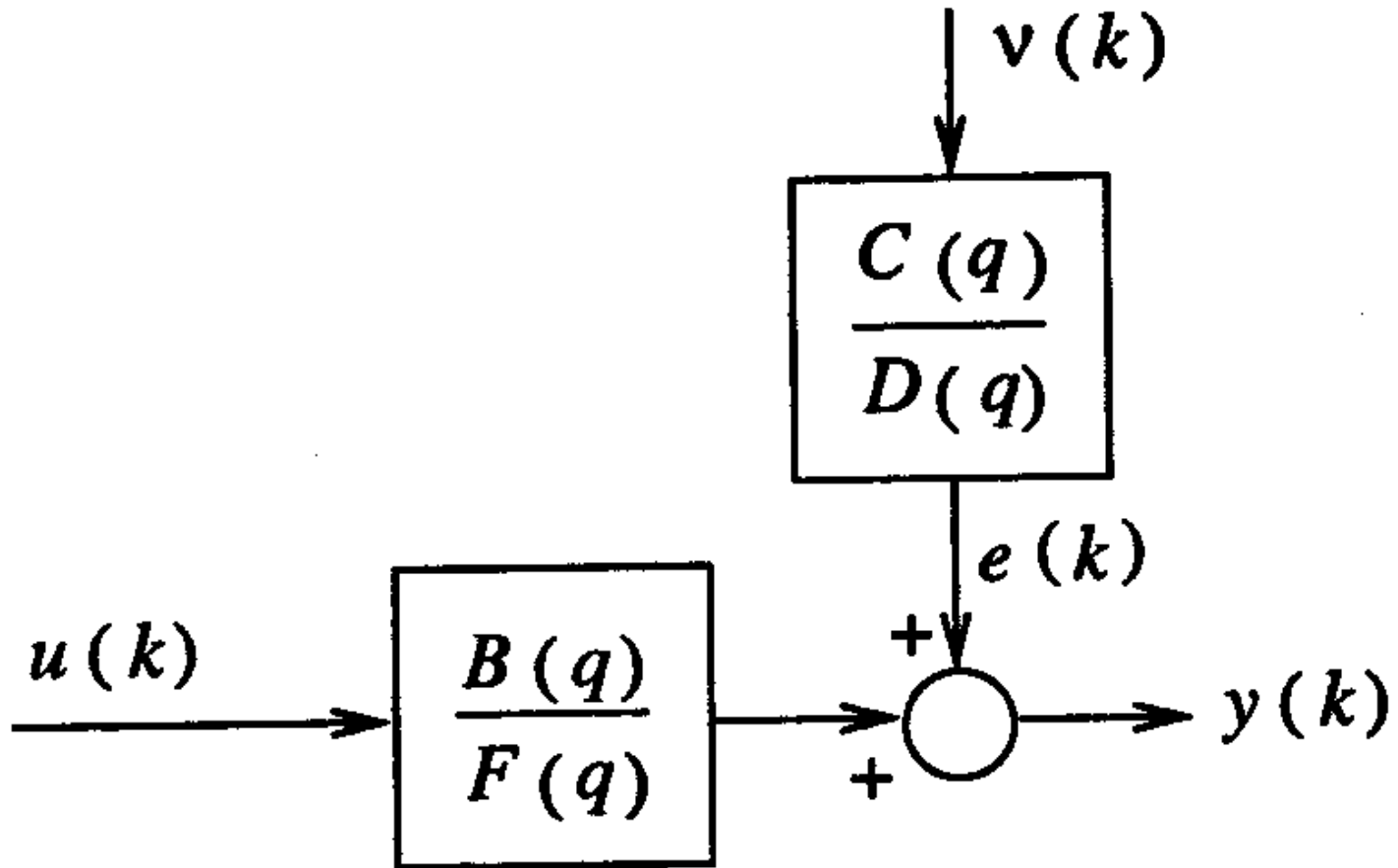
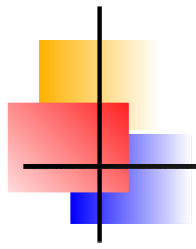


Figura 17: Representação Esquemática do modelo de Box-Jenkins

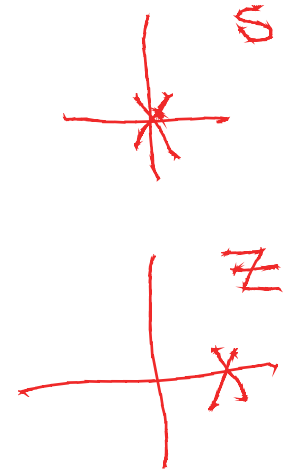
Modelo ARARX

Este modelo pode ser obtido a partir do modelo ARX com mais um polinômio na função de transferência do ruído, resultando em

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{1}{D(q)A(q)}v(k).$$

ARI

$$\frac{1}{s(s-1)}$$



Modelo ARARMAX

Este modelo pode ser obtido a partir do modelo ARMAX com mais um polinômio na função de transferência do ruído, resultando em

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)A(q)}v(k).$$

ARIMA
ARIMA
=

Ziegler 2º

