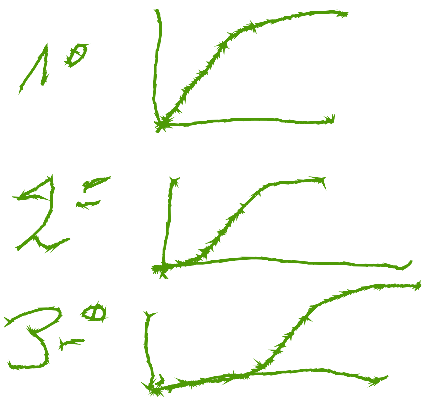
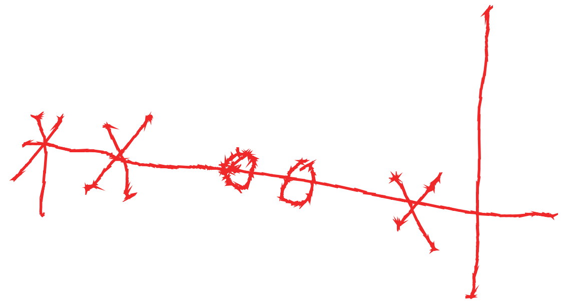
Capítulo 3 - Métodos Determinísticos

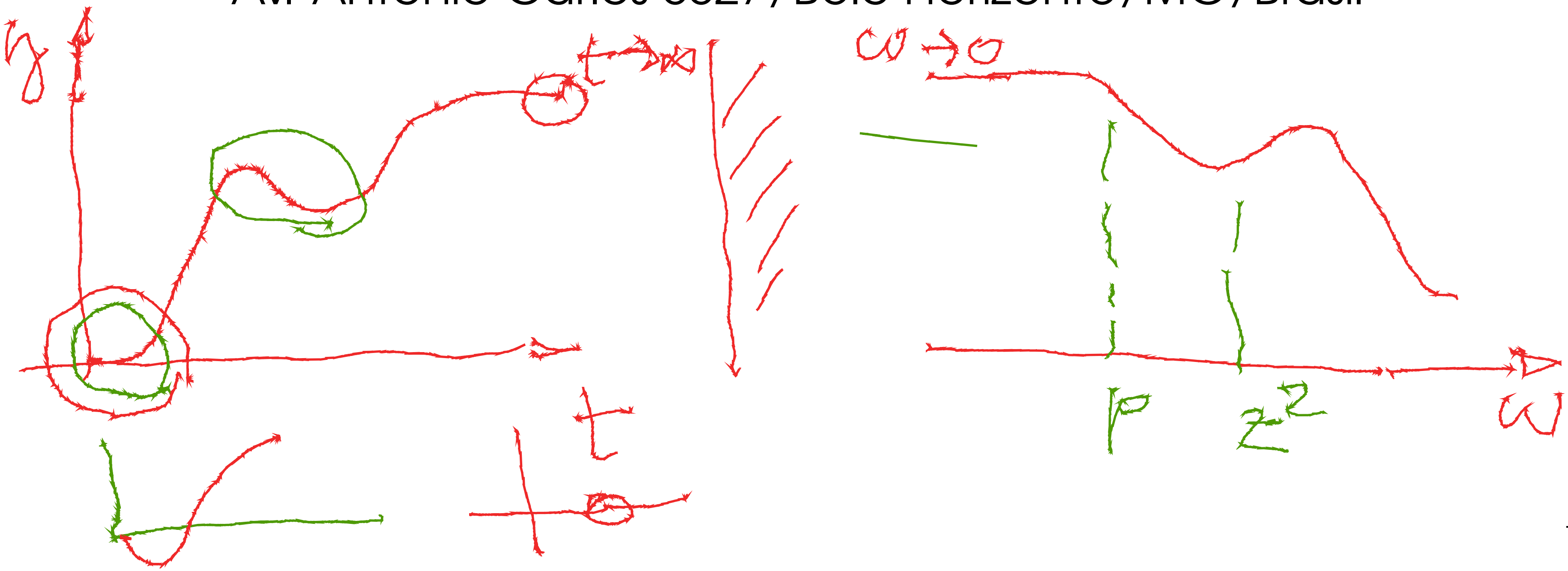


Eduardo Mendes

emmendes@cpdee.ufmg.br



Departamento de Engenharia Eletrônica
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte, MG, Brasil



Introdução

Tais métodos não dão nenhum tratamento especial ao ruído presente nos dados. São pouco imunes a ruído e só apresentam bons resultados quando a relação sinal/ruído é suficientemente alta.

Casos Simples - Sistemas de primeira ordem

Um possível modelo é da forma

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}.$$

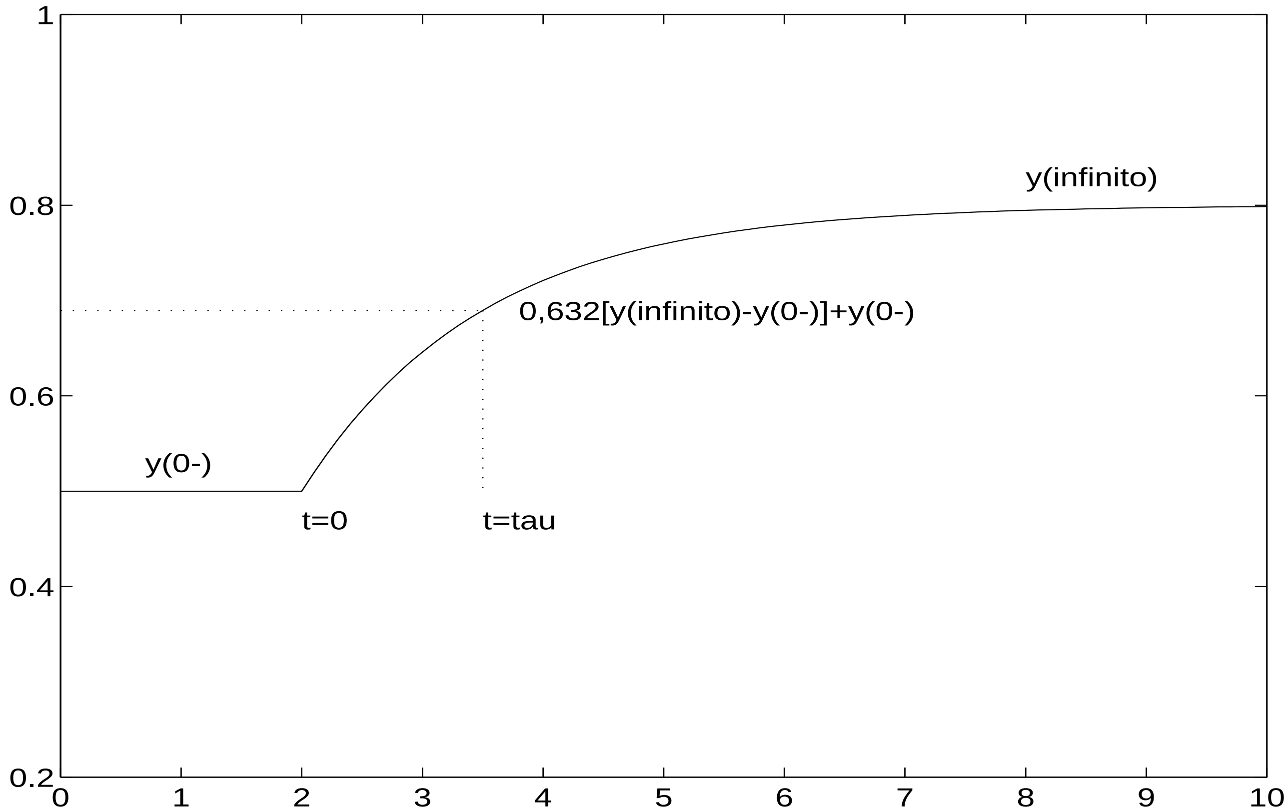


Figura 1: Resposta ao degrau de um sistema de primeira ordem com constante de tempo τ. O degrau foi aplicado no instante $t = 0$.

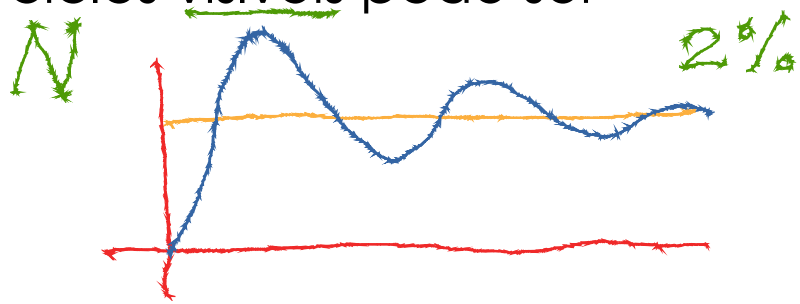
Sistemas de segunda ordem pouco amortecidos

Um possível modelo é

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_{\mathrm{n}}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_{\mathrm{n}} s + \omega_{\mathrm{n}}^2}.$$

Phillips e Parr (1991) mostraram que para sistemas pouco amortecidos ($\zeta^2 \ll 1$), o número de ciclos visíveis pode ser aproximado por

$$\frac{0,6}{\zeta}.$$



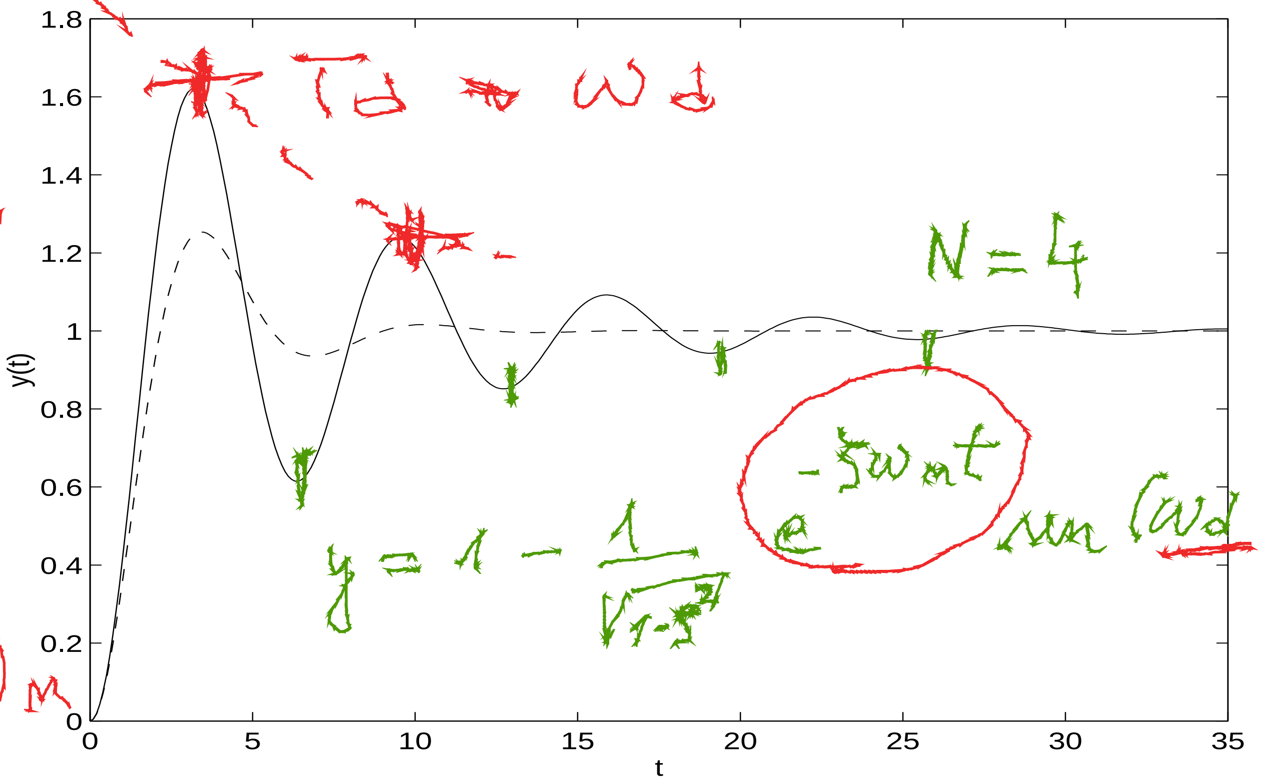
A exatidão do método depende de quão boa é a aproximação $\sqrt{1-\zeta^2} \approx 1$. ω pode ser estimada do gráfico. Como $\sqrt{1-\zeta^2} \approx 1$, então $\omega_{\mathrm{n}} \approx \omega$. O ganho K é obtido como para sistemas de primeira ordem.

Estimação de ζ e ω_n

A Figura mostra as respostas ao degrau unitário de dois sistemas com $K = 1$, $\omega_n = 1$ e com $\zeta = 0,15$ e $\zeta = 0,4$.

$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d}$

$\frac{y(\infty)}{u(\infty)}$



$T_d \rightarrow \omega_d$

$N = 4$

$y = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi)$

$\alpha = \zeta\omega_n$

$\zeta\omega_n$

$\frac{e}{e^{-\zeta\omega t}}$

Figura 2: Respostas ao degrau unitário de sistemas com $K = 1$, $\omega_n = 1$ e quociente de amortecimento (—) $\zeta = 0,15$; (- -) $\zeta = 0,4$.

Para a resposta menos amortecida tem-se

$$\zeta \approx \frac{0,6}{4,5} = 0,13.$$

Em torno de quatro ciclos ocorrem nos primeiros 25 segundos. O "período médio", é $T = 25/4 = 6,25$, e $\omega_{\mathrm{n}} = 2\pi/T \approx 1{,}0$. Para a resposta mais amortecida apenas um ciclo é visível, o que resulta em $\zeta \approx 0,6$ que é 50% maior que o valor usado.

O Método de Sundaresan

O método pressupõe que o sistema pode ser aproximado satisfatoriamente por (DESHPANDE, ASH, 1981)

$$H(s) = \frac{e^{-\tau_\mathrm{d} s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

ou

$$H(s) = \frac{e^{-\tau_\mathrm{d} s}\omega_\mathrm{n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_\mathrm{n} s + \omega_\mathrm{n}^2},$$

O objetivo do método é determinar os parâmetros τ_d, τ_1 e τ_2 ou τ_d, ω_n e ζ da respectiva função de transferência, a partir de uma resposta ao degrau. O ganho deve ser ajustado posteriormente.

O caso sobreamortecido

y(k)

diff(y)

∫1-y

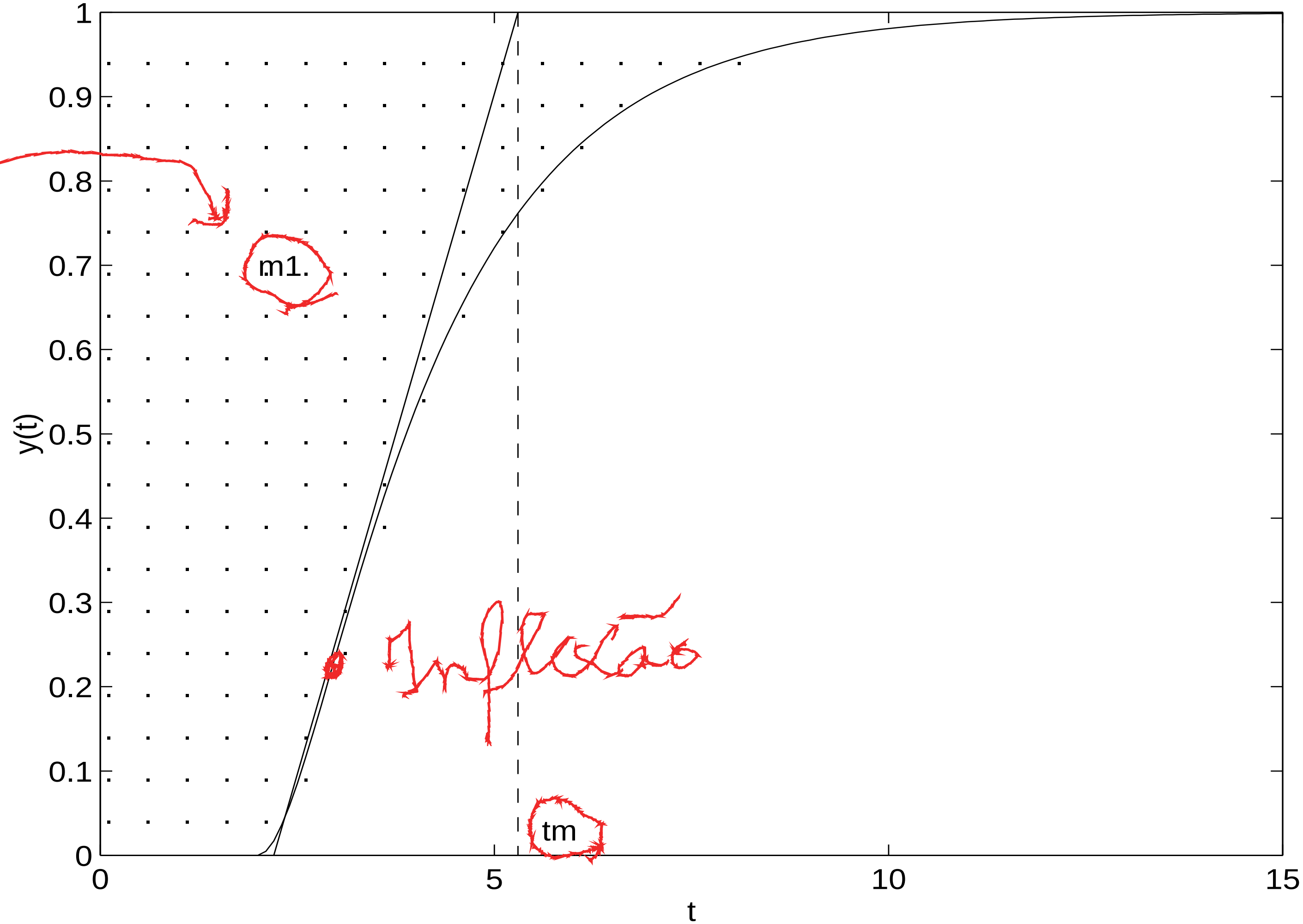


Figura 3: Resposta ao degrau típica de um sistema sobreamortecido com tempo morto.

- Para este método tem-se

$$m_1 = \int_0^{\infty} (1 - y(t))\, dt.$$

- Para este método tem-se

$$m_1 = \int_0^{\infty} (1 - y(t))\, dt.$$

- H(s) e m_1 estão relacionados por

$$m_1 = -\frac{dH(s)}{ds}\,\Big|_{s=0} = \tau_\mathrm{d} + \tau_1 + \tau_2.$$

- Para este método tem-se

$$m_1 = \int_0^\infty (1 - y(t))\, dt.$$

- H(s) e m_1 estão relacionados por

$$m_1 = -\frac{dH(s)}{ds}\,|_{s=0} = \tau_{\mathrm{d}} + \tau_1 + \tau_2.$$

- A resposta ao degrau é

$$y(t) = \left[1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t-\tau_{\mathrm{d}}}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t-\tau_{\mathrm{d}}}{\tau_2}}\right] u(t - \tau_{\mathrm{d}}),$$

- Igualando-se a segunda derivada desta equação a zero, obtém-se o ponto de inflexão

$$t_i = \tau_\mathrm{d} + \alpha \ln \eta,$$

sendo que $\eta = \tau_1/\tau_2$ e $\alpha = \tau_1 \tau_2/(\tau_1 - \tau_2)$.

- Igualando-se a segunda derivada desta equação a zero, obtém-se o ponto de inflexão

$$t_i = \tau_{\mathrm{d}} + \alpha \ln \eta,$$

sendo que $\eta = \tau_1/\tau_2$ e $\alpha = \tau_1\tau_2/(\tau_1 - \tau_2)$.

- A inclinação da reta tangente no ponto de inflexão é

$$M_i = \frac{\eta^{1/(1-\eta)}}{\alpha(\eta - 1)}.$$

- Igualando-se a segunda derivada desta equação a zero, obtém-se o ponto de inflexão

$$t_i = \tau_\mathrm{d} + \alpha \ln \eta,$$

sendo que $\eta = \tau_1/\tau_2$ e $\alpha = \tau_1\tau_2/(\tau_1 - \tau_2)$.

- A inclinação da reta tangente no ponto de inflexão é

$$M_i = \frac{\eta^{1/(1-\eta)}}{\alpha(\eta - 1)}.$$

- t_m é dado por

$$t_\mathrm{m} = \tau_\mathrm{d} + \alpha \left[\ln \eta + \frac{\eta^2 - 1}{\eta} \right].$$

- Combinando-se as equações acima obtém-se

$$M_i(t_{\rm m} - m_1) = \frac{\eta^{1/(1-\eta)}}{\eta - 1} \ln \eta,$$

- Combinando-se as equações acima obtém-se

$$M_i(t_{\mathrm{m}} - m_1) = \frac{\eta^{1/(1-\eta)}}{\eta - 1} \ln \eta,$$

- que pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\lambda = \chi e^{-\chi},$$

- Combinando-se as equações acima obtém-se

$$M_i(t_{\mathrm{m}} - m_1) = \frac{\eta^{1/(1-\eta)}}{\eta - 1} \ln \eta,$$

- que pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\lambda = \chi e^{-\chi},$$

- sendo que $\lambda = (t_{\mathrm{m}} - m_1) M_i$ e

$$\chi = \frac{\ln \eta}{\eta - 1}.$$

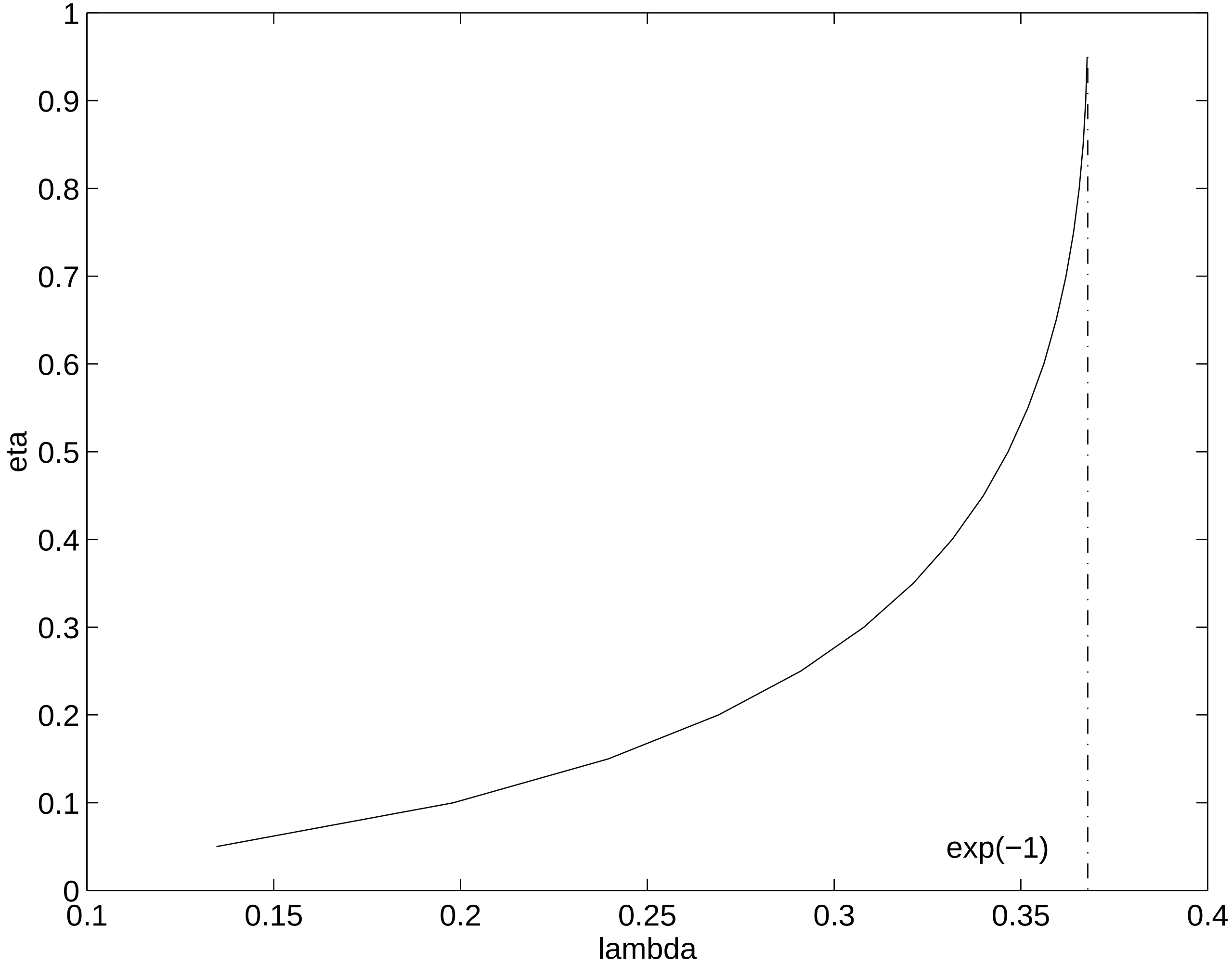


Figura 4: Relação entre η e λ.

O procedimento pode ser resumido da seguinte forma:

1. determinar o ganho em regime permanente;

O procedimento pode ser resumido da seguinte forma:

1. determinar o ganho em regime permanente;
2. determinar a área m_1;

O procedimento pode ser resumido da seguinte forma:

1. determinar o ganho em regime permanente;
2. determinar a área m_1;
3. determinar a inclinação da tangente no ponto de inflexão de $y(t)$. Este valor é M_i;

O procedimento pode ser resumido da seguinte forma:

1. determinar o ganho em regime permanente;
2. determinar a área m_1;
3. determinar a inclinação da tangente no ponto de inflexão de $y(t)$. Este valor é M_i;
4. determinar t_{m};

O procedimento pode ser resumido da seguinte forma:

1. determinar o ganho em regime permanente;
2. determinar a área m_1;
3. determinar a inclinação da tangente no ponto de inflexão de $y(t)$. Este valor é M_i;
4. determinar t_{m};
5. determinar λ a partir de $\lambda = (t_{\mathrm{m}} - m_1)M_i$;

O procedimento pode ser resumido da seguinte forma:

1. determinar o ganho em regime permanente;
2. determinar a área m_1;
3. determinar a inclinação da tangente no ponto de inflexão de $y(t)$. Este valor é M_i;
4. determinar t_{m};
5. determinar λ a partir de $\lambda = (t_{\mathrm{m}} - m_1)M_i$;
6. determinar η a partir do gráfico da Figura anterior;

O procedimento pode ser resumido da seguinte forma:

1. determinar o ganho em regime permanente;
2. determinar a área m_1;
3. determinar a inclinação da tangente no ponto de inflexão de $y(t)$. Este valor é M_i;
4. determinar t_{m};
5. determinar λ a partir de $\lambda = (t_{\mathrm{m}} - m_1)M_i$;
6. determinar η a partir do gráfico da Figura anterior;
7. determinar τ_1, τ_2 e τ_{d} usando

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \frac{\eta^{\frac{\eta}{1-\eta}}}{M_i};\\
\tau_2 &= \frac{\eta^{\frac{1}{1-\eta}}}{M_i};\\
\tau_{\mathrm{d}} &= m_1 - \tau_1 - \tau_2.
\end{aligned}
$$

O caso subamortecido

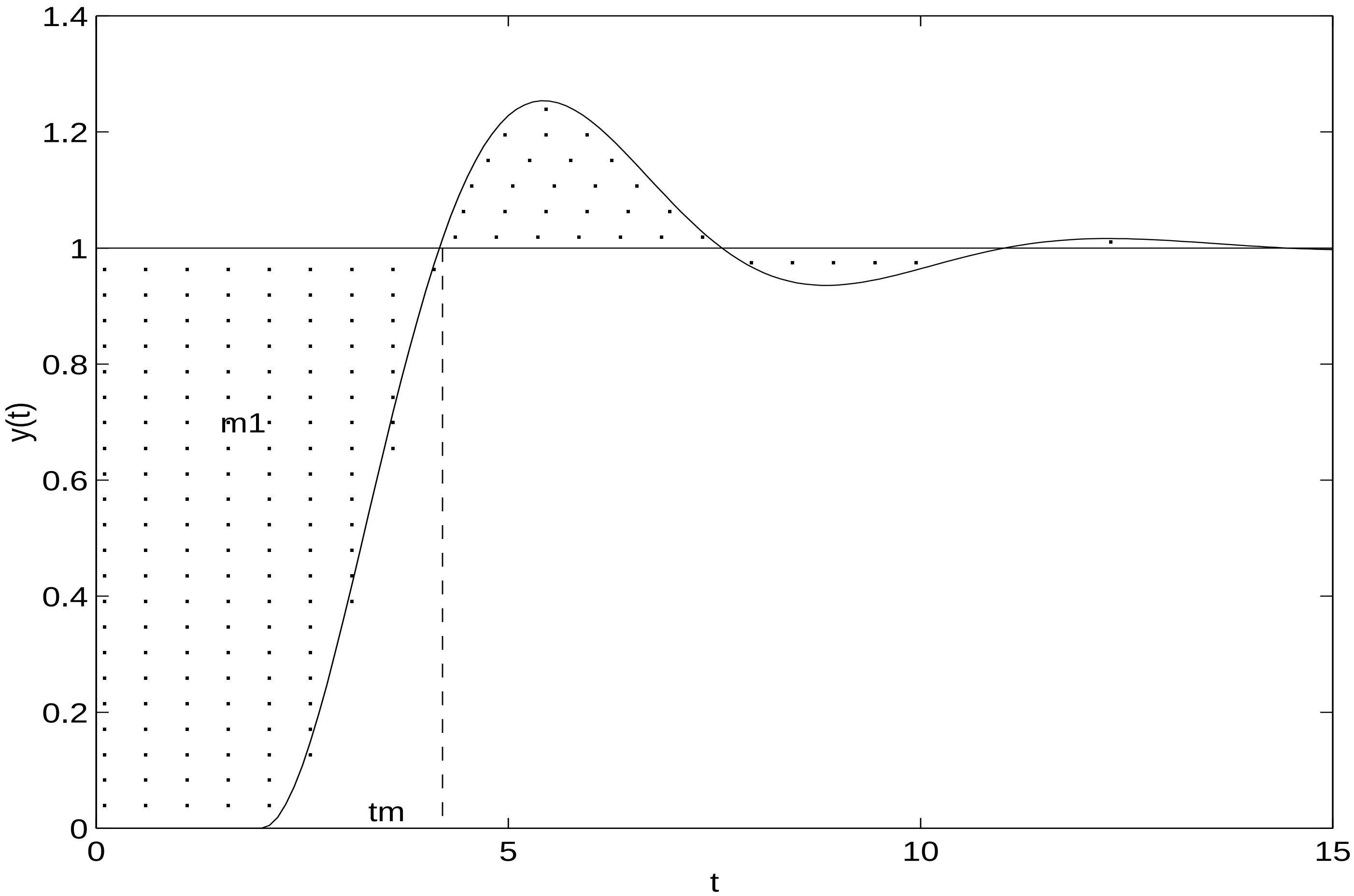


Figura 5: Resposta ao degrau típica de um sistema subamortecido com tempo morto.

- A resposta ao degrau é

$$y(t) = u(t-\tau_{\mathrm{d}})\left\{1 - \zeta\omega_{\mathrm{n}} e^{t-\tau_{\mathrm{d}}}\left[\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,\mathrm{sen}\left(\omega_{\mathrm{n}}(t-\tau_{\mathrm{d}})\sqrt{1-\zeta^2}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \cos\left(\omega_{\mathrm{n}}(t-\tau_{\mathrm{d}})\sqrt{1-\zeta^2}\right)\right]\right\}.$$

- A resposta ao degrau é

$$y(t) = u(t-\tau_{\mathrm{d}})\left\{1-\zeta\omega_{\mathrm{n}}e^{t-\tau_{\mathrm{d}}}\left[\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\mathrm{sen}\left(\omega_{\mathrm{n}}(t-\tau_{\mathrm{d}})\sqrt{1-\zeta^2}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\cos\left(\omega_{\mathrm{n}}(t-\tau_{\mathrm{d}})\sqrt{1-\zeta^2}\right)\right]\right\}.$$

- Seguindo um procedimento semelhante ao anterior, as seguintes equações podem ser obtidas:

$$\lambda = (t_{\mathrm{m}} - m_1)M_i = \frac{\cos^{-1}\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\,e^{\frac{-\zeta\cos^{-1}\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}},$$

$$\omega_{\mathrm{n}} = \frac{\cos^{-1}\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{1}{t_{\mathrm{m}} - m_1},$$

$$\tau_{\mathrm{d}} = m_1 - \frac{2\zeta}{\omega_{\mathrm{n}}}.$$

- ζ pode ser obtido a partir de λ graficamente usando-se:

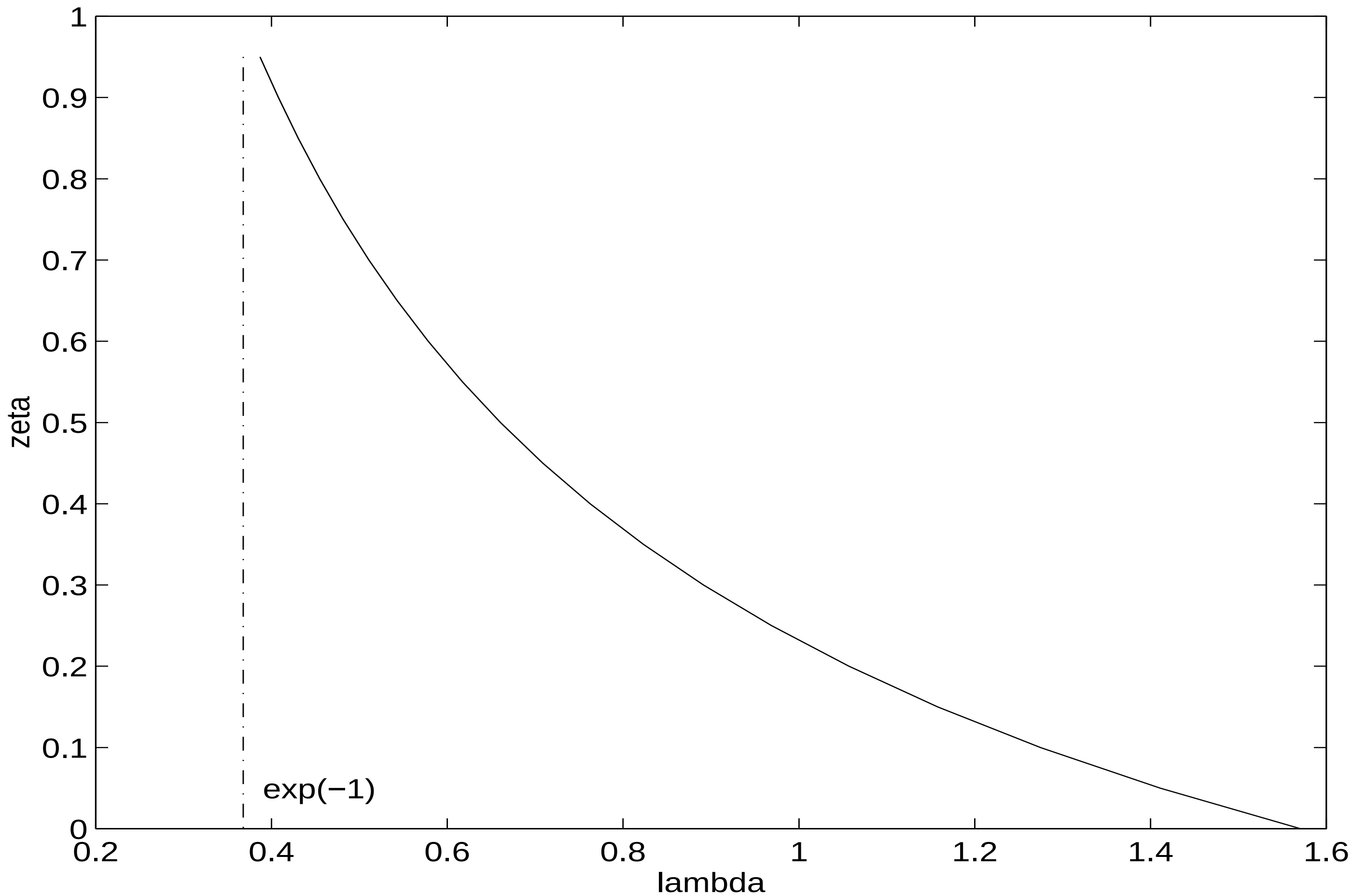


Figura 6: Relação entre ζ e λ.

O procedimento completo para o caso subamortecido é:

1. determinar o ganho em regime permanente;

O procedimento completo para o caso subamortecido é:

1. determinar o ganho em regime permanente;
2. determinar a área sombreada na resposta ao degrau, a área acima do valor de $y(\infty)$ deve ser subtraída. Este valor é m_1;

O procedimento completo para o caso subamortecido é:

1. determinar o ganho em regime permanente;
2. determinar a área sombreada na resposta ao degrau, a área acima do valor de $y(\infty)$ deve ser subtraída. Este valor é m_1;
3. determinar a inclinação da tangente no ponto de inflexão de $y(t)$. Este valor é M_i;

O procedimento completo para o caso subamortecido é:

1. determinar o ganho em regime permanente;
2. determinar a área sombreada na resposta ao degrau, a área acima do valor de $y(\infty)$ deve ser subtraída. Este valor é m_1;
3. determinar a inclinação da tangente no ponto de inflexão de $y(t)$. Este valor é M_i;
4. determinar t_{m} que é a interseção da tangente com o valor em regime permanente de $y(t)$;

O procedimento completo para o caso subamortecido é:

1. determinar o ganho em regime permanente;
2. determinar a área sombreada na resposta ao degrau, a área acima do valor de $y(\infty)$ deve ser subtraída. Este valor é m_1;
3. determinar a inclinação da tangente no ponto de inflexão de $y(t)$. Este valor é M_i;
4. determinar t_{m} que é a interseção da tangente com o valor em regime permanente de $y(t)$;
5. determinar λ;

O procedimento completo para o caso subamortecido é:

1. determinar o ganho em regime permanente;
2. determinar a área sombreada na resposta ao degrau, a área acima do valor de $y(\infty)$ deve ser subtraída. Este valor é m_1;
3. determinar a inclinação da tangente no ponto de inflexão de $y(t)$. Este valor é M_i;
4. determinar t_{m} que é a interseção da tangente com o valor em regime permanente de $y(t)$;
5. determinar λ;
6. determinar ζ graficamente;

O procedimento completo para o caso subamortecido é:

1. determinar o ganho em regime permanente;
2. determinar a área sombreada na resposta ao degrau, a área acima do valor de $y(\infty)$ deve ser subtraída. Este valor é m_1;
3. determinar a inclinação da tangente no ponto de inflexão de $y(t)$. Este valor é M_i;
4. determinar t_{m} que é a interseção da tangente com o valor em regime permanente de $y(t)$;
5. determinar λ;
6. determinar ζ graficamente;
7. determinar ω_{n} e τ_{d}.

O Método de Sundaresan

A Figura 7 mostra a malha de controle de combustíveis. Trata-se de um sistema de controle que injeta até quatro combustíveis na fornalha de uma caldeira industrial (PENA et al., 1986; AGUIRRE et al., 1996).

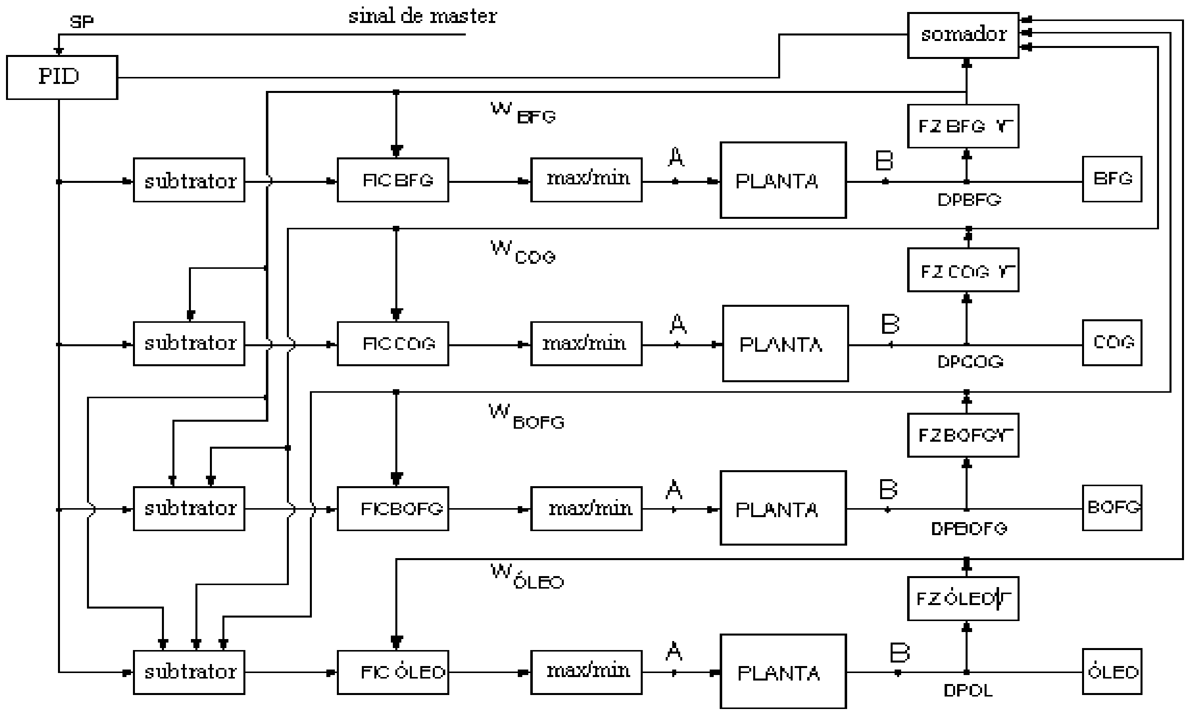


Figura 7: Malha de controle de combustíveis de uma planta industrial real. Os blocos "FIC" são os controladores de vazão de cada combustível. Os blocos "subtrator", "somador", "max/min" e "√" representam circuitos com funções aritméticas.

- Devido à falta de medições específicas e de dados de fabricação, não seria possível derivar modelos pela física do processo para os subsistemas denominados “planta”. Portanto, prosseguiu-se à identificação usando-se testes.

- Devido à falta de medições específicas e de dados de fabricação, não seria possível derivar modelos pela física do processo para os subsistemas denominados “planta”. Portanto, prosseguiu-se à identificação usando-se testes.
- Há três aspectos importantes a serem considerados na execução dos testes: i) a amplitude do sinal de excitação, ii) o ponto de operação e iii) o sentido do sinal de excitação.

- Devido à falta de medições específicas e de dados de fabricação, não seria possível derivar modelos pela física do processo para os subsistemas denominados “planta”. Portanto, prosseguiu-se à identificação usando-se testes.
- Há três aspectos importantes a serem considerados na execução dos testes: i) a amplitude do sinal de excitação, ii) o ponto de operação e iii) o sentido do sinal de excitação.
- Os resultados são

$$
\begin{aligned}
H_1(s) &= \frac{1,338e^{-1,9s}}{(3,406s+1)(1,053s+1)}; \\
H_2(s) &= \frac{0,0182e^{-4,7s}}{s^2+2(0,4)(0,228)s+0,052}; \\
H_3(s) &= \frac{0,189e^{-2,0s}}{s^2+2(0,55)(0,346)s+0,120}.
\end{aligned}
$$

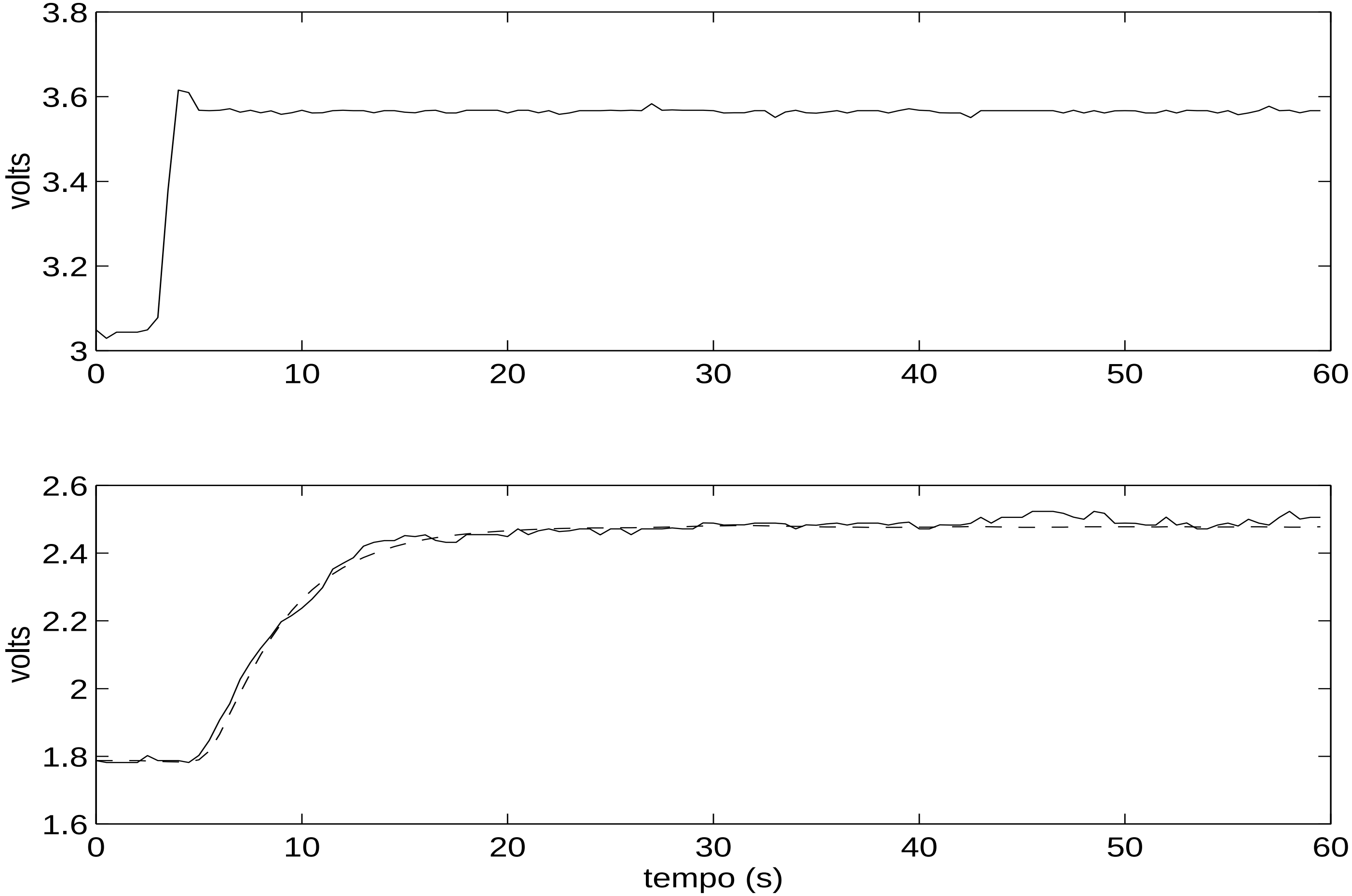


Figura 8: Entrada (superior) e respostas (inferior) para a malha de BFG. (—) medição feita em indústria e (- -) simulado usando-se $H_1(s)$.

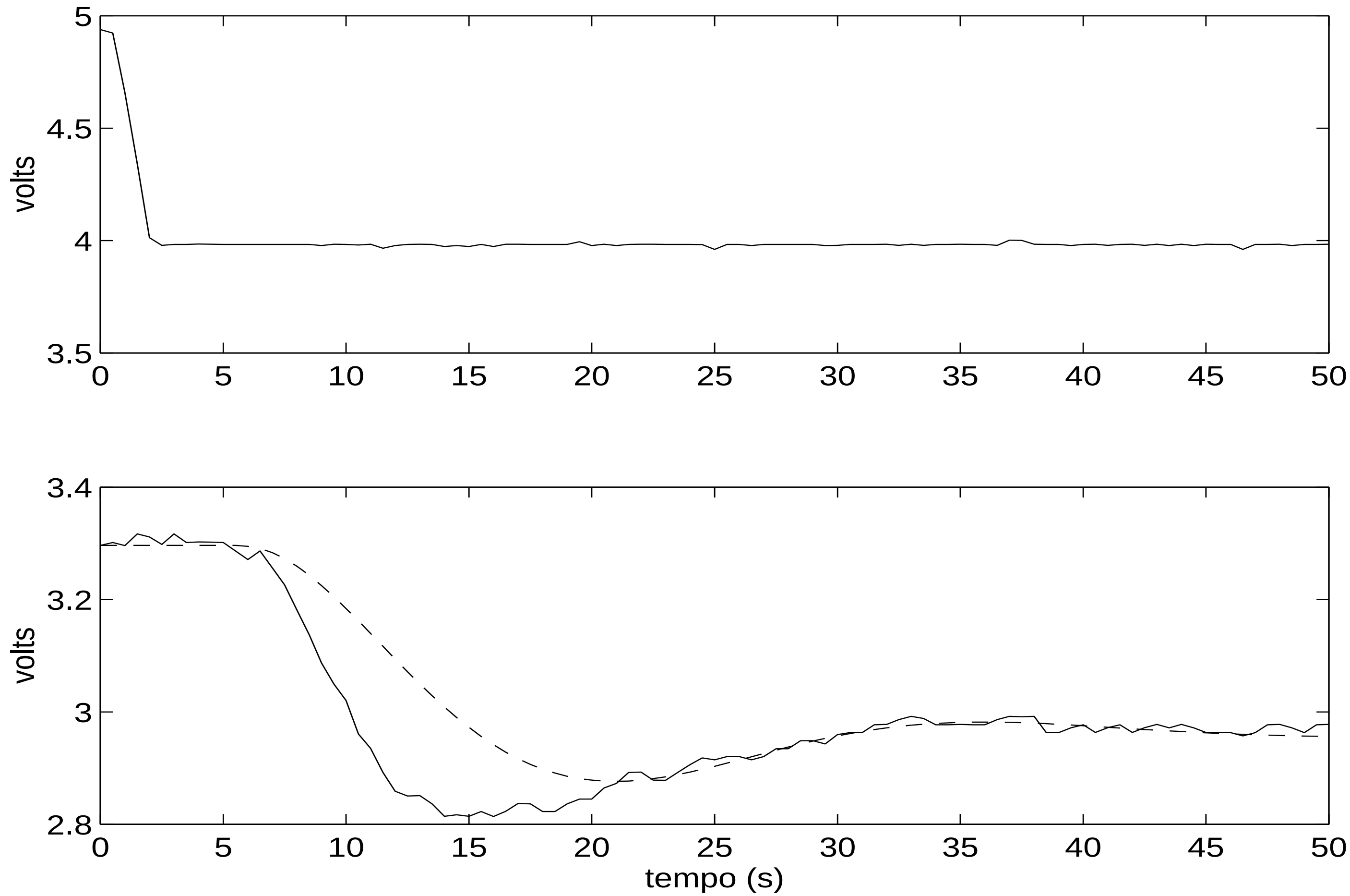


Figura 9: Entrada (superior) e respostas (inferior) para a malha de BFG. (—) medição feita em indústria e (- -) simulado usando-se $H_2(s)$.

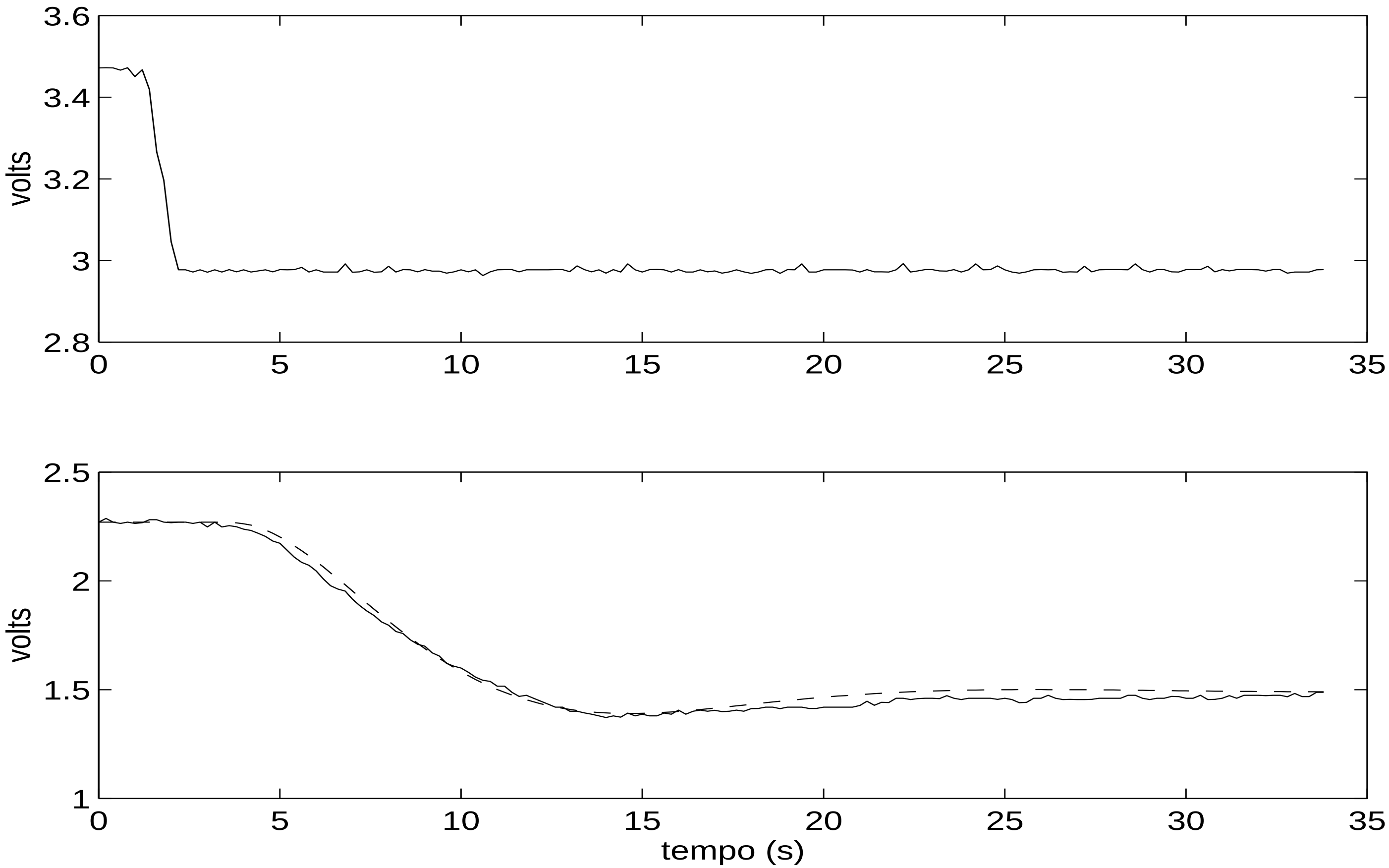


Figura 10: Entrada (superior) e respostas (inferior) para a malha de BFG. (—) medição feita em indústria e (- -) simulado usando-se $H_3(s)$.

O caso subamortecido - Uma alternativa a Sundaresan

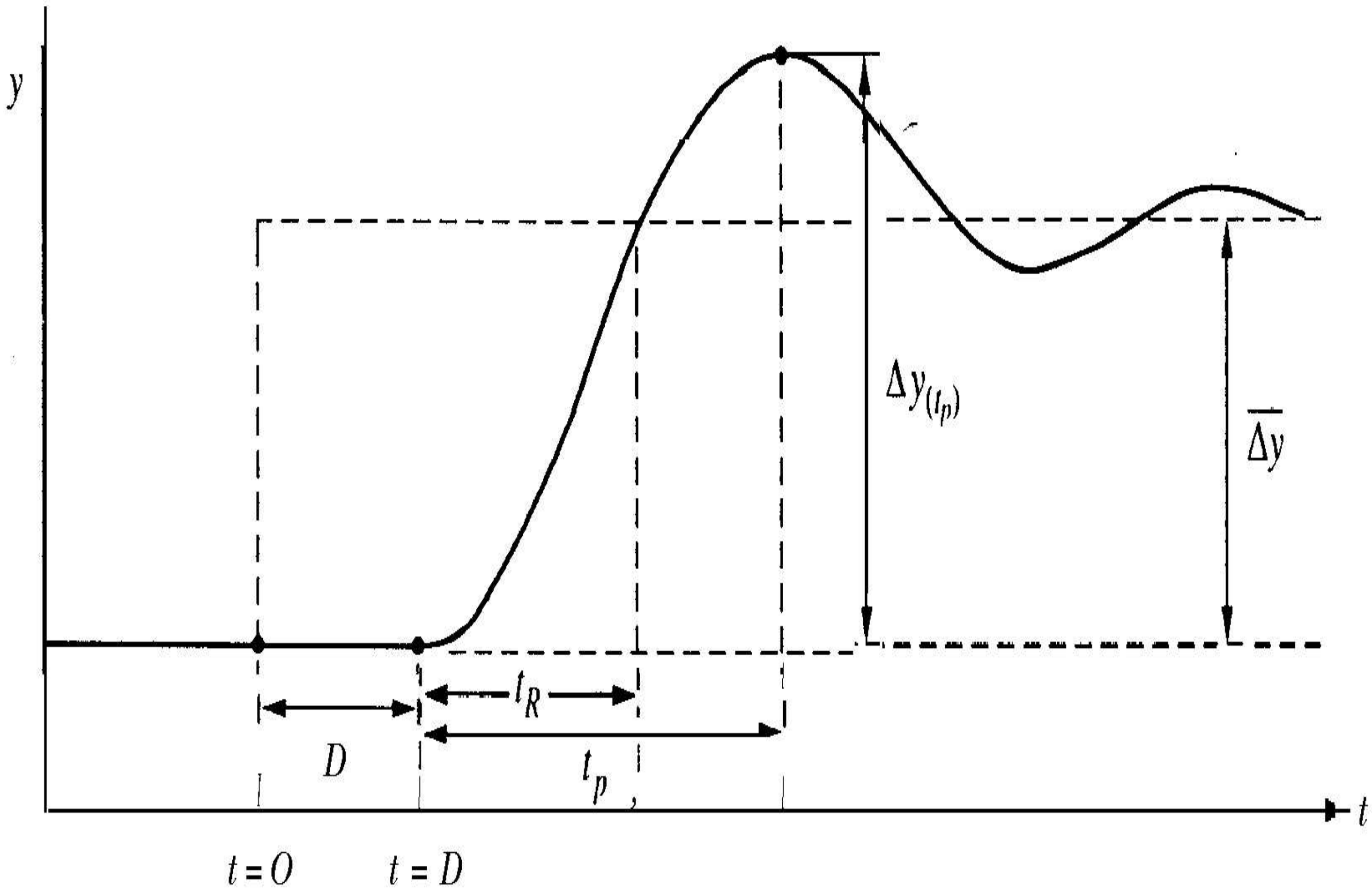


Figura 11: Resposta ao degrau típica de um sistema sobreamortecido com tempo morto.

$$H(s) = K_p \frac{e^{-\tau_{\mathrm{d}} s}}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1},$$

- O valor de pico, POR, é dado por:

$$POR = e^{-\pi \cot(\phi)} = \frac{\Delta y(t_p) - \Delta y}{\Delta y}$$

onde $\phi = \mathrm{acos}(\zeta)$, $\Delta y(t_p)$ é a mudança em $y(t)$ no sobre-sinal, t_p é o tempo ncessário para alcançar o sobre-sinal (descontando o atraso).

$$H(s) = K_p \frac{e^{-\tau_\mathrm{d} s}}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1},$$

- O valor de pico, POR, é dado por:

$$POR = e^{-\pi \cot(\phi)} = \frac{\Delta y(t_p) - \Delta y}{\Delta y}$$

onde $\phi = \mathrm{acos}(\zeta)$, $\Delta y(t_p)$ é a mudança em $y(t)$ no sobre-sinal, t_p é o tempo ncessário para alcançar o sobre-sinal (descontando o atraso).

- A constante de tempo τ pode ser calculada a partir de:

$$\frac{t_R}{\tau} = \frac{\pi - \phi}{\sin(\phi)}$$

A partir das equações acima, as seguintes expressões podem ser derivadas:

$$
\begin{aligned}
\phi &= \operatorname{acot}\left(-\frac{ln(POR)}{\pi}\right) \\
\tau &= \frac{t_R \sin(\phi)}{\pi - \phi} \\
\zeta &= \cos(\phi)
\end{aligned}
$$

Determinar τ_{d} graficamente e K_p com a seguinte relação:

$$K_p = \frac{\Delta_y}{\Delta_u}$$

onde Δ_u é a variação da entrada.

Método das Integrais

- O Método das Integrais é aplicável a sistemas de primeira ordem com atraso puro de tempo, representado, respectivamen te pela seguinte equação:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad = \quad \frac{Ke^{-s\theta}}{\tau s + 1}$$

Método das Integrais

- O Método das Integrais é aplicável a sistemas de primeira ordem com atraso puro de tempo, representado, respectivamen te pela seguinte equação:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-s\theta}}{\tau s + 1}$$

- O Método das Integrais pré-supõe uma entrada em degrau e a sua respectiva saída. Considerando os dados de entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ normalizados, calcule:

Método das Integrais

- O Método das Integrais é aplicável a sistemas de primeira ordem com atraso puro de tempo, representado, respectivamen te pela seguinte equação:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-s\theta}}{\tau s + 1}$$

- O Método das Integrais pré-supõe uma entrada em degrau e a sua respectiva saída. Considerando os dados de entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ normalizados, calcule:
- $\underline{\theta + \tau} = \int_0^{\infty} (u(t) - y(t))\, dt$

Método das Integrais

- O Método das Integrais é aplicável a sistemas de primeira ordem com atraso puro de tempo, representado, respectivamen te pela seguinte equação:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-s\theta}}{\tau s + 1}$$

- O Método das Integrais pré-supõe uma entrada em degrau e a sua respectiva saída. Considerando os dados de entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ normalizados, calcule:
- $\underline{\theta + \tau} = \int_0^\infty (u(t) - y(t))\, dt$
- $\tau = e^1 \int_0^{\underline{\tau+\theta}} y(t) dt$

Método das Integrais

- O Método das Integrais é aplicável a sistemas de primeira ordem com atraso puro de tempo, representado, respectivamen te pela seguinte equação:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-s\theta}}{\tau s + 1}$$

- O Método das Integrais pré-supõe uma entrada em degrau e a sua respectiva saída. Considerando os dados de entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ normalizados, calcule:
- $\underline{\theta + \tau} = \int_0^\infty (u(t) - y(t))\, dt$
- $\tau = e^1 \int_0^{\underline{\tau+\theta}} y(t) dt$
- $\theta = \underline{\theta + \tau} - \tau$

Método da Resposta Complementar

- O método da resposta complementar é aplicável a sistemas de segunda ordem sobreamortecidos com atraso de puro de tempo ou de primeira ordem com atraso puro de tempo, representados, respectivamente pelas seguintes equações:

$$
\begin{aligned}
H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{Ke^{-s\theta}}{(\tau_1 + 1)(\tau_2 + 1)} \\
&= \frac{Ke^{-s\theta}}{\tau s + 1}
\end{aligned}
$$

Método da Resposta Complementar

- O método da resposta complementar é aplicável a sistemas de segunda ordem sobreamortecidos com atraso de puro de tempo ou de primeira ordem com atraso puro de tempo, representados, respectivamente pelas seguintes equações:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-s\theta}}{(\tau_1 + 1)(\tau_2 + 1)}$$

$$= \frac{Ke^{-s\theta}}{\tau s + 1}$$

- O método da Resposta Complementar pré-supõe uma entrada em degrau e a sua respectiva saída. Considerando os dados de entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ normalizados, a curva $ln\left(1 - \frac{y(t)}{u(t)}\right)$ lineariza a resposta do degrau tal que a constante de tempo dominante do sistema τ_1 possa ser calculada a partir do inverso da inclinação da assíntota àquela curva.

- Temos, assim

$$
\begin{aligned}
ln\left(1-\frac{y(t)}{u(t)}\right) &= -\frac{1}{\tau_1}t + ln\left(\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}\right) \\
&= at+b \qquad \text{equação da reta}
\end{aligned}
$$

onde a é inclinação da assíntota e b é o deslocamento na ordenada.

- Temos, assim

$$
\begin{aligned}
ln\left(1 - \frac{y(t)}{u(t)}\right) &= -\frac{1}{\tau_1}t + ln\left(\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}\right) \\
&= at + b \qquad \text{equação da reta}
\end{aligned}
$$

onde a é inclinação da assíntota e b é o deslocamento na ordenada.

- A constante de tempo dominate é calculada usando:

$$\tau_1 = -\frac{1}{a}$$

- Se a curva $ln\left(1-\frac{y(t)}{u(t)}\right)$ for uma reta, o sistema pode ser modelado como um sistema de primeira ordem ($\tau = \tau_1$). Caso contrário, é necessário calcular a segunda constante de tempo τ_2 através da curva

$$\begin{aligned} ln\left[\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}e^{t/\tau_1}\left(1-\frac{y(t)}{u(t)}\right)\right] &= ln\left[e^b e^{t/\tau_1}\left(1-\frac{y(t)}{u(t)}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{\tau_2}t + ln\left(\frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\right) \\ &= ct + d \qquad \text{equação da reta} \end{aligned}$$

onde c é inclinação da nova assíntota e d é o deslocamento na ordenada.

- Se a curva $ln\left(1-\frac{y(t)}{u(t)}\right)$ for uma reta, o sistema pode ser modelado como um sistema de primeira ordem ($\tau = \tau_1$). Caso contrário, é necessário calcular a segunda constante de tempo τ_2 através da curva

$$\begin{aligned} ln\left[\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}e^{t/\tau_1}\left(1-\frac{y(t)}{u(t)}\right)\right] &= ln\left[e^b e^{t/\tau_1}\left(1-\frac{y(t)}{u(t)}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{\tau_2}t + ln\left(\frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\right) \\ &= ct + d \qquad \text{equação da reta} \end{aligned}$$

  onde c é inclinação da nova assíntota e d é o deslocamento na ordenada.

- A constante de tempo τ_2 é calculada usando:

$$\tau_2 = -\frac{1}{c}$$

Identificação em Malha Fechada

O método descrito aqui foi originalmente proposto por Yuwana e Seborg (1982).

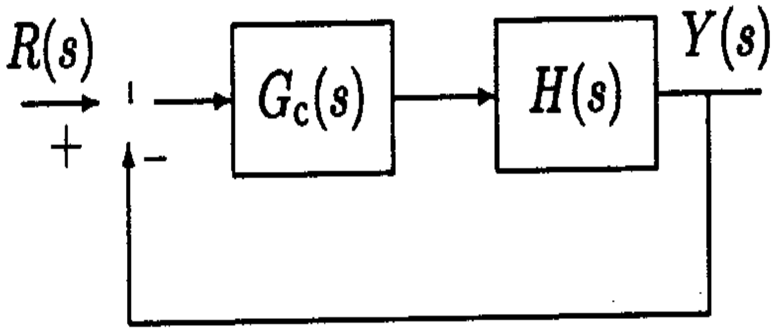


Figura 12: Sistema de controle em malha fechada.

Assume-se que o controlador é puramente proporcional e que a função de transferência do processo tem a seguinte forma:

$$H(s) = \frac{K\, e^{-\tau_{\mathrm{d}} s}}{\tau\, s + 1}.$$

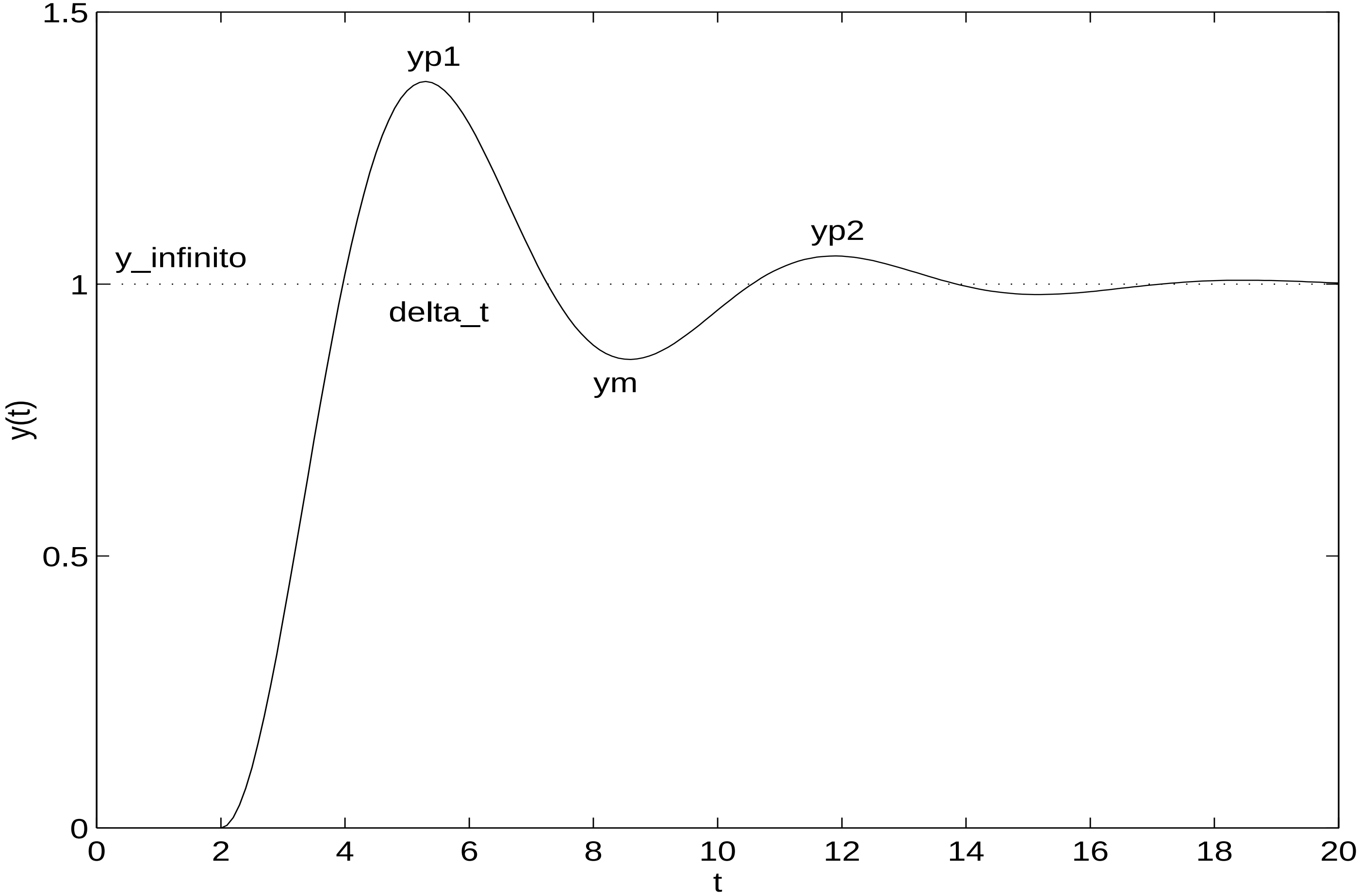


Figura 13: Resposta ao degrau típica necessária para o método proposto por Yawana e Seborg (1982). Nesta figura $y_\infty = y(\infty) = 1$.

- e a função de transferência em malha fechada é

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_{\mathrm{f}}\, e^{-\tau_{\mathrm{d}} s}}{\tau\, s + \left[K_{\mathrm{f}}\, e^{-\tau_{\mathrm{d}} s} + 1\right]},$$

- e a função de transferência em malha fechada é

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_\mathrm{f}\, e^{-\tau_\mathrm{d} s}}{\tau\, s + [K_\mathrm{f}\, e^{-\tau_\mathrm{d} s} + 1]},$$

- Utiliza-se a seguinte aproximação de Padé

$$e^{-\tau_\mathrm{d} s} = \frac{1 - 0{,}5\tau_\mathrm{d} s}{1 + 0{,}5\tau_\mathrm{d} s}.$$

- Fazendo substituições e algumas manipulações, tem-se

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\bar{K}(1 - 0{,}5\tau_{\mathrm{d}} s)}{\bar{\tau}^2 s^2 + 2\zeta\bar{\tau} s + 1},$$

- Fazendo substituições e algumas manipulações, tem-se

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\bar{K}(1 - 0{,}5\tau_{\mathrm{d}}s)}{\bar{\tau}^2 s^2 + 2\zeta\bar{\tau}s + 1},$$

- sendo

$$\bar{K} = \frac{K_{\mathrm{f}}}{K_{\mathrm{f}} + 1},$$

$$\bar{\tau} = \left[\frac{\tau_{\mathrm{d}}\tau}{2(K_{\mathrm{f}} + 1)}\right]^{0{,}5},$$

$$\zeta = \frac{\tau + 0{,}5\tau_{\mathrm{d}}(1 - K_{\mathrm{f}})}{\sqrt{2\tau_{\mathrm{d}}\tau(K_{\mathrm{f}} + 1)}}.$$

- Os parâmetros do processo podem ser obtidos das seguintes expressões:

$$K = \frac{y_\infty}{K_\mathrm{c}(A - y_\infty)},$$

$$\tau = \frac{\Delta t}{\pi}\left[\zeta\sqrt{K_\mathrm{f}+1} + \sqrt{\zeta^2(K_\mathrm{f}+1)+K_\mathrm{f}}\right]\sqrt{(1-\zeta^2)(K_\mathrm{f}+1)},$$

$$\tau_\mathrm{d} = \frac{\Delta t\sqrt{(1-\zeta^2)(K_\mathrm{f}+1)}}{\pi\left[\zeta\sqrt{K_\mathrm{f}+1} + \sqrt{\zeta^2(K_\mathrm{f}+1)+K_\mathrm{f}}\right]},$$

- Os parâmetros do processo podem ser obtidos das seguintes expressões:

$$K = \frac{y_\infty}{K_\mathrm{c}(A - y_\infty)},$$

$$\tau = \frac{\Delta t}{\pi}\left[\zeta\sqrt{K_\mathrm{f}+1} + \sqrt{\zeta^2(K_\mathrm{f}+1) + K_\mathrm{f}}\right]\sqrt{(1-\zeta^2)(K_\mathrm{f}+1)},$$

$$\tau_\mathrm{d} = \frac{\Delta t\sqrt{(1-\zeta^2)(K_\mathrm{f}+1)}}{\pi\left[\zeta\sqrt{K_\mathrm{f}+1} + \sqrt{\zeta^2(K_\mathrm{f}+1) + K_\mathrm{f}}\right]},$$

- sendo que ζ pode ser avaliada de duas formas diferentes:

$$\zeta = \frac{-\ln\left[\frac{y_\infty - y_\mathrm{m}}{y_{\mathrm{p}1} - y_\infty}\right]}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln\left[\frac{y_\infty - y_\mathrm{m}}{y_{\mathrm{p}1} - y_\infty}\right]\right)^2}}$$

- ou

$$\zeta = \frac{-\ln\left[\frac{y_{\mathrm{p}2}-y_\infty}{y_{\mathrm{p}1}-y_\infty}\right]}{\sqrt{4\pi^2+\left(\ln\left[\frac{y_{\mathrm{p}2}-y_\infty}{y_{\mathrm{p}1}-y_\infty}\right]\right)^2}}.$$

- ou

$$\zeta = \frac{-\ln\left[\frac{y_{\mathrm{p}2}-y_\infty}{y_{\mathrm{p}1}-y_\infty}\right]}{\sqrt{4\pi^2 + \left(\ln\left[\frac{y_{\mathrm{p}2}-y_\infty}{y_{\mathrm{p}1}-y_\infty}\right]\right)^2}}.$$

- É possível estimar o valor em regime permanente como se segue:

$$y_\infty \approx \frac{y_{\mathrm{p}2}y_{\mathrm{p}1} - y_{\mathrm{m}}^2}{y_{\mathrm{p}2} + y_{\mathrm{p}1} - 2y_{\mathrm{m}}}.$$

Identificação em malha fechada de um processo real

O objetivo é obter modelos em malha aberta a partir de dados reais coletados numa planta industrial real operando em malha fechada. Trata-se de uma malha de corrente de um separador magnético.

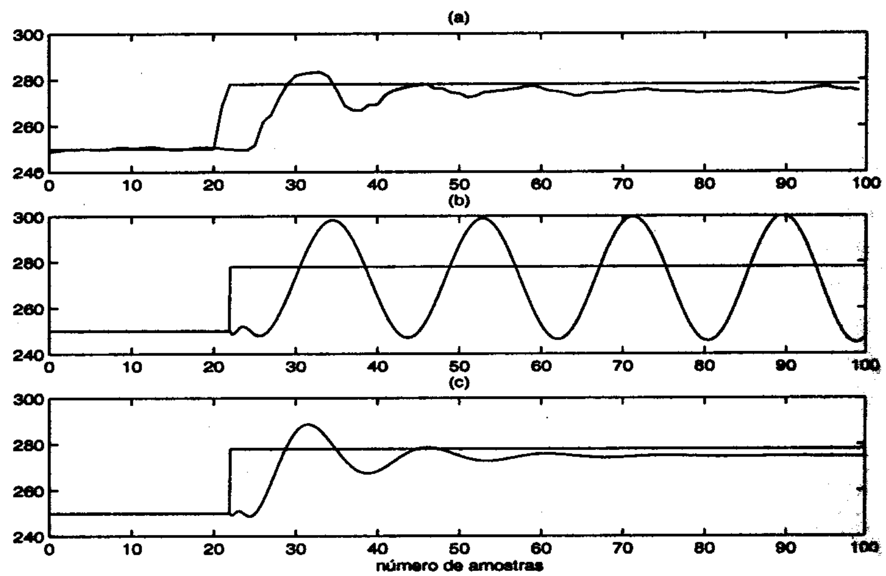


Figura 14: Respostas em malha fechada a uma mudança em degrau no sinal de referência (*set point*), (a) medido , (b) resposta do modelo sem ajustes e (c) resposta do modelo com ajustes.

A partir de um gráfico dos dados medidos obtiveram-se os seguintes valores aproximados: $y_{\mathrm{p1}} = 33$, $y_{\mathrm{p2}} = 28$, $y_{\mathrm{m}} = 16$, $\Delta t = 7$, $y_{\infty} = 22,8$ e a banda proporcional do controlador era 50, portanto $K_{\mathrm{c}} = 100/50 = 2$. Com esses valores aproximados, chegou-se ao seguinte modelo em malha aberta:

$$H_1(s) = \frac{2,1923\, e^{-5,2853s}}{12,3681\, s + 1},$$

A fim de ajustar o modelo fizeram-se as seguintes alterações. Primeiramente, para diminuir o erro em regime permanente, aumentou-se o ganho K em 70%. Em segundo lugar, a fim de reduzir as oscilações, aumentou-se o índice ζ valor obtido (0,128) por 2,4.

$$H_2(s) = \frac{3,7269\, e^{-3,4108s}}{23,2170\, s + 1},$$

Identificação Usando Convolução

- Seja o *somatório de convolução*

$$y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k-j).$$

Identificação Usando Convolução

- Seja o *somatório de convolução*

$$y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k-j).$$

- Tomando-se as medições $u(k)$ e $y(k)$ e usando o somatório de convolução, pode-se escrever

$$\begin{array}{rcl} y(0) & = & h(0)u(0) + h(1)u(-1) + h(2)u(-2)\ldots \\ y(1) & = & h(0)u(1) + h(1)u(0) + h(2)u(-1)\ldots \\ y(2) & = & h(0)u(2) + h(1)u(1) + h(2)u(0)\ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

- que pode ser expresso em forma matricial como se segue:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u(0) & u(-1) & u(-2) & \dots \\ u(1) & u(0) & u(-1) & \dots \\ u(2) & u(1) & u(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \end{bmatrix}, \\
\mathbf{y} &= U\,\mathbf{h}.
\end{aligned}
$$

- que pode ser expresso em forma matricial como se segue:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u(0) & u(-1) & u(-2) & \dots \\ u(1) & u(0) & u(-1) & \dots \\ u(2) & u(1) & u(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \end{bmatrix}, \\
\mathbf{y} &= U\,\mathbf{h}.
\end{aligned}
$$

- Se $u(k) = 0,\ \forall k \neq 0$, é possível simplificar a equação (-51), como se segue:

$h(k)$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y} &= u(0) I\,\mathbf{h}, \\
\mathbf{h} &= \mathbf{y}/u(0).
\end{aligned}
$$

$H(z)$

- Se o sinal de saída estiver contaminado com ruído de medição, ou seja, $y(k) = y^{\mathrm{i}}(k) + e(k)$, tem-se

$$\mathbf{h} \quad = \quad \frac{\mathbf{y}^{\mathrm{i}} + \mathbf{e}}{u(0)} = \boxed{\frac{\mathbf{y}^{\mathrm{i}}}{u(0)}} + \frac{\mathbf{e}}{u(0)}.$$

Estimação determinística da resposta ao impulso

- Seja a função de transferência

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z + 0,5}{z^2 - 1,5z + 0,7}.$$

Estimação determinística da resposta ao impulso

- Seja a função de transferência

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z + 0,5}{z^2 - 1,5z + 0,7}.$$

- $H(z)$ foi simulada para uma entrada pseudo-aleatória.

Estimação determinística da resposta ao impulso

- Seja a função de transferência

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z + 0,5}{z^2 - 1,5z + 0,7}.$$

- $H(z)$ foi simulada para uma entrada pseudo-aleatória.
- A partir dos sinais de entrada e de saída do modelo $H(z)$ montou-se a matriz $U \in \mathbb{R}^{40\times 40}$.

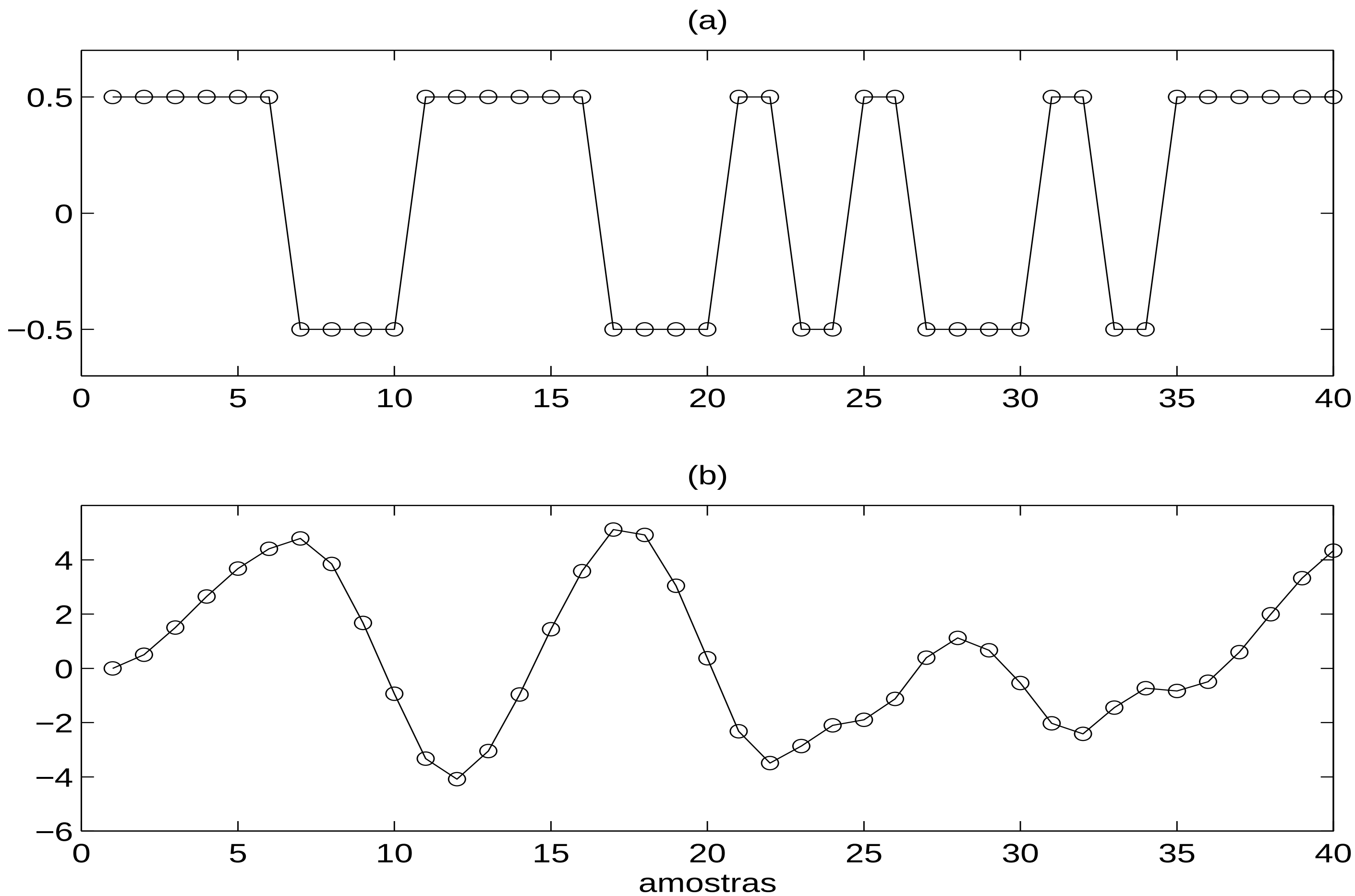


Figura 15: Sinais de (a) entrada e (b) saída de $H(z)$. O traço contínuo foi adicionado a fim de facilitar a visualização.

A Figura seguinte mostra o resultado obtido e a simulação de $H(z)$.

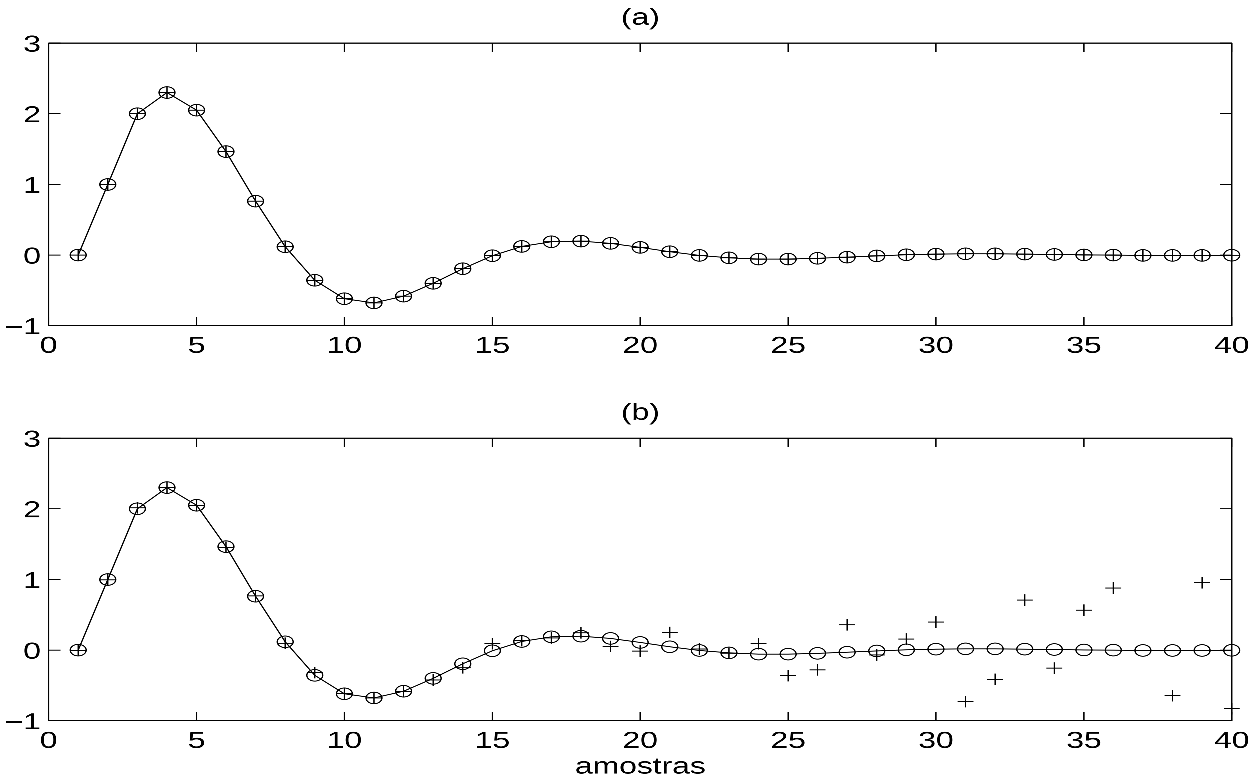


Figura 16: Resposta ao impulso de $H(z)$ (o) junto com as respostas ao impulso obtidas calculando-se $\mathbf{h} = U^{-1}\mathbf{y}$ (+), para o caso (a) sem ruído, e (b) com ruído de variância $\sigma_e^2 = 1 \times 10^{-5}$. O traço contínuo foi adicionado a fim de facilitar a visualização .

- Adicionando-se ruído de baixíssima variância ($\sigma_e^2 = 1 \times 10^{-5}$) ao sinal de saída e repetindo o procedimento nota-se que a resposta determinada torna-se instável. A razão da sensibilidade ao ruído adicionado é que **h** é obtida de forma *determinística* ao se calcular $\mathbf{h} = U^{-1}\mathbf{y}$.

Domínio da Freqüência

- A resposta em regime permanente de um sistema linear assintoticamente estável, excitado por um sinal senoidal de freqüência ω, também será senoidal com freqüência ω.

Domínio da Freqüência

- A resposta em regime permanente de um sistema linear assintoticamente estável, excitado por um sinal senoidal de freqüência ω, também será senoidal com freqüência ω.
- A amplitude e a fase da resposta do sistema linear podem ser alteradas com respeito à entrada.

Domínio da Freqüência

- A resposta em regime permanente de um sistema linear assintoticamente estável, excitado por um sinal senoidal de freqüência ω, também será senoidal com freqüência ω.
- A amplitude e a fase da resposta do sistema linear podem ser alteradas com respeito à entrada.
- A amplitude do sinal de entrada será multiplicada por $|\,H(j\omega)\,|$ e a sua fase será atrasada de ϕ radianos, onde $H(j\omega) = |\,H(j\omega)\,|\; e^{j\phi}$ é a resposta em freqüência do sistema linear e $h(t)$ é sua resposta ao impulso.

Um procedimento simples para a estimação de $H(j\omega)$ consiste de excitar o sistema com sinais senoidais de freqüências $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{N_\mathrm{f}-1}$. Para cada freqüência estima-se o ganho e a fase. Esse procedimento tem diversas dificuldades:

- nem sempre é possível aplicar sinais senoidais ao processo a ser identificado;

Um procedimento simples para a estimação de $H(j\omega)$ consiste de excitar o sistema com sinais senoidais de freqüências $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{N_\mathrm{f}-1}$. Para cada freqüência estima-se o ganho e a fase. Esse procedimento tem diversas dificuldades:

- nem sempre é possível aplicar sinais senoidais ao processo a ser identificado;
- longa duração do teste que seria requerido.

- Aplicando-se a Transformada de Fourier (TF) à integral de convolução tem-se

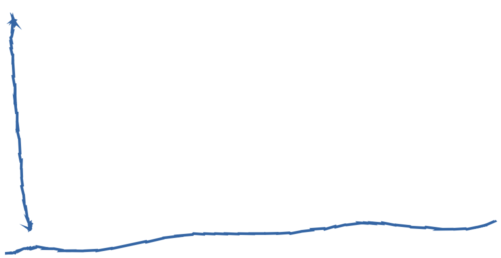
$$\hat{H}(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}.$$

- Aplicando-se a Transformada de Fourier (TF) à integral de convolução tem-se

$$\hat{H}(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}.$$

- Diferenciar sinais “abertos” é uma forma de se obter sinais “fechados” não altera a resposta em freqüência

$$\hat{H}(j\omega) = \frac{\mathcal{F}\{\dot{y}(t)\}}{\mathcal{F}\{\dot{u}(t)\}} = \frac{j\omega Y(j\omega)}{j\omega U(j\omega)}.$$



FFT x DFT

$n \log(n)$ $O(n^2)$

- No caso de sinais no domínio de tempo discreto tem-se

$$y^*(k) = y(k-1) - y(k) \quad \text{e} \quad u^*(k) = u(k-1) - u(k),$$

$y(k) - y(k-1) \qquad u(k) - u(k-1)$

- No caso de sinais no domínio de tempo discreto tem-se

$$y^*(k) = y(k-1) - y(k) \quad \text{e} \quad u^*(k) = u(k-1) - u(k),$$

- e nesse caso a estimativa da resposta em freqüência é

$$\hat{H}(j\omega) = \frac{Y^*(j\omega)}{U^*(j\omega)}.$$

- Se $y(t)$ é composto de uma parcela ideal (sem ruído) $y^{\rm i}(t)$ e de ruído $e(t)$ de medição, tem-se

$$\hat{H}(j\omega) = \frac{Y^{\rm i}(j\omega)}{U(j\omega)} + \frac{E(j\omega)}{U(j\omega)}.$$

ETFE

- Se $y(t)$ é composto de uma parcela ideal (sem ruído) $y^{\mathrm{i}}(t)$ e de ruído $e(t)$ de medição, tem-se

$$\hat{H}(j\omega) = \frac{Y^{\mathrm{i}}(j\omega)}{U(j\omega)} + \frac{E(j\omega)}{U(j\omega)}.$$

- A *Transformada Discreta de Fourier* definida para um sinal $y(k)$ com N amostras, como

$$Y(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} y(k) e^{-j\omega k}, \quad \omega = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 1, \ldots, N.$$

$\hat{H} \to H$ qdo $N \to \infty$

Estimação da resposta em freqüência (um caso simulado)

- Considere que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z + 0,5}{z^2 - 1,5z + 0,7}$$

foi excitada com um sinal pseudo-aleatório.

Grand t.

Conj. Ident + Conj. Validação

Estimação da resposta em freqüência (um caso simulado)

- Considere que

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z + 0,5}{z^2 - 1,5z + 0,7}$$

foi excitada com um sinal pseudo-aleatório.

- O número complexo $H(j\omega_i) = \alpha + j\beta$ foi obtido dividindo-se $Y(j\omega_i)$ por $U(j\omega_i)$ fazendo-se

$$\begin{aligned} \mid H(j\omega_i) \mid &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \text{fase}[H(j\omega_i)] &= \tan^{-1}\left[\frac{\beta}{\alpha}\right]. \end{aligned}$$

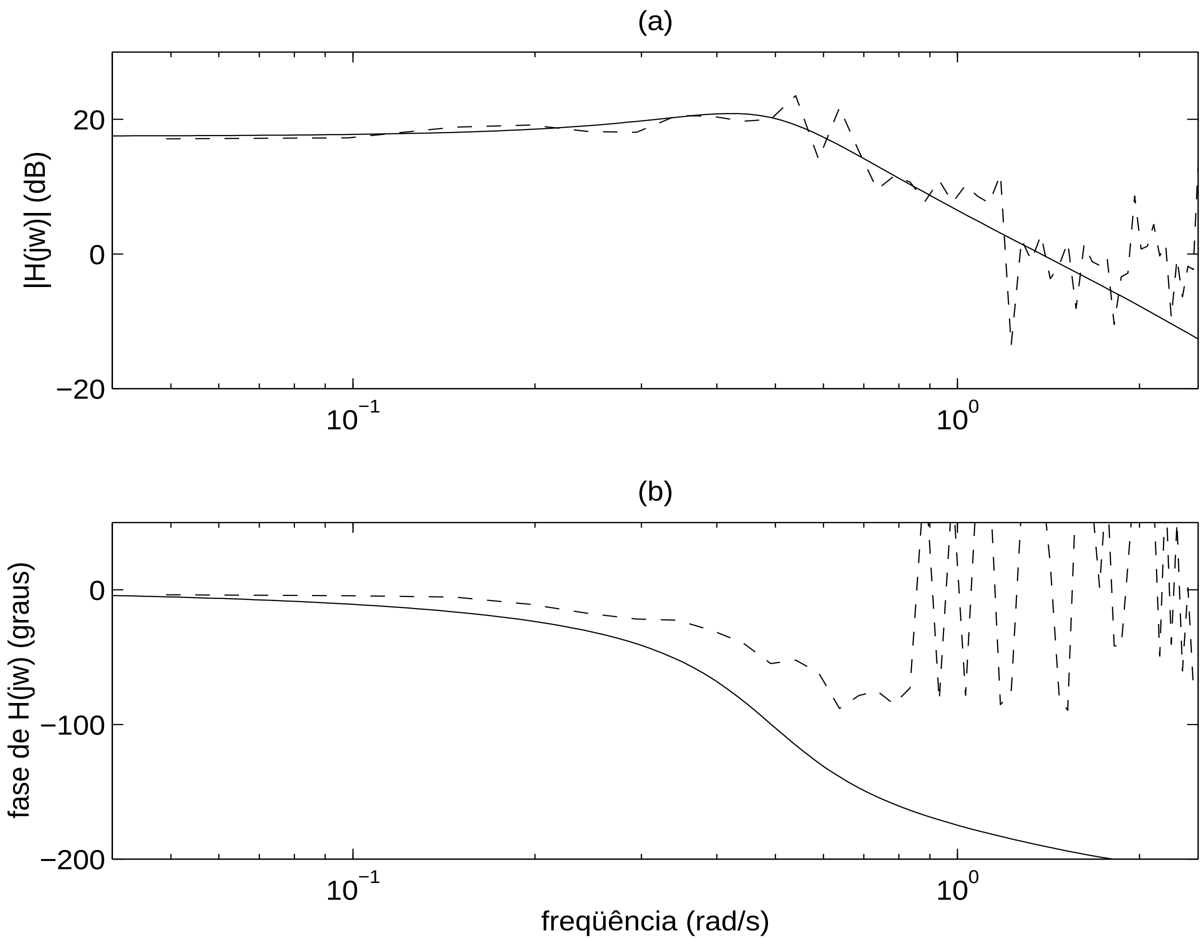


Figura 17: (a) ganho, e (b) fase das respostas em freqüência do sistema original (traço contínuo) e estimada a partir de $y(k)$ e $u(k)$ (tracejado, .

- O procedimento é sensível a problemas numéricos.

Estimação da resposta em freqüência (um caso real)

Os dados utilizados foram coletados da planta piloto de bombeamento de água.
Dois aspectos importantes do teste sao:

- a variação do sinal de saída é relativamente pequena comparada à faixa total de operação (menos de 0,1 V num fundo de escala de 5 V);

Estimação da resposta em freqüência (um caso real)

Os dados utilizados foram coletados da planta piloto de bombeamento de água.
Dois aspectos importantes do teste sao:

- a variação do sinal de saída é relativamente pequena comparada à faixa total de operação (menos de 0,1 V num fundo de escala de 5 V);
- o teste dinâmico não começa com a planta "desligada".

O tempo de amostragem utilizado foi $T_{\rm s} = 1,044$ segundos.

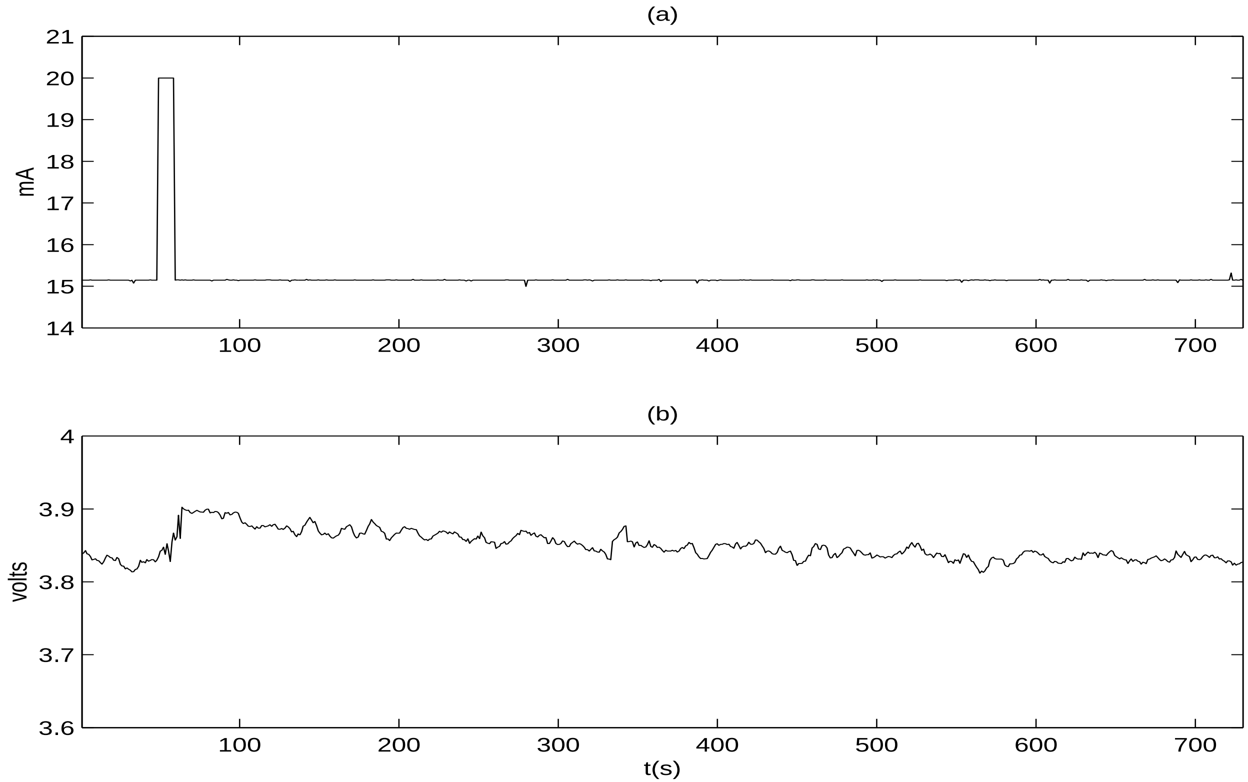


Figura 18: (a) pulso de entrada, $u(k)$, e (b) resposta de vazão da planta, $y(k)$.

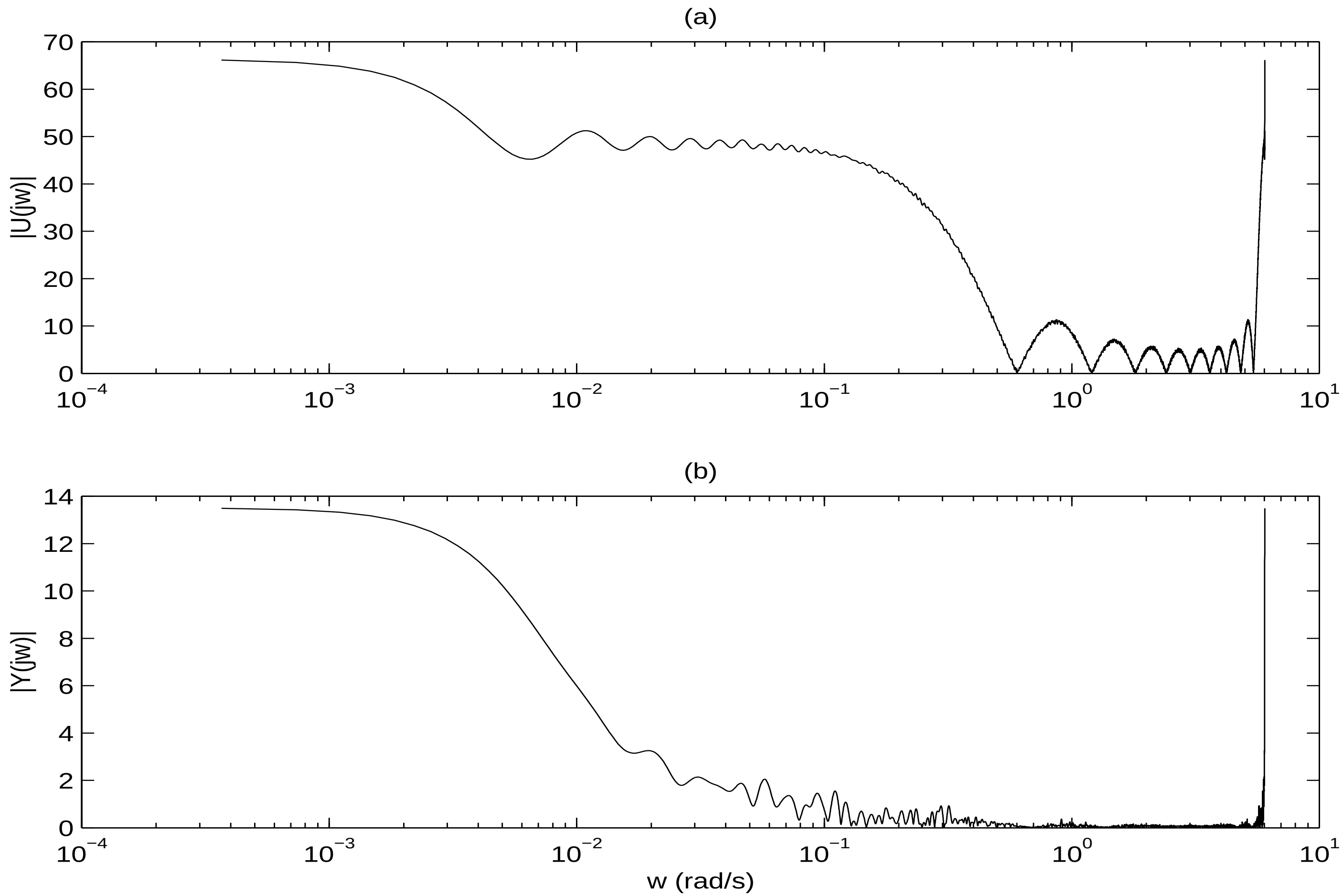


Figura 19: Módulos das transformadas de Fourier dos sinais de entrada e saída (a) $\mid U(j\omega) \mid$, e (b) $\mid Y(j\omega) \mid$.

Foram utilizados apenas os dados correspondentes até a freqüência de $\omega = 0,015$ rad/s.

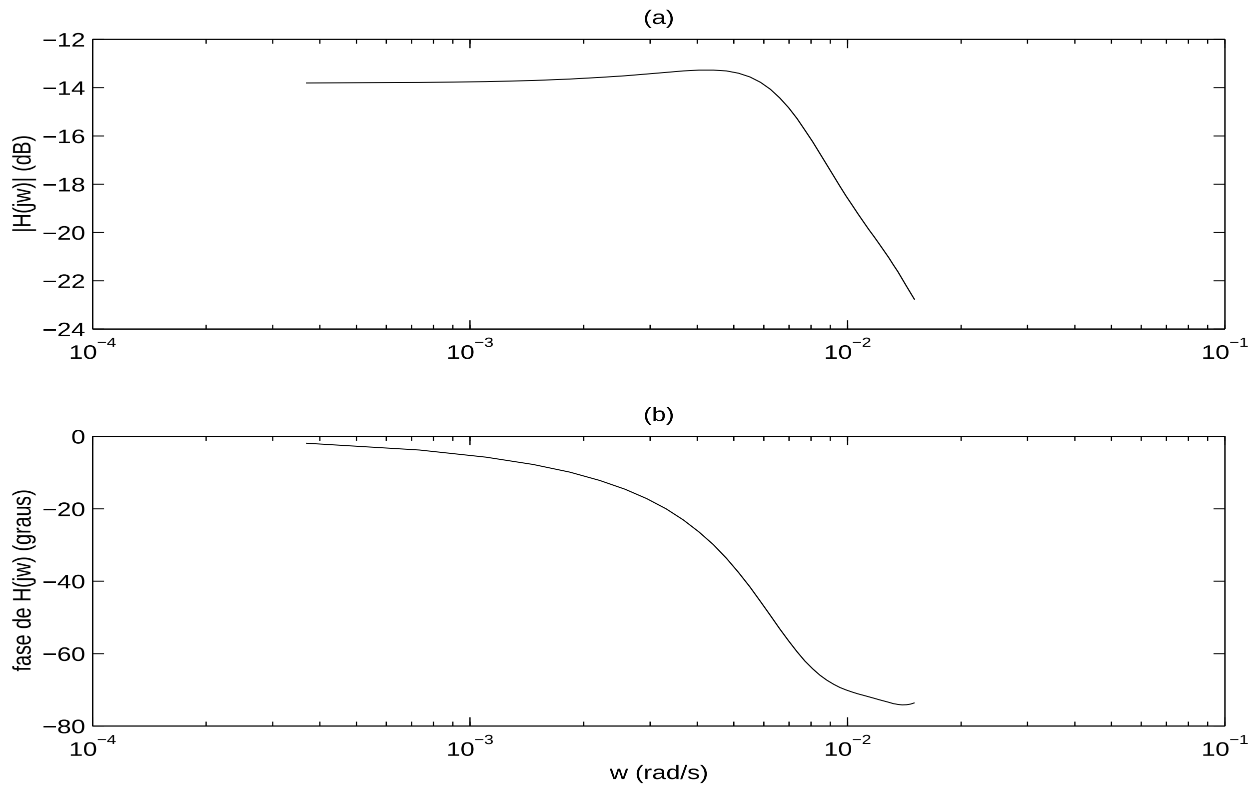


Figura 20: Representação gráfica de $\hat{H}(j\omega)$. (a) ganho, e (b) fase
.

Comentários Finais

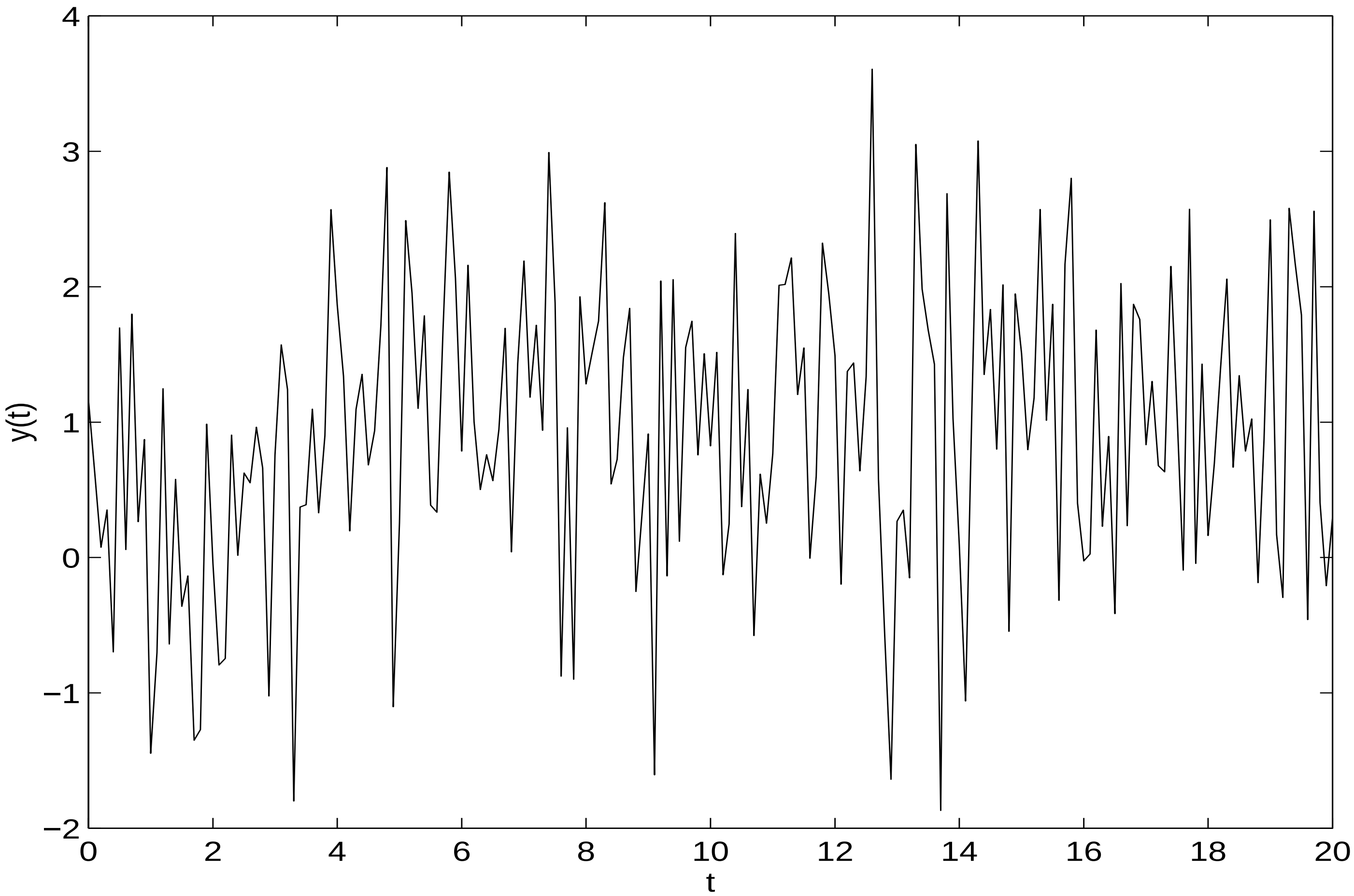


Figura 21: A mesma resposta ao degrau da Figura 13, mas contaminada com ruído.

- Obviamente, a partir desta Figura 21 torna-se impossível determinar as grandezas necessárias para aplicar o método descrito para a malha fecahda.

Considere o exemplo do ajuste da reta. Tomando os mesmos dados daquele exemplo, mas agora com ruído e repetindo o procedimento, chega-se ao seguinte resultado:

$$(x_1, y_1 + e_1) = (144,0; 0,098 + 0,032)$$

e

$$(x_2, y_2 + e_2) = (158,4; 0,109 + 0,005),$$

sendo que e_i são valores da variável aleatória e, que representa o ruído. Nesse caso, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 0,098 + 0,032 \\ 0,109 + 0,005 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 144,0 \\ 1 & 158,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,00 & -10,00 \\ -0,069 & 0,069 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,130 \\ 0,114 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,872 \times 10^{-1} \\ -1,091 \times 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

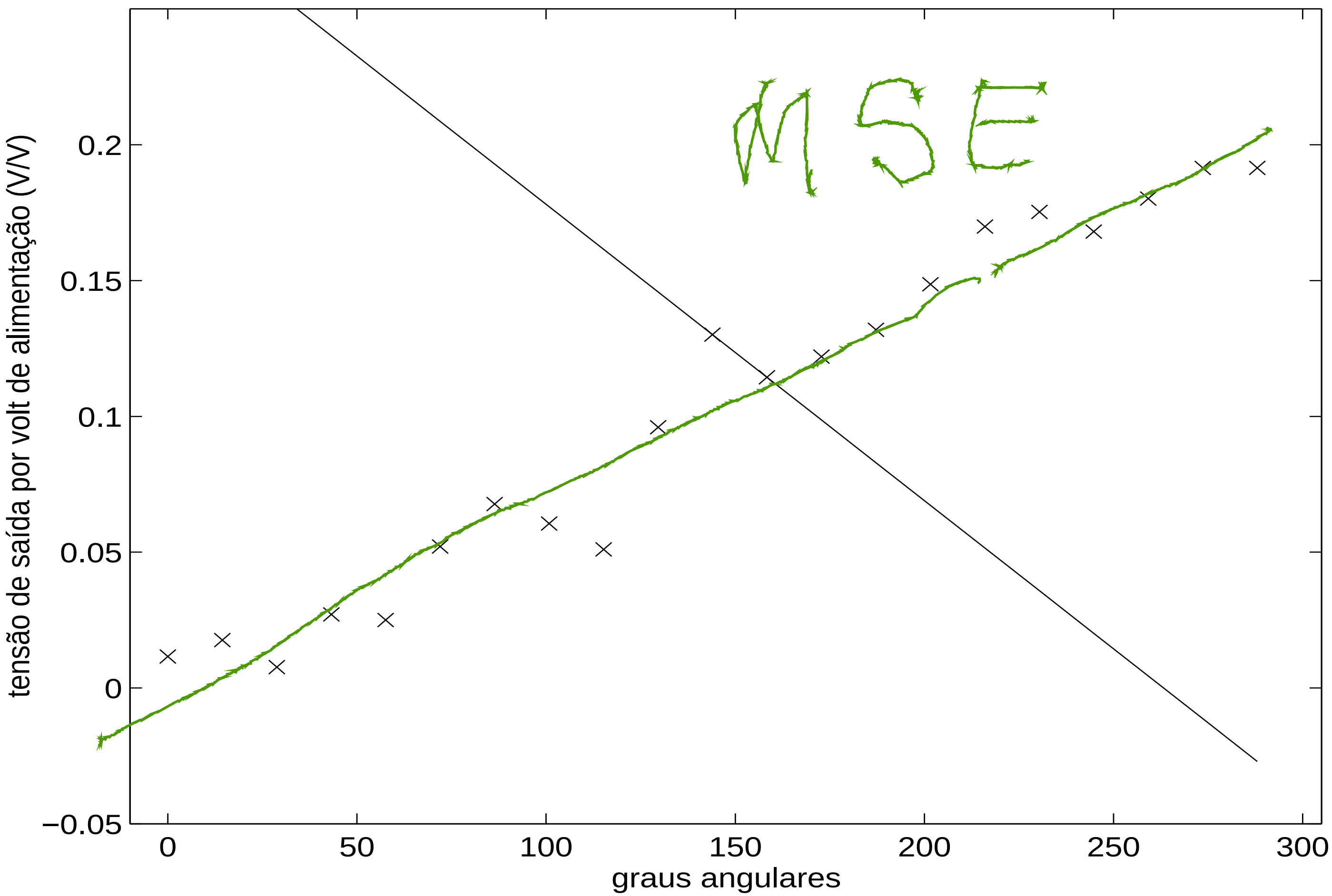


Figura 22: Dados medidos com ruído estão marcados com cruzes e o traço é a reta $y = 2,872 \times 10^{-1} - 1,091 \times 10^{-3}x$.