

Capítulo 4 - Métodos Não Paramétricos

Eduardo Mendes

`emmendes@cpdee.ufmg.br`

Departamento de Engenharia Eletrônica
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte, MG, Brasil

Os métodos não paramétricos são aqueles que não resultam em um modelo matemático tal como uma função de transferência, mas sim numa representação *gráfica* que caracteriza a dinâmica do sistema em estudo. Exemplos típicos de tais representações são a *resposta ao impulso* e a *resposta em frequência*.

- ▶ Este capítulo será útil para introduzir alguns conceitos e chamar a atenção para alguns problemas presentes também na identificação de modelos paramétricos.

Redução do efeito de ruído

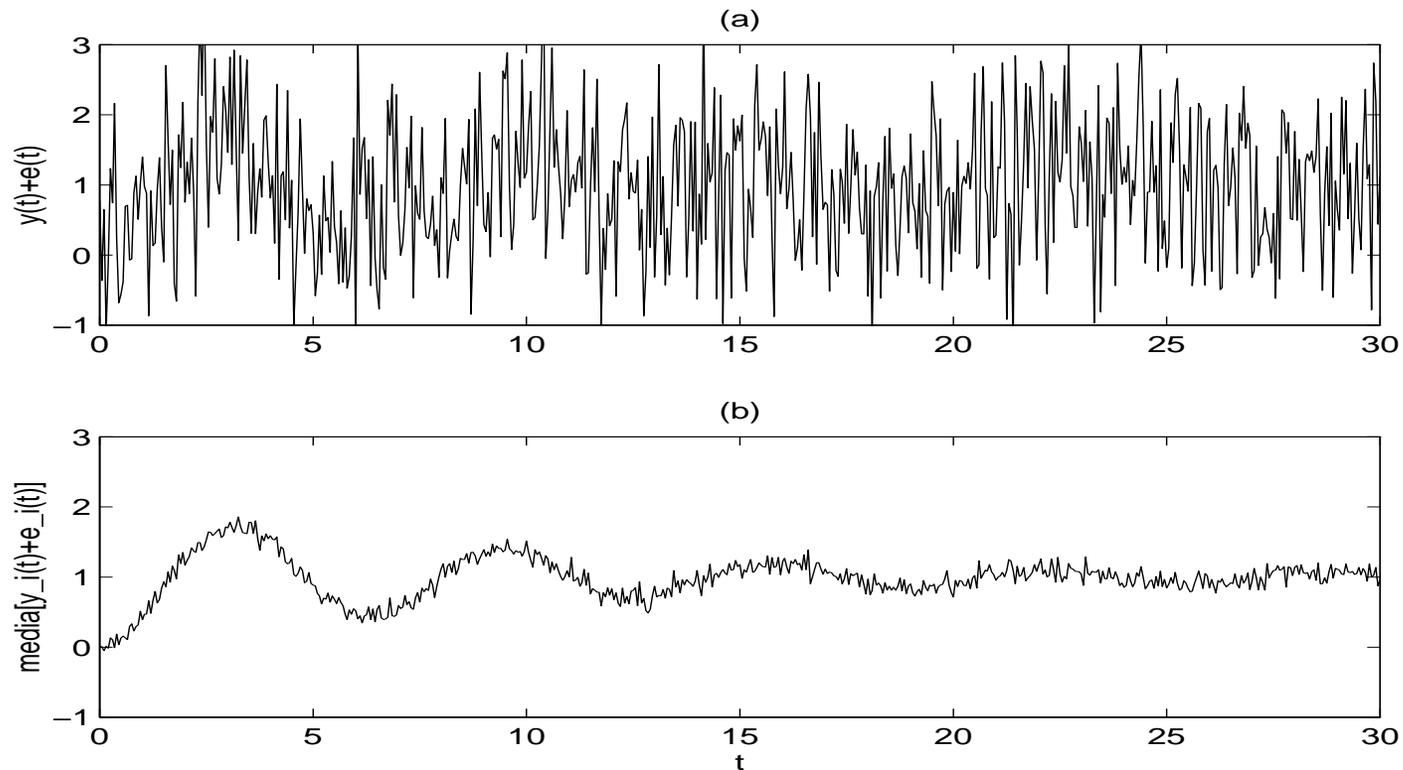
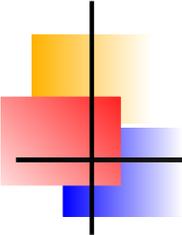
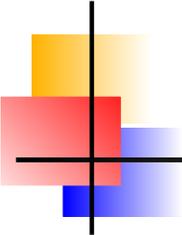
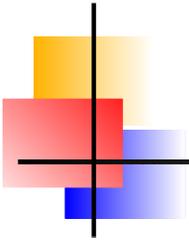


Figura 1: Redução do efeito de ruído aleatório ao se tirar a média de sinais de testes similares. (a) uma realização do teste, (b) média resultante de cem testes semelhantes ao mostrado em (a). Esse procedimento é também conhecido como acumulação de amostras.

- 
-
- ▶ Esse procedimento se baseia na pressuposição de que o ruído é aleatório com média zero, ou seja, o ruído é branco e, portanto, não consistente. Assume-se que o processo é ergódico.

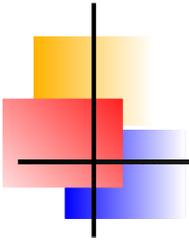
- 
-
- ▶ Esse procedimento se baseia na pressuposição de que o ruído é aleatório com média zero, ou seja, o ruído é branco e, portanto, não consistente. Assume-se que o processo é ergódico.

Ergodicidade: Um atributo de sistemas estocásticos; geralmente um sistema que tende, em probabilidade, à uma forma limitante que é independente das condições iniciais.



Justificativa

- ▶ A justificativa para o aumento da relação sinal/ruído acima pode ser entendida da seguinte forma. Seja a k -ésima amostra do sinal com ruído $y(k)$ com desvio padrão σ . Um conjunto de N_s simulações dá origem a N_s amostras na posição k , $\{y_1(k), y_2(k), \dots, y_{N_s}(k)\}$ com média $y(k)$.

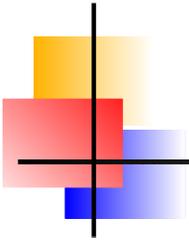


Justificativa

- ▶ A justificativa para o aumento da relação sinal/ruído acima pode ser entendida da seguinte forma. Seja a k -ésima amostra do sinal com ruído $y(k)$ com desvio padrão σ . Um conjunto de N_s simulações dá origem a N_s amostras na posição k , $\{y_1(k), y_2(k), \dots, y_{N_s}(k)\}$ com média $y(k)$.
- ▶ A média das N_s simulações é

$$\underline{y(k)} = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} y_i(k), \quad k = 1, \dots, N,$$

sendo que N indica o número total de amostras.



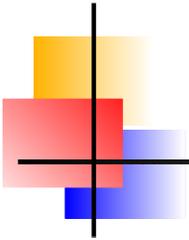
Justificativa

- ▶ A justificativa para o aumento da relação sinal/ruído acima pode ser entendida da seguinte forma. Seja a k -ésima amostra do sinal com ruído $y(k)$ com desvio padrão σ . Um conjunto de N_s simulações dá origem a N_s amostras na posição k , $\{y_1(k), y_2(k), \dots, y_{N_s}(k)\}$ com média $y(k)$.
- ▶ A média das N_s simulações é

$$\underline{y(k)} = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} y_i(k), \quad k = 1, \dots, N,$$

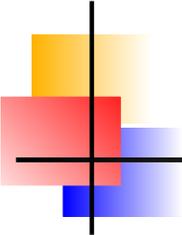
- ▶ sendo que N indica o número total de amostras.

$$\begin{aligned} \text{var}[\underline{y(k)}] &= \text{var}\left[\frac{1}{N_s} (y_1(k) + y_2(k) + \dots + y_{N_s}(k))\right] \\ &= \frac{1}{N_s^2} \text{var}[y_1(k) + y_2(k) + \dots + y_{N_s}(k)] \\ &= \frac{1}{N_s^2} \{ \text{var}[y_1(k)] + \text{var}[y_2(k)] \dots \text{var}[y_{N_s}(k)] \} \end{aligned}$$



► Finalmente

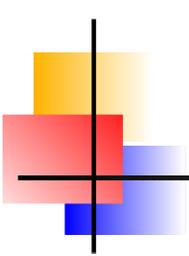
$$\text{var}[\underline{y(k)}] = \frac{N_s \sigma^2}{N_s^2} = \frac{\sigma^2}{N_s}. \quad (-3)$$



▶ Finalmente

$$\text{var}[\underline{y(k)}] = \frac{N_s \sigma^2}{N_s^2} = \frac{\sigma^2}{N_s}. \quad (-3)$$

- ▶ Portanto, (-3) mostra que o desvio padrão da k -ésima amostra do sinal resultante do procedimento de média, $\sqrt{\text{var}[\underline{y(k)}]} = \sigma / \sqrt{N_s}$, é menor que o desvio padrão da respectiva amostra no sinal original.

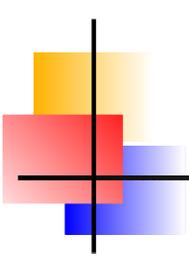


Identificação baseada em funções de correlação

- ▶ A *função de correlação cruzada* (FCC) entre dois sinais $u(t)$ e $y(t)$ é definida como

$$r_{uy}(\tau, t) = \mathbf{E}[u(t)y(t + \tau)]$$

$$r_{uy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)y(t + \tau)dt.$$



Identificação baseada em funções de correlação

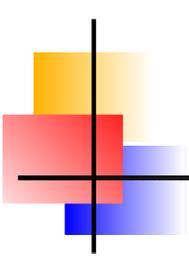
- ▶ A função de correlação cruzada (FCC) entre dois sinais $u(t)$ e $y(t)$ é definida como

$$r_{uy}(\tau, t) = \mathbb{E}[u(t)y(t + \tau)]$$

$$r_{uy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)y(t + \tau)dt.$$

- ▶ No caso discreto, a definição é

$$r_{uy}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{i=-N}^N u(i)y(i + k).$$



Identificação baseada em funções de correlação

- ▶ A *função de correlação cruzada* (FCC) entre dois sinais $u(t)$ e $y(t)$ é definida como

$$r_{uy}(\tau, t) = \mathbb{E}[u(t)y(t + \tau)]$$

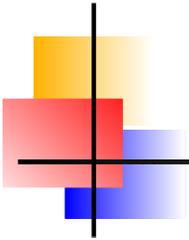
$$r_{uy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)y(t + \tau)dt.$$

- ▶ No caso discreto, a definição é

$$r_{uy}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{i=-N}^N u(i)y(i + k).$$

- ▶ A *função de autocorrelação* (FAC) de um sinal $u(t)$ pode ser estimada usando-se

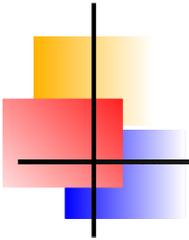
$$r_{uu}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{i=-N}^N u(i)u(i + k).$$



FAC de um processo MA

- ▶ Seja o processo MA $e(k) = c_1\nu(k-1) + \nu(k)$, sendo $\nu(k)$ uma variável aleatória, branca, de variância σ_ν^2 . A FAC de $e(k)$ pode ser determinada, assumindo-se estacionariedade, usando-se

$$r_{ee}(\tau) = \mathbb{E}[e(k)e(k+\tau)].$$



FAC de um processo MA

- ▶ Seja o processo MA $e(k) = c_1\nu(k-1) + \nu(k)$, sendo $\nu(k)$ uma variável aleatória, branca, de variância σ_ν^2 . A FAC de $e(k)$ pode ser determinada, assumindo-se estacionariedade, usando-se

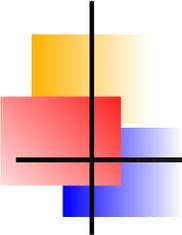
$$r_{ee}(\tau) = \text{E}[e(k)e(k+\tau)].$$

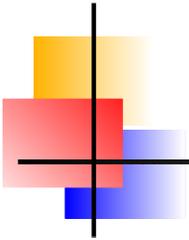
- ▶ A FAC de $e(k)$ pode ser determinada como

$$\begin{aligned} r_{ee}(0) &= \text{E} \left[(c_1\nu(k-1) + \nu(k))^2 \right] \\ &= \text{E}[\nu(k)^2] + c_1^2\text{E}[\nu(k-1)^2] = (1 + c_1^2)\sigma_\nu^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{ee}(1) &= \text{E} [(c_1\nu(k) + \nu(k-1)) (c_1\nu(k+1) + \nu(k))] \\ &= c_1\text{E}[\nu(k)^2] = c_1\sigma_\nu^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{ee}(\tau) &= \text{E} [(c_1\nu(k) + \nu(k-1)) (c_1\nu(k+\tau) + \nu(k-1+\tau))] \\ &= 0, \quad \forall \tau > 1. \end{aligned}$$

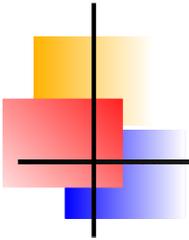
- 
-
- ▶ No desenvolvimento anterior a esperança matemática de alguns produtos cruzados era nula. Como será visto mais adiante, isso é uma consequência de algumas propriedades de sinais aleatórios.



FAC de uma senóide

- ▶ Seja o sinal $u(t) = A \text{sen}(\omega t + \phi)$. A função de autocorrelação desse sinal é:

$$\begin{aligned} r_{uu}(\tau) &= \text{E}[u(t)u(t + \tau)] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)u(t + \tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A^2 \text{sen}(\omega t + \phi) \text{sen}(\omega t + \omega\tau + \phi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{A^2}{2} [\cos(\omega\tau) - \cos(2\omega t + \omega\tau + 2\phi)] dt \\ &= \frac{1}{2} A^2 \cos(\omega\tau). \end{aligned}$$



FAC de uma senóide

- ▶ Seja o sinal $u(t) = A \text{sen}(\omega t + \phi)$. A função de autocorrelação desse sinal é:

$$\begin{aligned} r_{uu}(\tau) &= \text{E}[u(t)u(t + \tau)] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)u(t + \tau) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A^2 \text{sen}(\omega t + \phi) \text{sen}(\omega t + \omega\tau + \phi) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{A^2}{2} [\cos(\omega\tau) - \cos(2\omega t + \omega\tau + 2\phi)] dt \\ &= \frac{1}{2} A^2 \cos(\omega\tau). \end{aligned}$$

- ▶ Torna-se claro que a função de autocorrelação possui o mesmo período que a função original. De fato, essa propriedade não se limita apenas a sinais senoidais pois a FAC de qualquer sinal periódico é também periódica.

Detecção de correlação em meio ao ruído

Sejam $u(k) = A \cos(\omega k) + e(k)$ e $y(k) = A \sin(\omega k) + \nu(k)$,
 $k = 0, 1/2\pi, \pi, 3/2\pi, \dots$, sendo que $e(k)$ e $\nu(k)$ são variáveis aleatórias não correlacionadas com média nula.

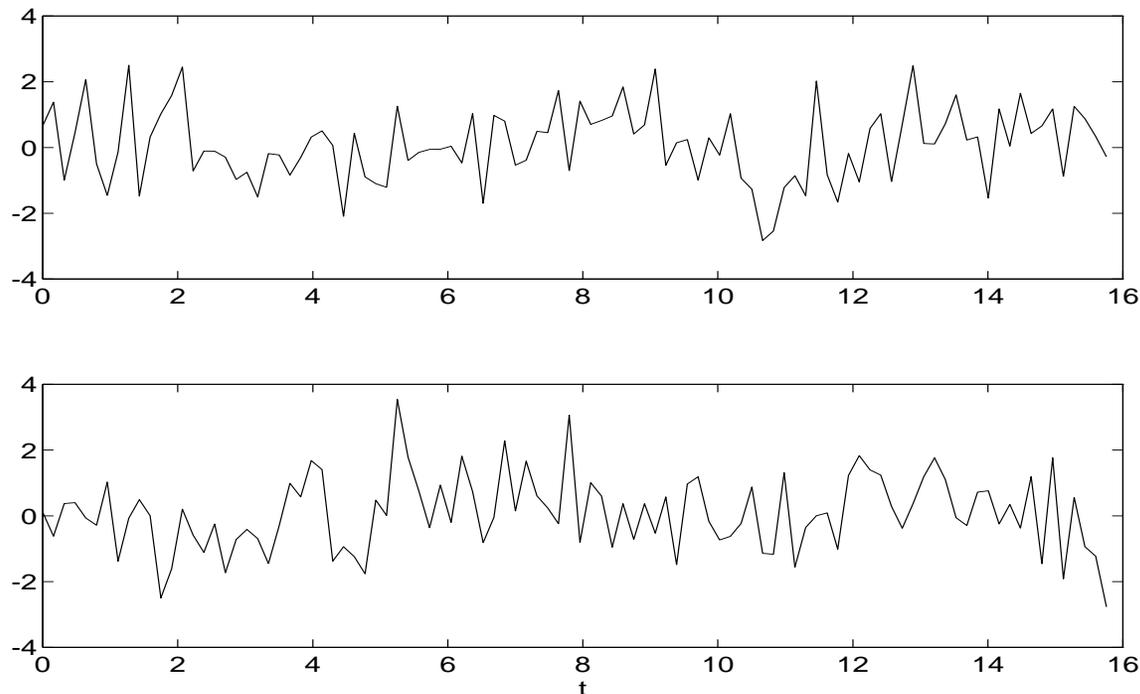


Figura 2: Trechos dos sinais $y(k)$ (superior) e $u(k)$ (inferior) do exemplo 11. Devido ao ruído, os sinais parecem descorrelacionados.

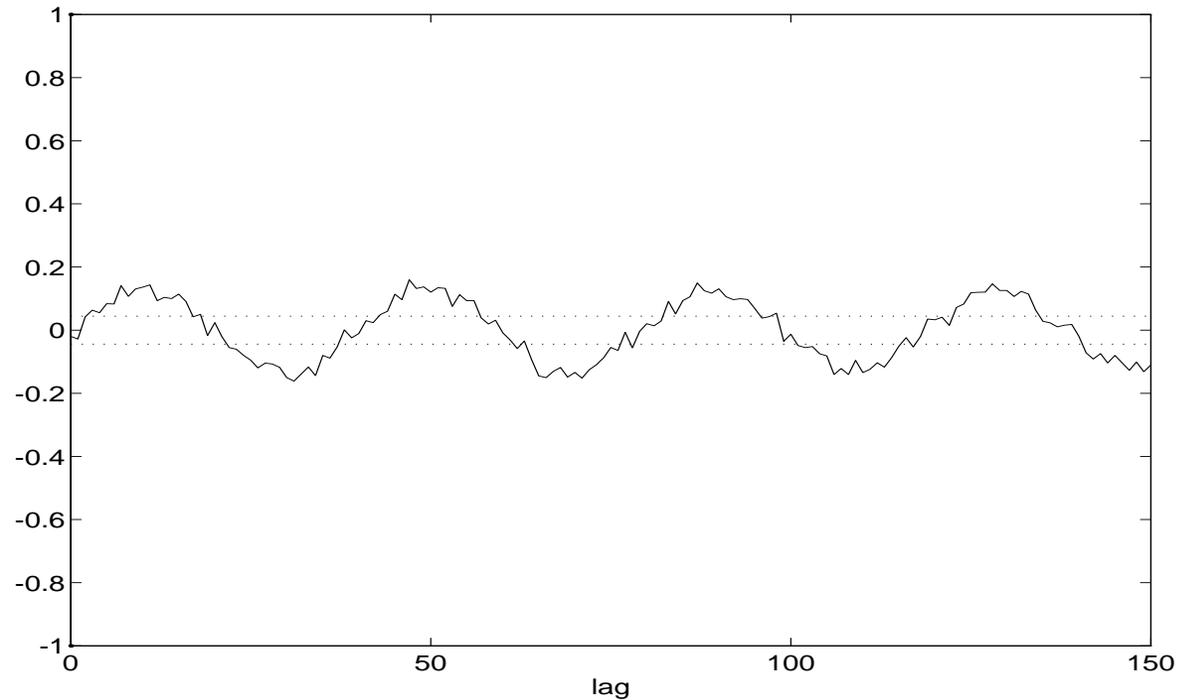
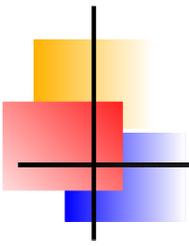
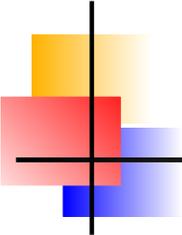
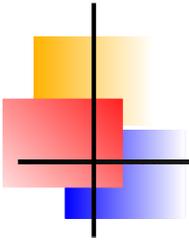


Figura 3: FCC entre $u(k)$ e $y(k)$. Os sinais são correlacionados com periodicidade de aproximadamente 40 períodos de amostragem.

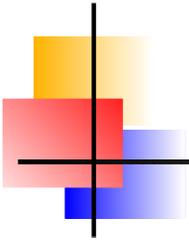


A correlação é periódica com periodicidade em torno de 40 amostras. A robustez com respeito ao ruído é uma das características desejáveis da FAC e da FCC.



Estimação de tempo morto usando a FCC

- ▶ Foi simulado um sistema com $K = 0,3$; $\zeta = 0,8$; $\omega_n = 2$ e com tempo morto de $\tau_d = 5$ segundos. Foi adicionado ruído branco com desvio padrão $\sigma_e = 0,3$.



Estimação de tempo morto usando a FCC

- ▶ Foi simulado um sistema com $K = 0,3$; $\zeta = 0,8$; $\omega_n = 2$ e com tempo morto de $\tau_d = 5$ segundos. Foi adicionado ruído branco com desvio padrão $\sigma_e = 0,3$.
- ▶ Para a entrada com características aleatórias, a FCC tem um valor máximo em torno do atraso 58, que corresponde a um tempo de 5,8 segundos. Apesar de bastante simples e muito robusto ao ruído o presente procedimento depende das características do sinal de entrada e é fortemente influenciado pela dinâmica do sistema.

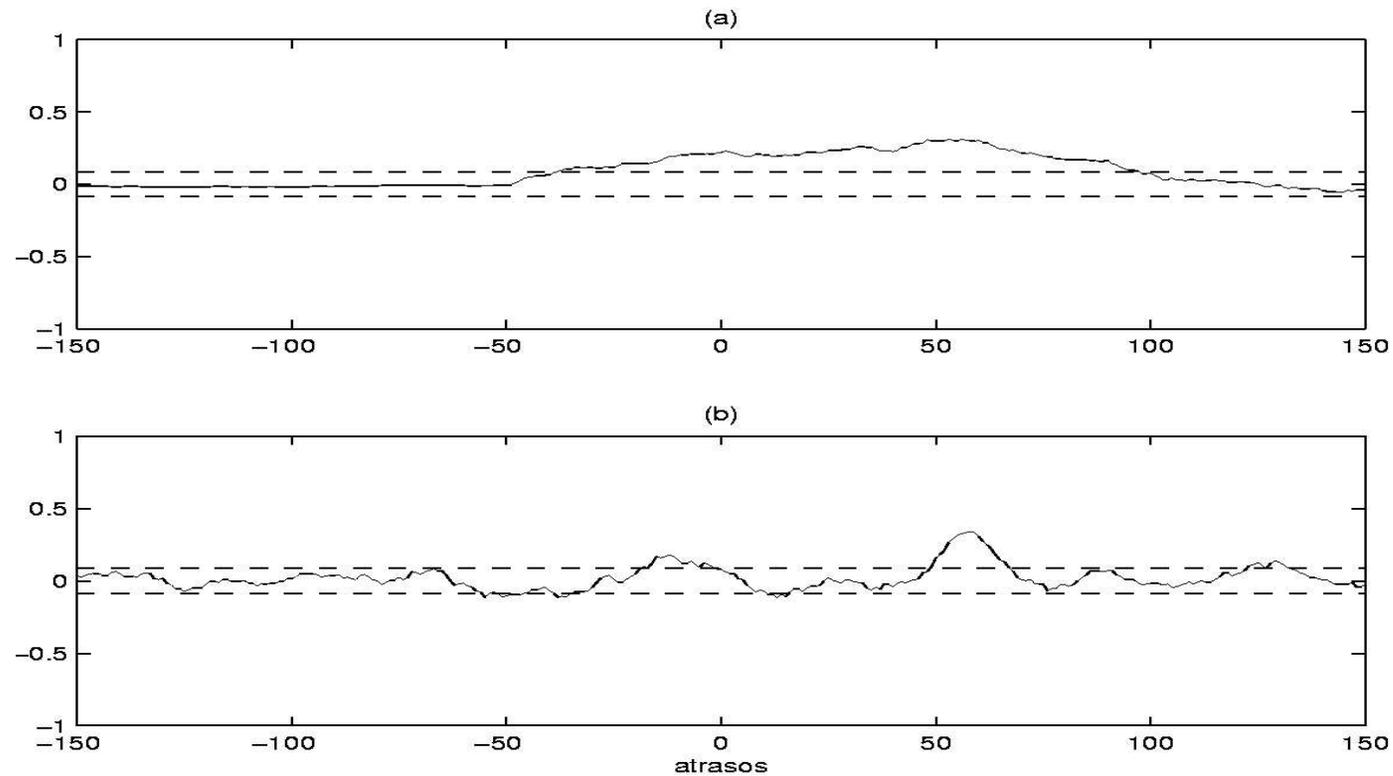
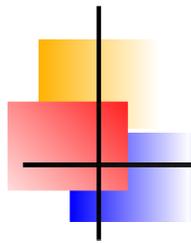
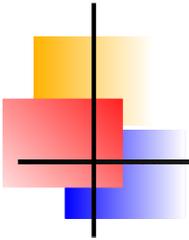
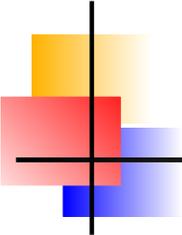


Figura 4: Estimação de tempo morto usando a FCC entre saída e entrada da função de transferência simulada para: (a) entrada em degrau, e (b) entrada pseudo-aleatória.



▶ Seja o *somatório de convolução*

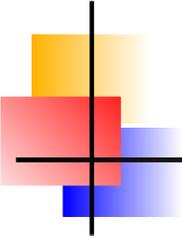
$$y(k + i) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k + i - j).$$

- 
-
- ▶ Seja o *somatório de convolução*

$$y(k + i) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k + i - j).$$

- ▶ Substituindo-se a equação acima em

$$r_{uy}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{i=-N}^N u(i)y(i + k)$$

- 
- ▶ Seja o *somatório de convolução*

$$y(k + i) = \sum_{j=0}^{\infty} h(j)u(k + i - j).$$

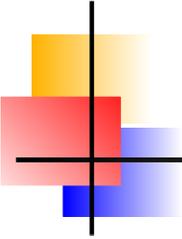
- ▶ Substituindo-se a equação acima em

$$r_{uy}(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{i=-N}^N u(i)y(i + k)$$

- ▶ resulta na *equação de Wiener-Hopf*

$$r_{uy}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)r_{uu}(k - i).$$

As funções de correlação $r_{uu}(k)$ e $r_{uy}(k)$ são relacionadas pela resposta ao impulso do sistema, $h(k)$, à semelhança de $u(k)$ e $y(k)$.

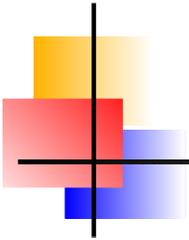
- 
-
- ▶ Usando a equação de Wiener-Hopf, um conjunto de equações pode ser escrito da seguinte forma:

$$r_{uy}(0) = h(0)r_{uu}(0) + h(1)r_{uu}(-1) + \dots$$

$$r_{uy}(1) = h(0)r_{uu}(1) + h(1)r_{uu}(0) + \dots$$

$$r_{uy}(2) = h(0)r_{uu}(2) + h(1)r_{uu}(1) + \dots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

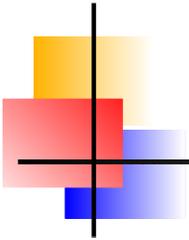
- 
- ▶ Usando a equação de Wiener-Hopf, um conjunto de equações pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 r_{uy}(0) &= h(0)r_{uu}(0) + h(1)r_{uu}(-1) + \dots \\
 r_{uy}(1) &= h(0)r_{uu}(1) + h(1)r_{uu}(0) + \dots \\
 r_{uy}(2) &= h(0)r_{uu}(2) + h(1)r_{uu}(1) + \dots \\
 &\vdots \quad \vdots \quad \vdots
 \end{aligned}$$

- ▶ que pode ser expressa em forma matricial como se segue:

$$\begin{bmatrix} r_{uy}(0) \\ r_{uy}(1) \\ r_{uy}(2) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{uu}(0) & r_{uu}(-1) & \dots \\ r_{uu}(1) & r_{uu}(0) & \dots \\ r_{uu}(2) & r_{uu}(1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \end{bmatrix},$$

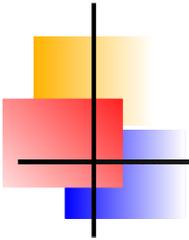
$$\mathbf{r}_{uy} = \mathbf{R}_{uu} \mathbf{h}.$$



▶ Se $u(k)$ for tal que $r_{uu}(k) = 0, \forall k \neq 0$, R_{uu} será diagonal e

$$\mathbf{r}_{uy} = r_{uu}(0)I \mathbf{h},$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{r}_{uy}/\sigma_u^2,$$

- 
- ▶ Se $u(k)$ for tal que $r_{uu}(k) = 0, \forall k \neq 0$, R_{uu} será diagonal e

$$\mathbf{r}_{uy} = r_{uu}(0)I \mathbf{h},$$

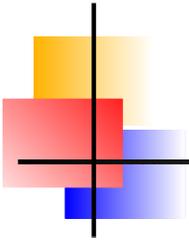
$$\mathbf{h} = \mathbf{r}_{uy}/\sigma_u^2,$$

- ▶ Se, $y(k) = y^i(k) + e(k)$, tem-se

$$\begin{aligned} r_{uy}(k) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^N u(i)[y^i(i+k) + e(i+k)] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left[\sum_{i=-N}^N u(i)y^i(i+k) + \sum_{i=-N}^N u(i)e(i+k) \right] \\ &= r_{uy^i}(k) + r_{ue}(k). \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_{uy^i} + \mathbf{r}_{ue} = r_{uu}(0)I \mathbf{h},$$

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{r}_{uy^i}}{\sigma_u^2} + \frac{\mathbf{r}_{ue}}{\sigma_u^2}.$$



Estimação estocástica da resposta ao impulso

A função de transferência é simulada para uma entrada, $u(k)$, pseudo-aleatória e ruído é adicionado à resposta, $y(k)$. A variância do ruído é $\sigma_e^2 = 1 \times 10^{-1}$, ou seja, 10.000 vezes maior do que a do ruído usado no exemplo do capítulo anterior, cuja função de transferência era:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z + 0,5}{z^2 - 1,5z + 0,7}.$$

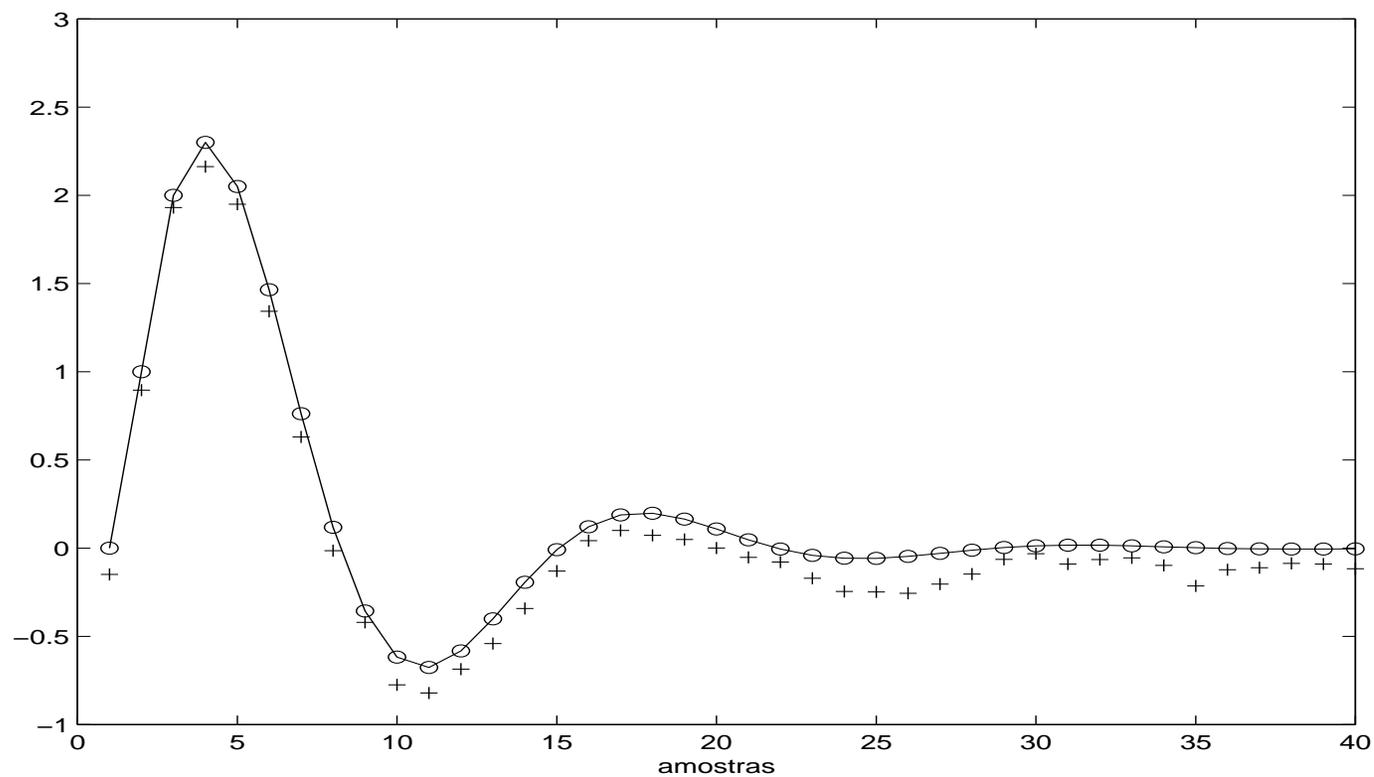
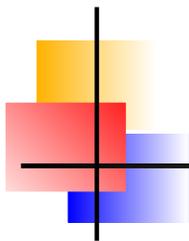


Figura 5: Resposta ao impulso (o) original e (+) estimada. O traço contínuo foi adicionado a fim de facilitar a visualização .

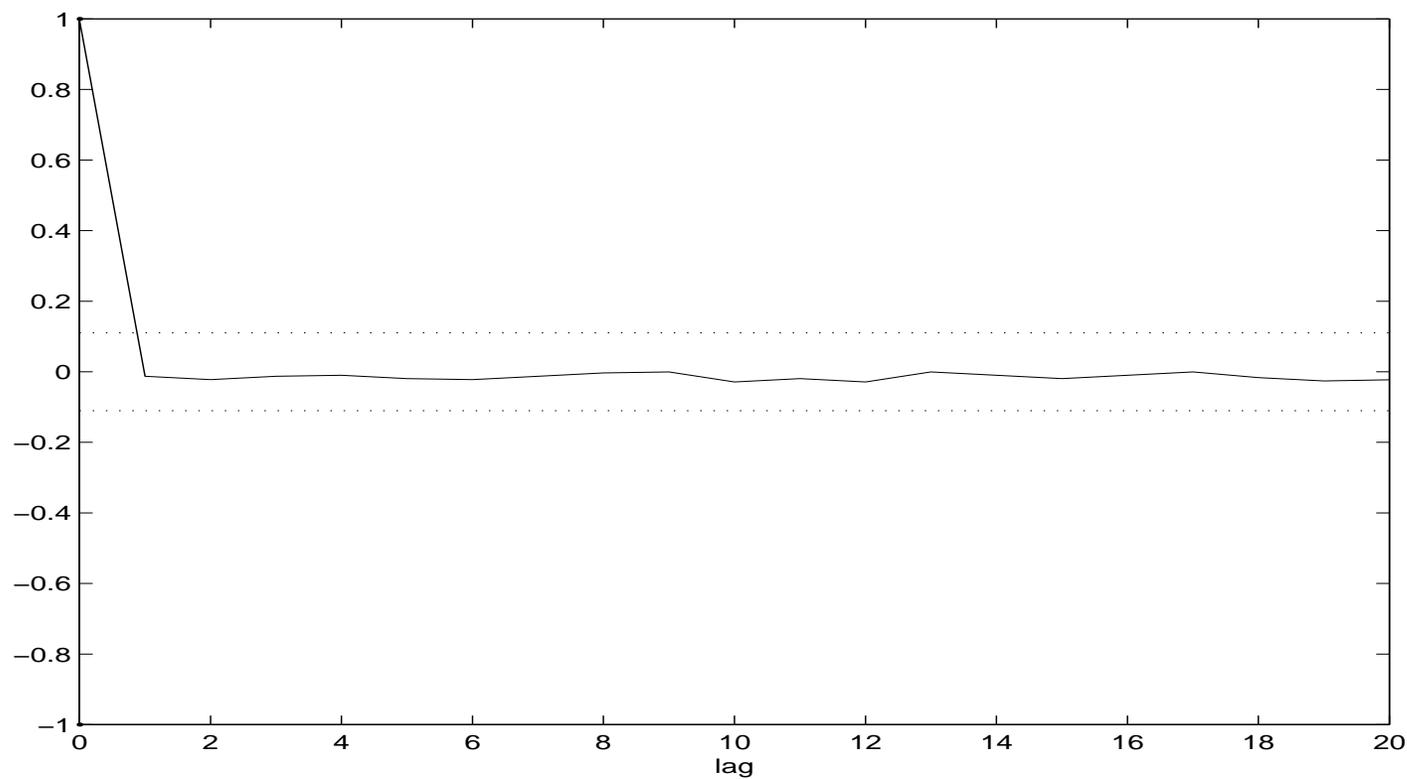
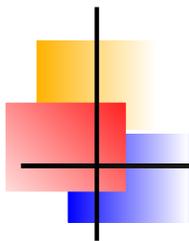


Figura 6: FAC de $u(k)$, $r_{uu}(k)$. As faixas indicadas são os intervalos de confiança de 95% .

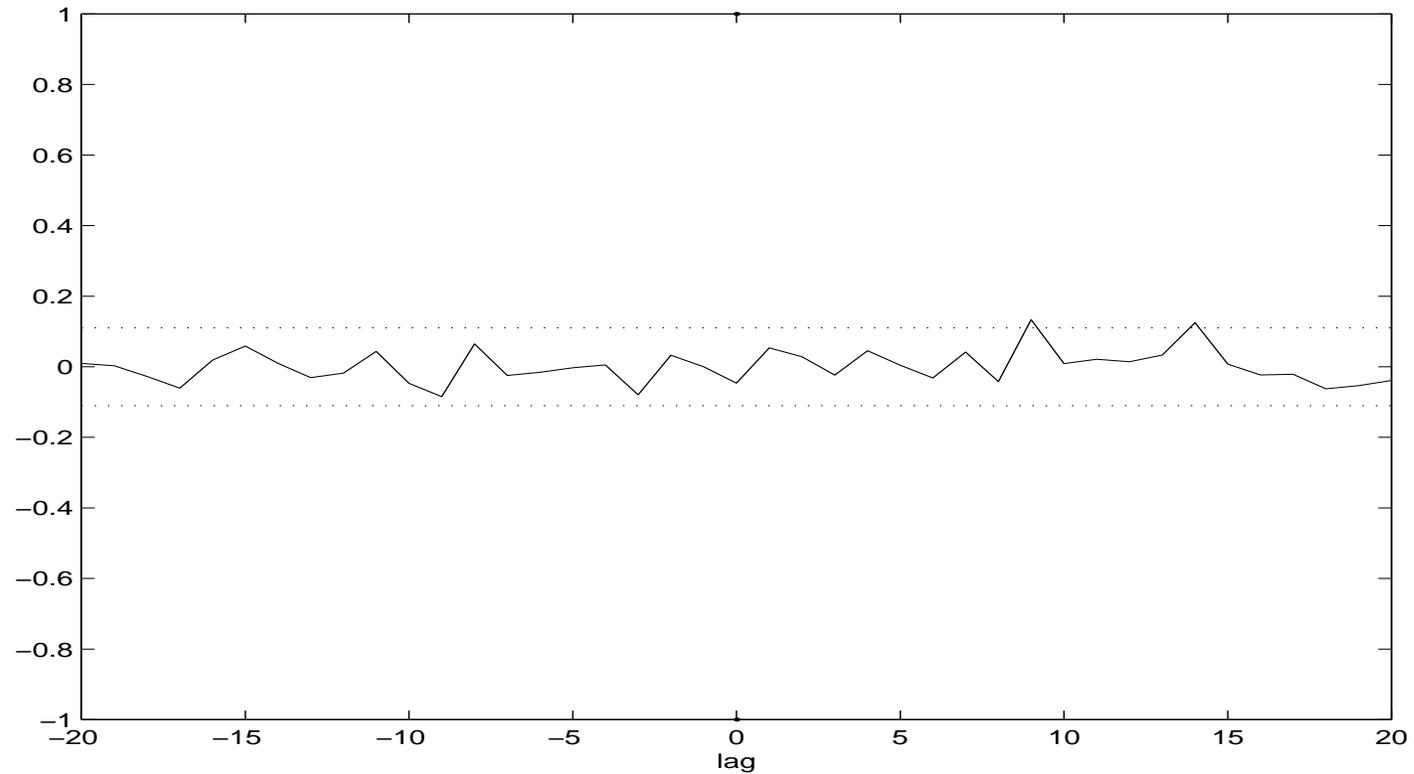
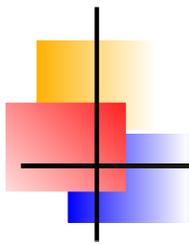
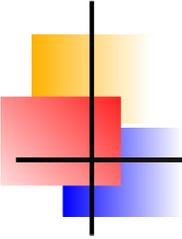
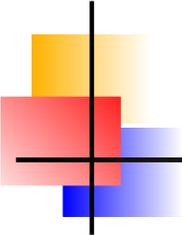


Figura 7: FCC entre $u(k)$ e $e(k)$, $r_{ue}(k)$. As faixas indicadas são os intervalos de confiança de 95%.



O ruído não é desprezível como requerido por métodos determinísticos de identificação. Por se tratar de um método estocástico, a exigência sobre o ruído é que $r_{ue}(k) = 0, \forall k$, o que pode ser facilmente verificado a partir da Figura 7.



Sinais Aleatórios e Pseudo-Aleatórios

- ▶ Seja uma variável aleatória x cuja distribuição é *gaussiana* com média \bar{x} e desvio padrão σ_x . Seja uma determinada realização x_i de x , então a probabilidade de x_i estar compreendida nas faixas

$$\bar{x} - \sigma_x < x_i < \bar{x} + \sigma_x,$$

$$\bar{x} - 2\sigma_x < x_i < \bar{x} + 2\sigma_x,$$

$$\bar{x} - 3\sigma_x < x_i < \bar{x} + 3\sigma_x$$

é de de 68%, 95% e 99,7%, respectivamente.

Verificação dos limites de Confiança da FCC

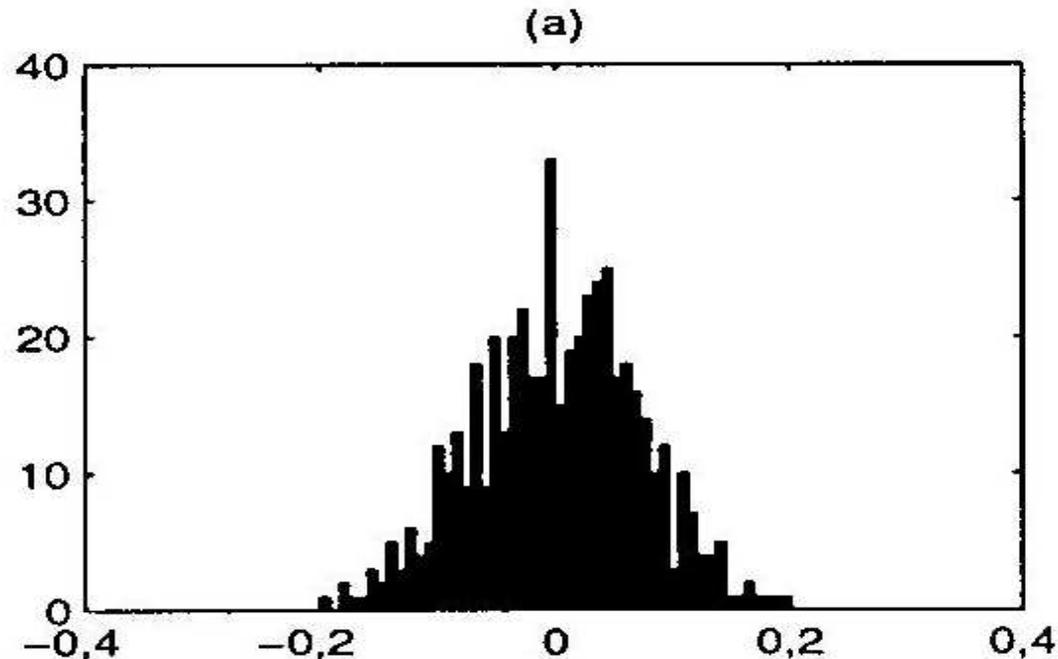


Figura 8: Histograma dos coeficientes de correlação $\hat{r}_{xy}(k)$ entre os sinais não correlacionados $x(k)$ e $y(k)$ para valores específicos de atraso. O gráfico sugere gaussianidade. A média e o desvio padrão são: $\underline{r_{xy}(-6)} = 0,0027$ e $\sigma_{\hat{r}} = 0,0709$. Os limites de confiança $\pm 2/\sqrt{200} \approx \pm 0,14$ aproximam-se de $\underline{r_{xy}} \pm 2\sigma_{\hat{r}}$, confirmando a equivalência das relações acima.

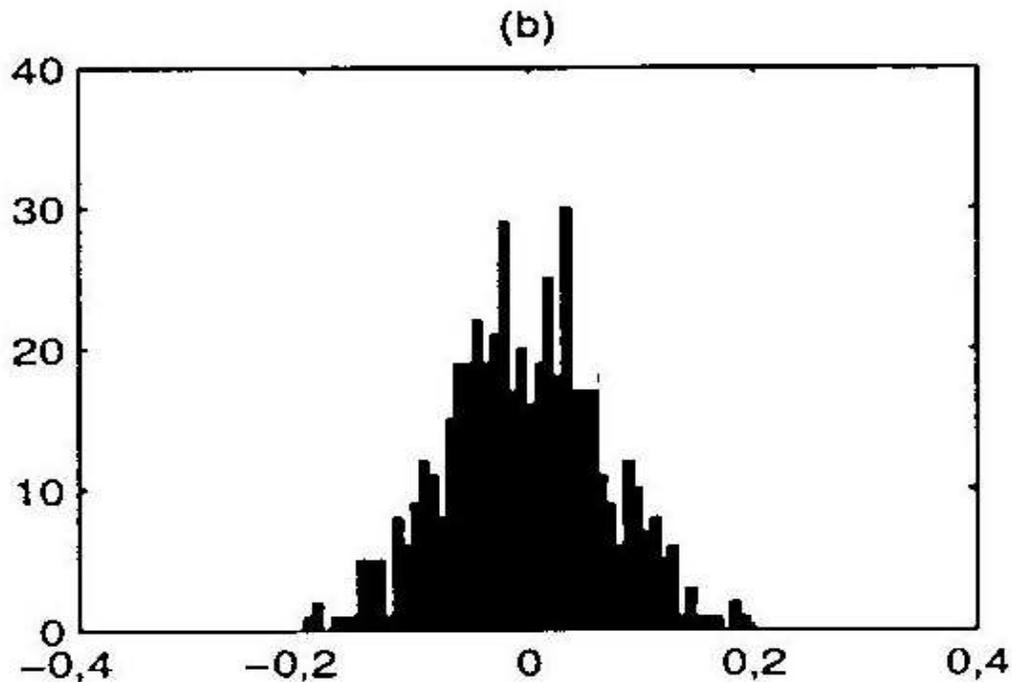


Figura 9: Histograma dos coeficientes de correlação $\hat{r}_{xy}(k)$ entre os sinais não correlacionados $x(k)$ e $y(k)$ para valores específicos de atraso. O gráfico sugere gaussianidade. A média e o desvio padrão são: $\underline{r_{xy}(-1)} = -0,0035$ e $\sigma_{\hat{r}} = 0,0696$. Os limites de confiança $\pm 2/\sqrt{200} \approx \pm 0,14$ aproximam-se de $\underline{r_{xy}} \pm 2\sigma_{\hat{r}}$, confirmando a equivalência das relações acima.

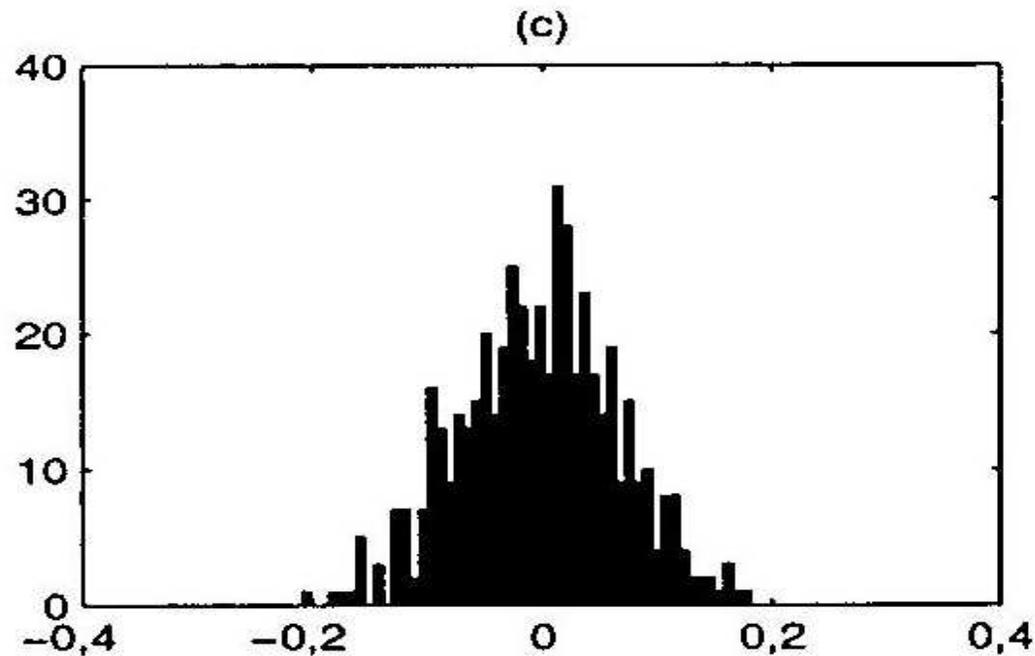


Figura 10: Histograma dos coeficientes de correlação $\hat{r}_{xy}(k)$ entre os sinais não correlacionados $x(k)$ e $y(k)$ para valores específicos de atraso. O gráfico sugere gaussianidade. A média e o desvio padrão são: $\underline{r_{xy}(4)} = -0,0023$ e $\sigma_{\hat{r}} = 0,0679$. Os limites de confiança $\pm 2/\sqrt{200} \approx \pm 0,14$ aproximam-se de $\underline{r_{xy}} \pm 2\sigma_{\hat{r}}$, confirmando a equivalência das relações acima.

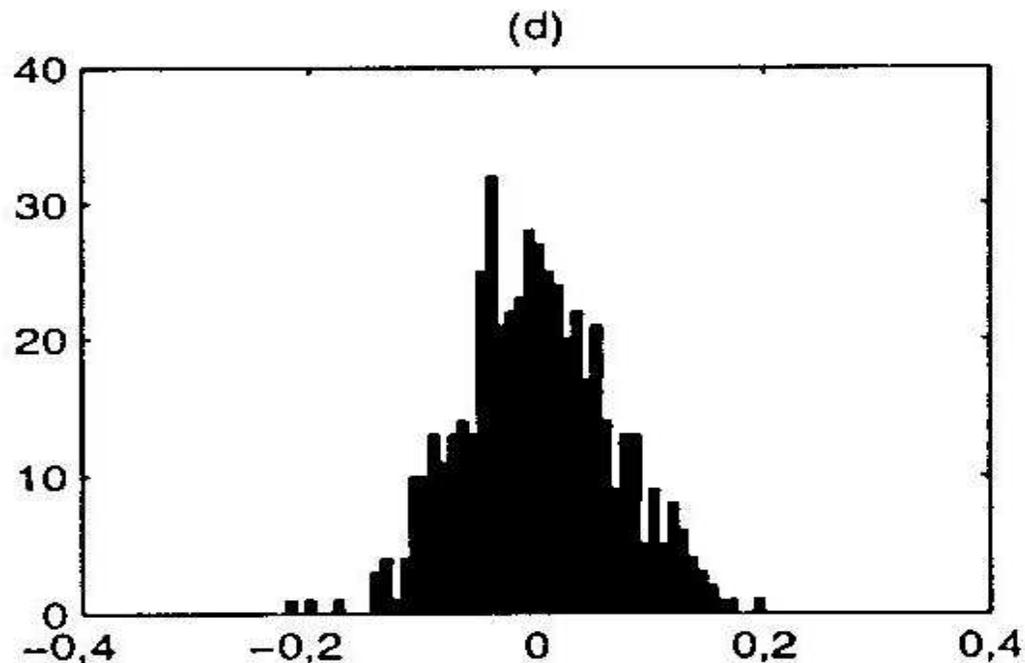


Figura 11: Histograma dos coeficientes de correlação $\hat{r}_{xy}(k)$ entre os sinais não correlacionados $x(k)$ e $y(k)$ para valores específicos de atraso. O gráfico sugere gaussianidade. A média e o desvio padrão são: $\underline{r_{xy}}(9) = 0,0006$ e $\sigma_{\hat{r}} = 0,0656$. Os limites de confiança $\pm 2/\sqrt{200} \approx \pm 0,14$ aproximam-se de $\underline{r_{xy}} \pm 2\sigma_{\hat{r}}$, confirmando a equivalência das relações acima.

Sinais binários pseudo-aleatórios

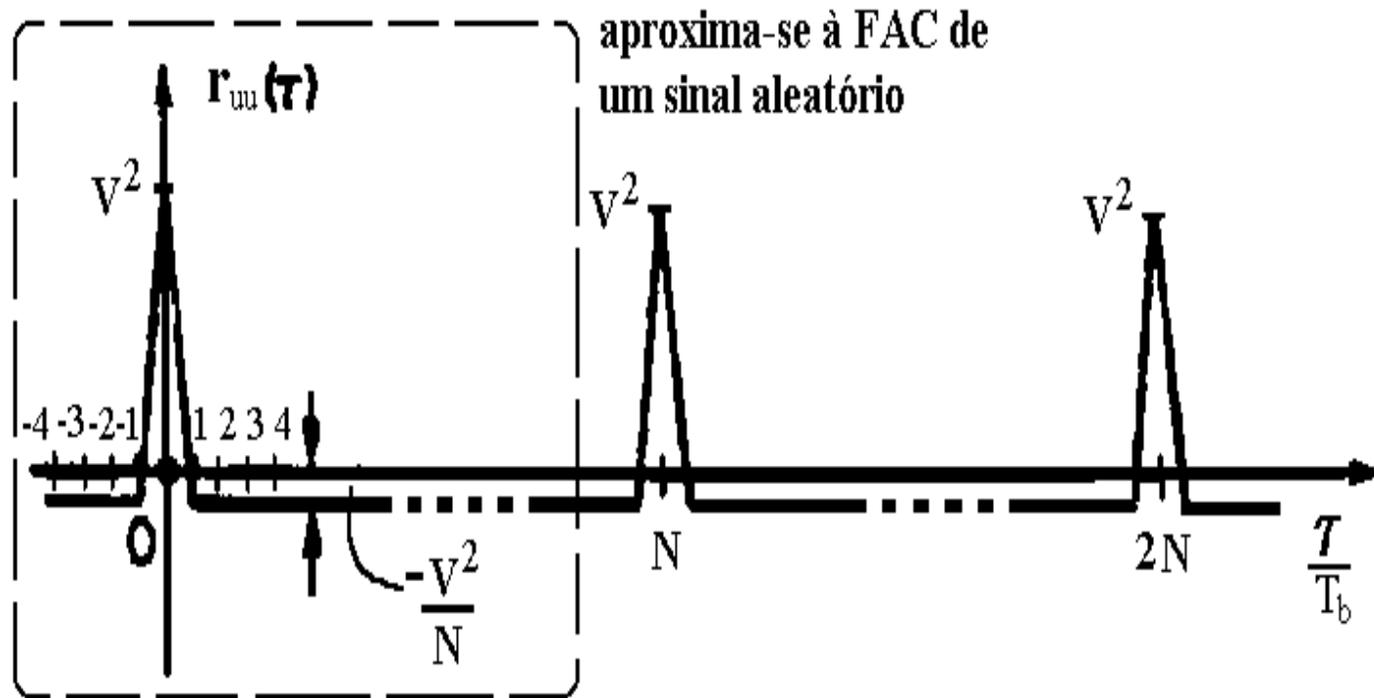


Figura 12: FAC típica de sinais pseudo-aleatórios. A parte indicada no quadro tracejado aproxima-se à FAC de sinais aleatórios.

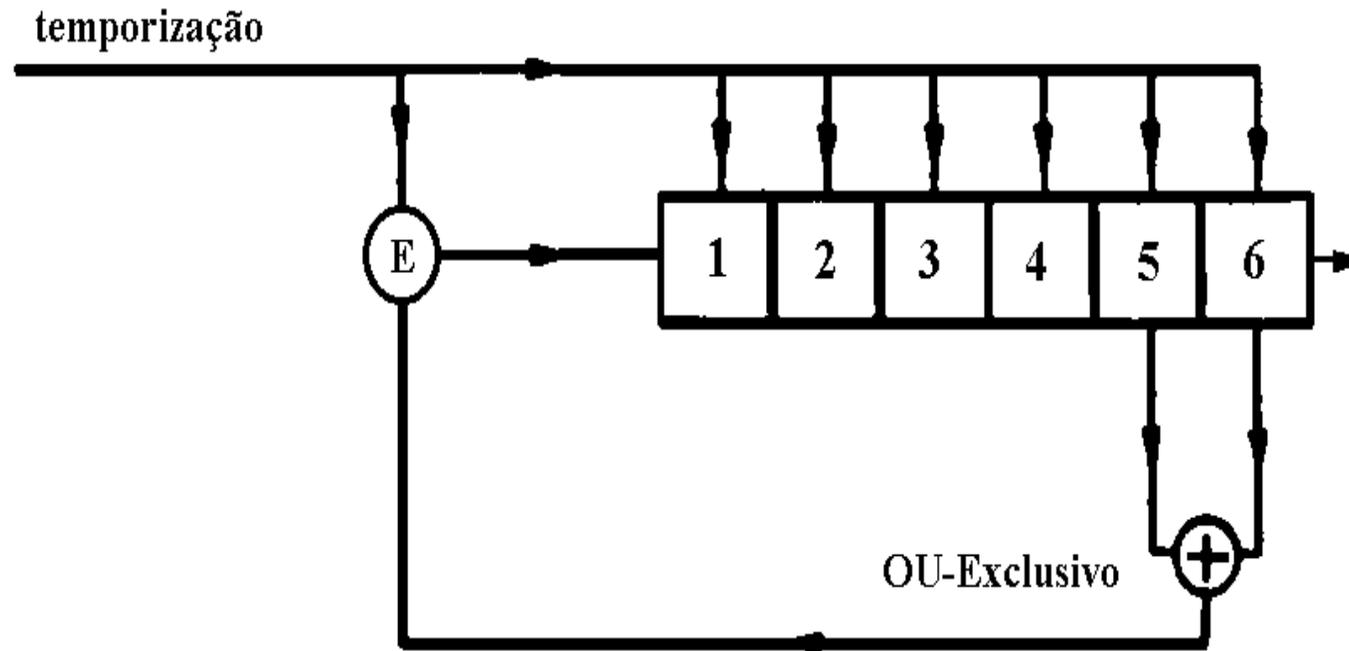
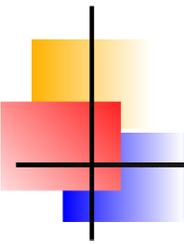


Figura 13: A temporização o circuito define um valor ($+V$ ou $-V$) na saída.

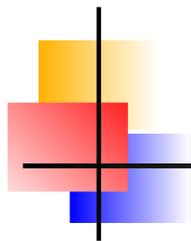
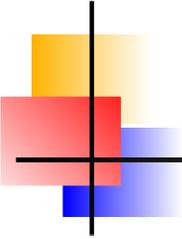


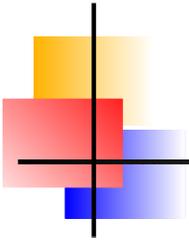
Tabela 1: Conexões para gerar sinais de seqüência m .

n	$N = 2^n - 1$	bits usados pela porta OU-Exclusivo
2	3	1 e 2
3	7	2 e 3
4	15	3 e 4
5	31	3 e 5
6	63	5 e 6
7	127	4 e 7
8	225	2,3,4 e 8
9	511	5 e 9
10	1023	7 e 10
11	2047	9 e 11



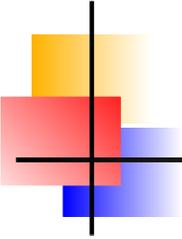
A periodicidade do sinal PRBS não pode ser menor do que o tempo de acomodação do sistema que está sendo testado.

- ▶ Caso contrário, o sistema perceberá a periodicidade do sinal PRBS, reduzindo, assim, o carácter de aleatoriedade do teste.



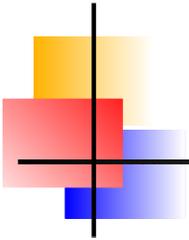
A periodicidade do sinal PRBS não pode ser menor do que o tempo de acomodação do sistema que está sendo testado.

- ▶ Caso contrário, o sistema perceberá a periodicidade do sinal PRBS, reduzindo, assim, o carácter de aleatoriedade do teste.
- ▶ Por outro lado, se o período for suficientemente longo, o sistema verá o sinal de excitação como sendo aleatório.



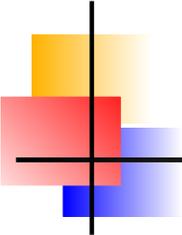
O intervalo entre bits, T_b , dever ser compatível com a menor constante de tempo de interesse.

- ▶ Se T_b for muito grande, o sistema interpretará o sinal PRBS como sendo um degrau (características pobres para a maioria dos métodos de identificação).



O intervalo entre bits, T_b , dever ser compatível com a menor constante de tempo de interesse.

- ▶ Se T_b for muito grande, o sistema interpretará o sinal PRBS como sendo um degrau (características pobres para a maioria dos métodos de identificação).
- ▶ Se T_b for muito curto, o sistema não terá tempo de responder a uma transição antes de chegar a próxima.



O intervalo entre bits, T_b , dever ser compatível com a menor constante de tempo de interesse.

- ▶ Se T_b for muito grande, o sistema interpretará o sinal PRBS como sendo um degrau (características pobres para a maioria dos métodos de identificação).
- ▶ Se T_b for muito curto, o sistema não terá tempo de responder a uma transição antes de chegar a próxima.
- ▶ Um resultado heurístico que fornece boas escolhas para o valor de T_b é

$$\text{round} \left[\frac{\tau_{\min}}{10} \right] \leq T_b \leq \text{round} \left[\frac{\tau_{\min}}{3} \right],$$

sendo que τ_{\min} é a menor constante de tempo de interesse e $\text{round}(\cdot)$ fornece o inteiro mais próximo.

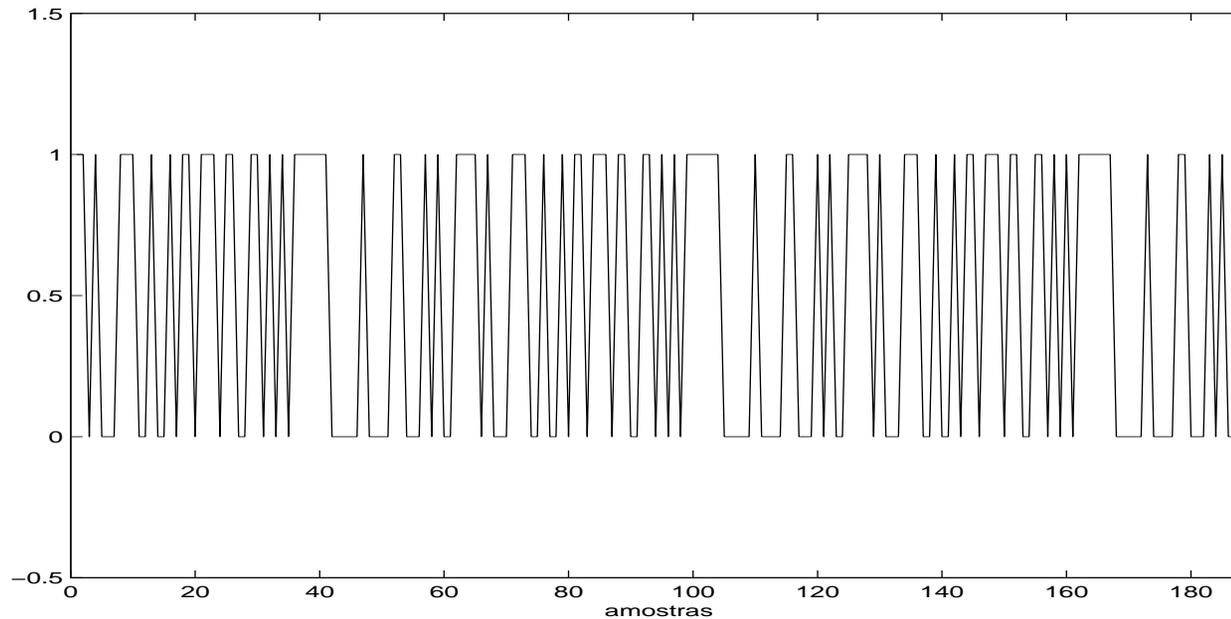
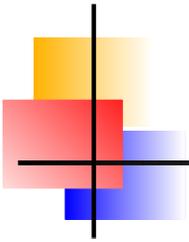


Figura 14: Sinal PRBS de seqüência m com $n = 6$. Observe que são mostrados os níveis lógicos. A transformação desses níveis para níveis de tensão é $1 \rightarrow +V$ e $0 \rightarrow -V$.

Sinal tipo PRBS em turbina de avião

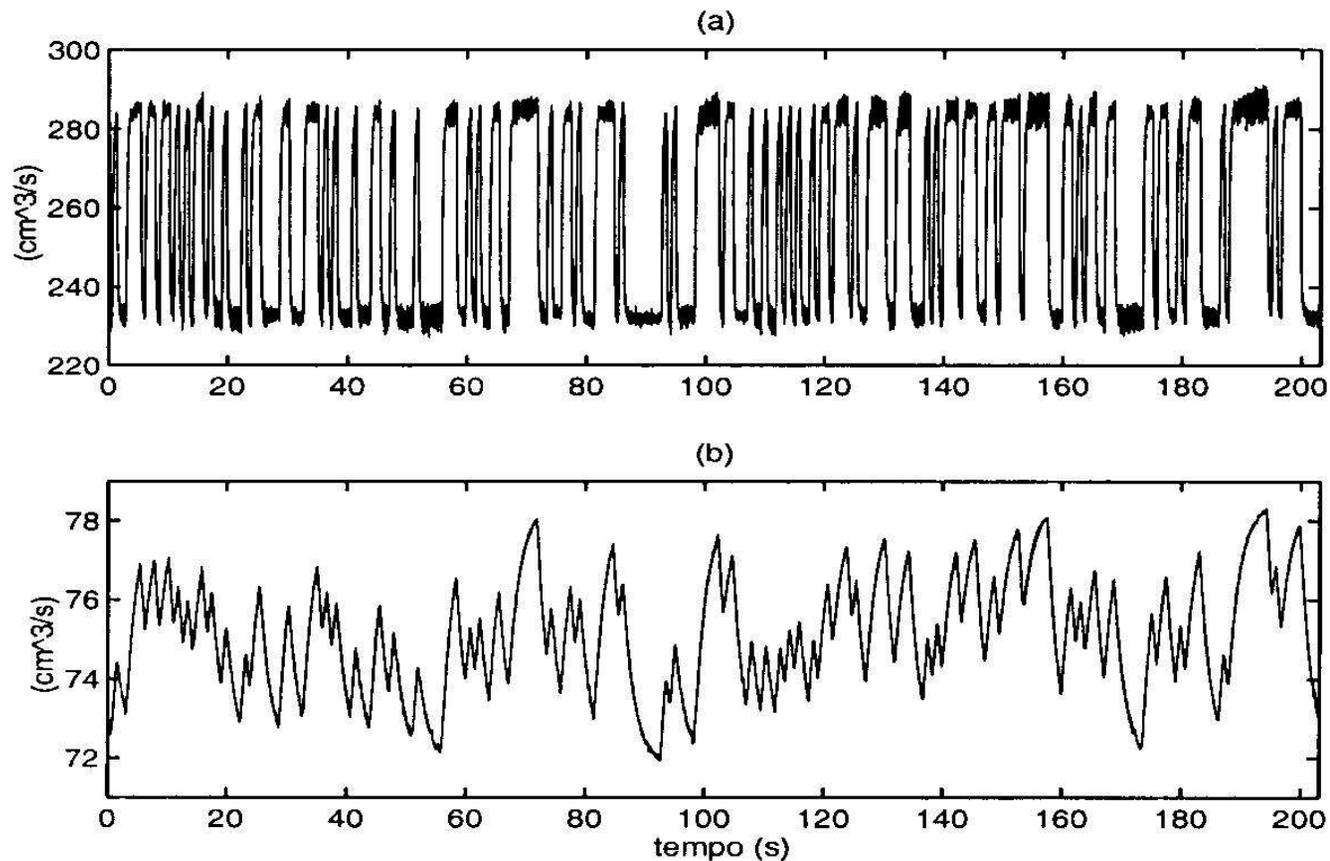
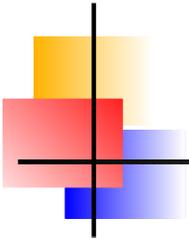


Figura 15: Sinais medidos em turbina de avião. (a) sinal PRBS de seqüência m de vazão de combustível (cm^3/s) e (b) velocidade de rotação de eixo de medida (%) - copyright IEEE 2001



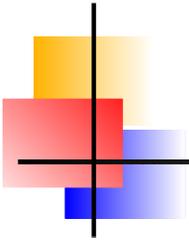
Reduzindo o Efeito do Ruído no Domínio da Freqüência

- ▶ De posse do sinal de saída $y_i(t)$, resposta à excitação senoidal $u_i(t) = A_i \text{sen}(\omega_i t)$, $i = 1, 2, \dots, N_f$, as seguintes constantes podem ser calculadas:

$$S_i = \frac{\omega_i}{2N\pi} \int_0^{(2N\pi)/\omega_i} y(t) \text{sen}(\omega_i t) dt,$$

$$C_i = \frac{\omega_i}{2N\pi} \int_0^{(2N\pi)/\omega_i} y(t) \cos(\omega_i t) dt,$$

sendo N o número de ciclos da saída.



Reduzindo o Efeito do Ruído no Domínio da Freqüência

- ▶ De posse do sinal de saída $y_i(t)$, resposta à excitação senoidal $u_i(t) = A_i \text{sen}(\omega_i t)$, $i = 1, 2, \dots, N_f$, as seguintes constantes podem ser calculadas:

$$S_i = \frac{\omega_i}{2N\pi} \int_0^{(2N\pi)/\omega_i} y(t) \text{sen}(\omega_i t) dt,$$

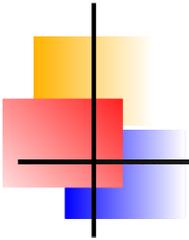
$$C_i = \frac{\omega_i}{2N\pi} \int_0^{(2N\pi)/\omega_i} y(t) \cos(\omega_i t) dt,$$

sendo N o número de ciclos da saída.

- ▶ Finalmente, pode-se mostrar que

$$G_i \approx 2(S_i^2 + C_i^2)^{1/2} / A_i$$

$$\phi_i \approx \tan^{-1}(C_i / S_i).$$



Funções de potência espectral

Aplicando-se a transformada de Fourier à equação de Wiener-Hopf, resulta em

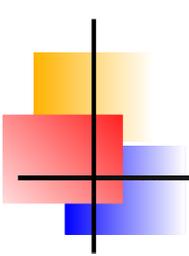
$$\mathcal{F}\{r_{uy}(k)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} h(i)r_{uu}(k-i)\right\}$$
$$\Phi_{uy}(j\omega) = H(j\omega)\Phi_u(\omega).$$

$\Phi_{uy}(j\omega)$ é a função de densidade de potência do espectro cruzado entre $u(k)$ e $y(k)$, ou seja,

$$\Phi_{uy}(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{uy}(k)e^{-j\omega k},$$

e a grandeza real $\Phi_u(\omega)$ é a função de densidade espectral, ou o espectro, de $u(k)$:

$$\Phi_u(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{uu}(k)e^{-j\omega k}.$$



Estimação estocástica da resposta em frequência

- ▶ Seja a função de transferência

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z + 0,5}{z^2 - 1,5z + 0,7}.$$

Um sinal pseudo-aleatório de seqüência m de 11 bits foi usado para excitar o sistema. Apenas 512 amostras foram usadas. À resposta do sistema foi adicionado ruído branco com variância $\sigma_e^2 = 1$.

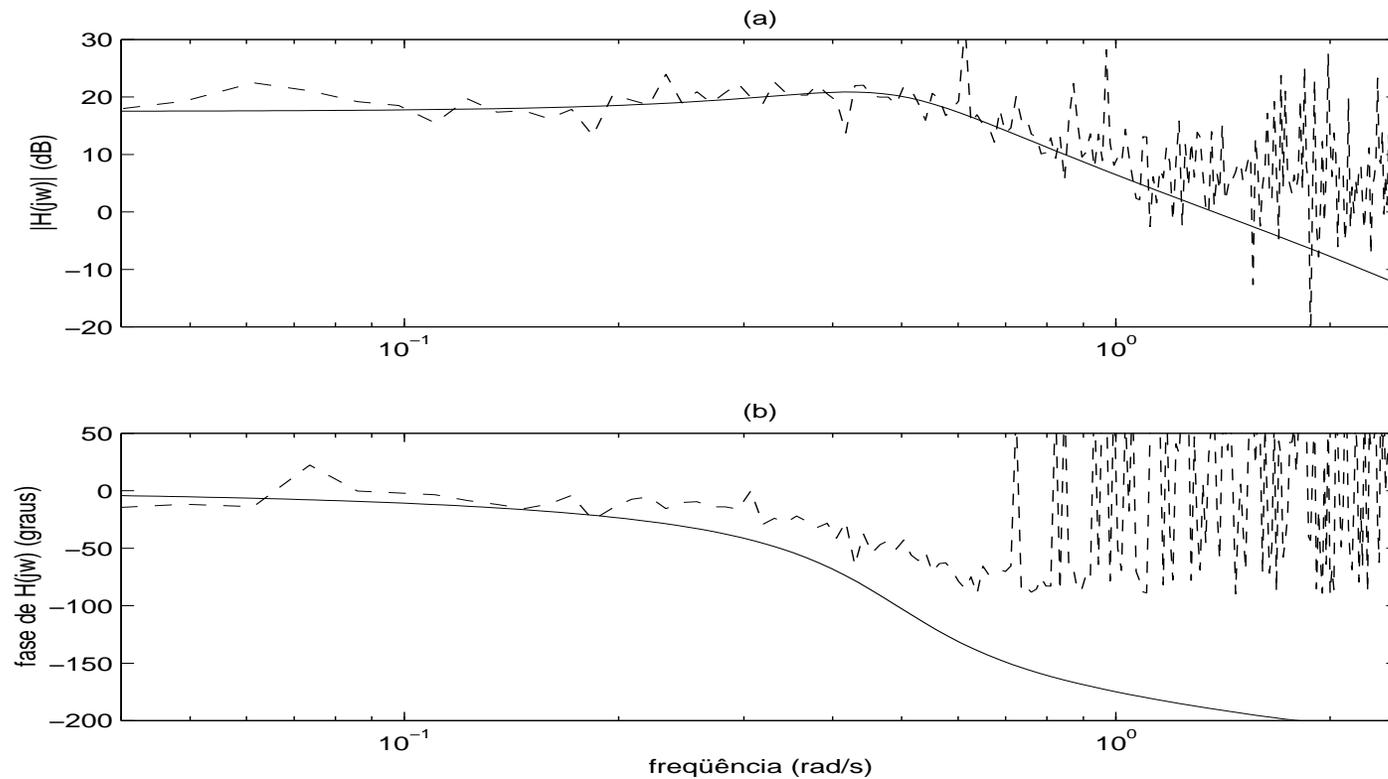
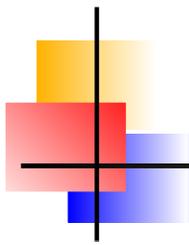


Figura 16: Respostas em frequência “real” e estimada. (a) ganho, e (b) fase das respostas em frequência do sistema original (traço contínuo) e estimada a partir de $y(k)$ e $u(k)$ (tracejado) .

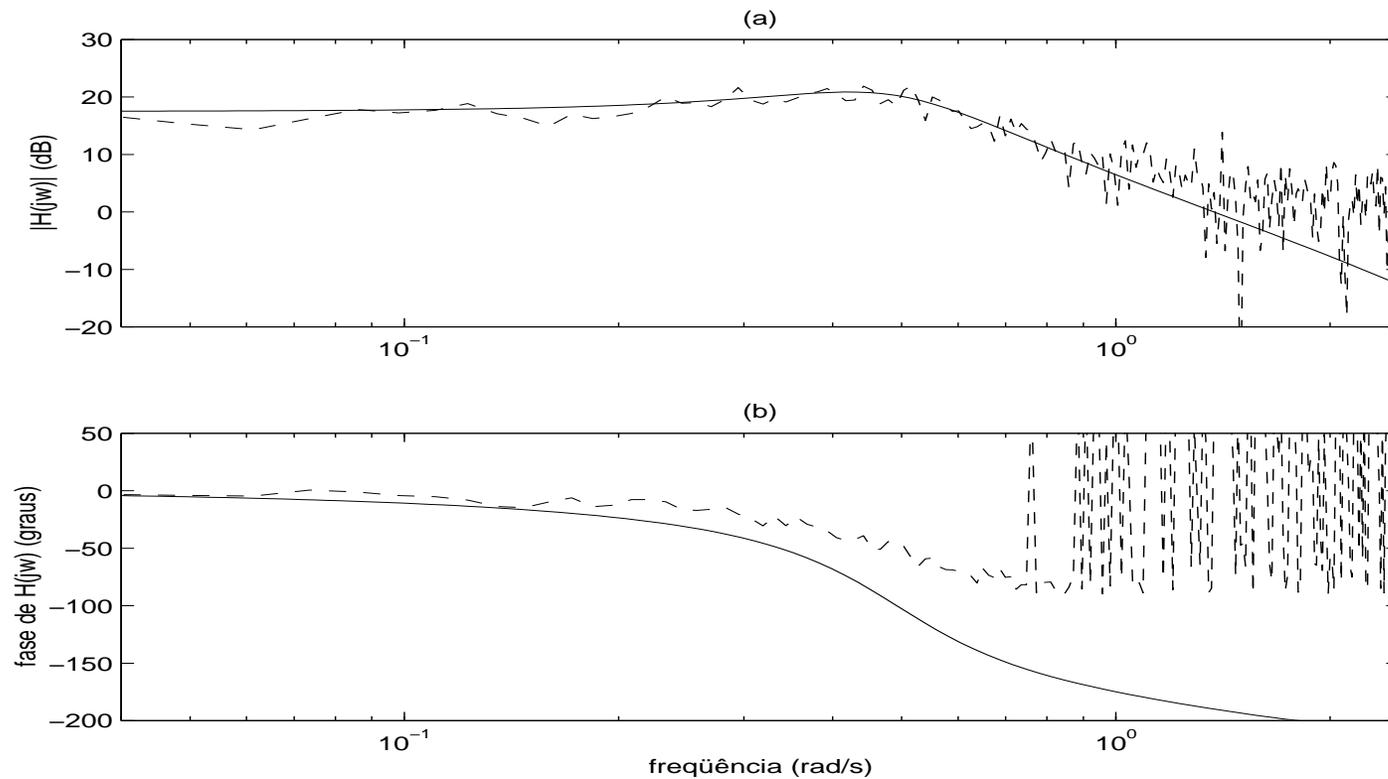
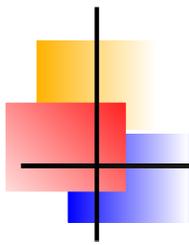
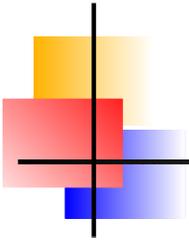


Figura 17: Respostas em frequência “real” e estimada. (a) ganho, e (b) fase das respostas em frequência do sistema original (traço contínuo) e estimada a partir de $R_{uy}(j\omega)$ e $R_{uu}(j\omega)$ (tracejado).



Persistência de Excitação

Definição 0.1 Um sinal $u(k)$ é *persistentemente excitante* de ordem n se os limites

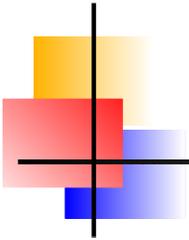
$$\bar{u} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k),$$

$$r_{uu}(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u(i) - \bar{u})(u(i+k) - \bar{u})$$

existirem e se a matriz

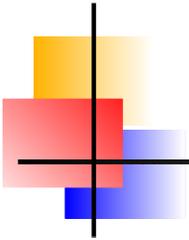
$$R_{uu}^n = [r_{uu}(i-j)]_{ij}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$$

for não singular.



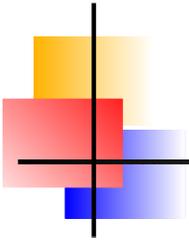
Persistência de excitação de sinais

- ▶ Seja $u(k)$ um pulso, $u(k) = 1, k = 0$ e $u(k) = 0, \forall k \neq 0$. Isso resulta em $R_{uu}^n = 0$. Ou seja, um pulso não é persistentemente excitante de nenhuma ordem.



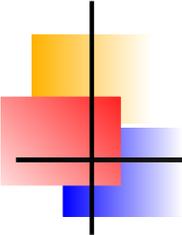
Persistência de excitação de sinais

- ▶ Seja $u(k)$ um pulso, $u(k) = 1, k = 0$ e $u(k) = 0, \forall k \neq 0$. Isso resulta em $R_{uu}^n = 0$. Ou seja, um pulso não é persistentemente excitante de nenhuma ordem.
- ▶ Se $u(k)$ for um degrau de amplitude a , então $r_{uu}(k) = a^2$ e R_{uu}^n só não será singular para $n = 1$. Ou seja, o degrau é um sinal persistentemente excitante de ordem 1. Assim sendo, em regime permanente, a resposta ao degrau de um sistema só serve para estimar um parâmetro, o ganho estático.



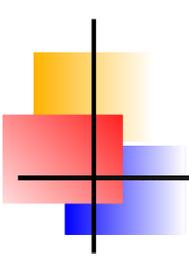
Persistência de excitação de sinais

- ▶ Seja $u(k)$ um pulso, $u(k) = 1, k = 0$ e $u(k) = 0, \forall k \neq 0$. Isso resulta em $R_{uu}^n = 0$. Ou seja, um pulso não é persistentemente excitante de nenhuma ordem.
- ▶ Se $u(k)$ for um degrau de amplitude a , então $r_{uu}(k) = a^2$ e R_{uu}^n só não será singular para $n = 1$. Ou seja, o degrau é um sinal persistentemente excitante de ordem 1. Assim sendo, em regime permanente, a resposta ao degrau de um sistema só serve para estimar um parâmetro, o ganho estático.
- ▶ Se $\nu(k)$ for ruído branco com variância σ^2 , então $r_{\nu\nu}(k) = \sigma^2 \delta$, sendo δ a função delta de Dirac. Portanto, a matriz $R_{\nu\nu}^n = \sigma^2 I_n$ é não singular para qualquer valor de n . Conseqüentemente, o ruído branco é persistentemente excitante de todas as ordens.

- 
-
- ▶ Se $\nu(k)$ for ruído branco, e o sinal $u(k)$ for obtido filtrando-se $\nu(k)$ com um filtro de média móvel $F(q)$, então o sinal

$$u(k) = \nu(k) + f_1\nu(k-1) + \dots + f_p\nu(k-p)$$

também será persistentemente excitante de qualquer ordem. Para ver isso, basta notar que o espectro $\Phi_\nu(\omega)$ é plano e que o filtro $F(q)$ só pode ter p valores nulos no seu espectro. Conseqüentemente, o espectro de $u(k)$, $\Phi_u(\omega) = |F(e^{j\omega})|^2 \Phi_\nu(\omega)$ ainda tem infinitos valores não nulos.



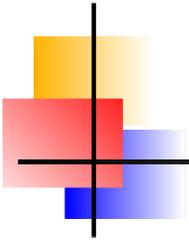
Complementos - Definição de PE no domínio da frequência

Um sinal $u(k)$ com espectro $\Phi_u(\omega)$ é *persistentemente excitante* de ordem n se para todos os filtros do tipo

$$M_n(q) = m_1q^{-1} + \dots + m_nq^{-n}$$

a relação $|M_n(e^{j\omega})|^2 \Phi_u(\omega) \equiv 0$

implica que $|M_n(e^{j\omega})|^2 \equiv 0$.

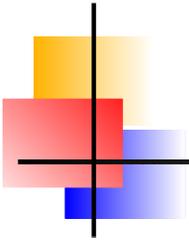


Complementos - O método de Levy

- ▶ O método a ser descrito neste complemento foi originalmente proposto por Levy (1959). O objetivo é determinar os coeficientes de um modelo

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_p s^p}{1 + a_1s + \dots + a_n s^n},$$

de forma que a sua resposta em frequência se aproxime de uma resposta em frequência, estimada a partir de procedimentos experimentais, $\hat{H}(j\omega)$.



Complementos - O método de Levy

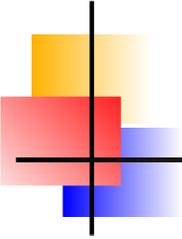
- ▶ O método a ser descrito neste complemento foi originalmente proposto por Levy (1959). O objetivo é determinar os coeficientes de um modelo

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_p s^p}{1 + a_1s + \dots + a_n s^n},$$

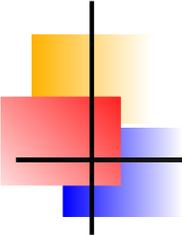
de forma que a sua resposta em freqüência se aproxime de uma resposta em freqüência, estimada a partir de procedimentos experimentais, $\hat{H}(j\omega)$.

- ▶ O erro do modelo no domínio da freqüência é

$$\epsilon(j\omega) = \hat{H}(j\omega) - H(j\omega) = \hat{H}(j\omega) - \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}.$$

- 
-
- ▶ Uma solução alternativa é conseguida fazendo-se

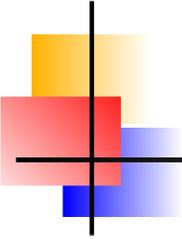
$$\begin{aligned}D(j\omega)\epsilon(j\omega) &= D(j\omega)\hat{H}(j\omega) - N(j\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) \\|D(j\omega)\epsilon(j\omega)| &= |\alpha(\omega) + j\beta(\omega)| = \sqrt{\alpha(\omega)^2 + \beta(\omega)^2} \\|D(j\omega)\epsilon(j\omega)|^2 &= \alpha(\omega)^2 + \beta(\omega)^2.\end{aligned}$$

- 
- ▶ Uma solução alternativa é conseguida fazendo-se

$$\begin{aligned}D(j\omega)\epsilon(j\omega) &= D(j\omega)\hat{H}(j\omega) - N(j\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) \\|D(j\omega)\epsilon(j\omega)| &= |\alpha(\omega) + j\beta(\omega)| = \sqrt{\alpha(\omega)^2 + \beta(\omega)^2} \\|D(j\omega)\epsilon(j\omega)|^2 &= \alpha(\omega)^2 + \beta(\omega)^2.\end{aligned}$$

- ▶ Tomando-se a resposta em frequência conhecida $\hat{H}(j\omega)$ em N_f frequências distintas, pode-se definir a seguinte função custo:

$$J_L = \sum_{i=1}^{N_f} [\alpha(\omega_i)^2 + \beta(\omega_i)^2].$$

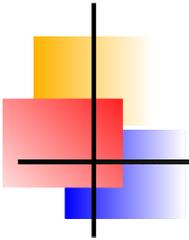
- 
- ▶ Uma solução alternativa é conseguida fazendo-se

$$\begin{aligned}D(j\omega)\epsilon(j\omega) &= D(j\omega)\hat{H}(j\omega) - N(j\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) \\|D(j\omega)\epsilon(j\omega)| &= |\alpha(\omega) + j\beta(\omega)| = \sqrt{\alpha(\omega)^2 + \beta(\omega)^2} \\|D(j\omega)\epsilon(j\omega)|^2 &= \alpha(\omega)^2 + \beta(\omega)^2.\end{aligned}$$

- ▶ Tomando-se a resposta em frequência conhecida $\hat{H}(j\omega)$ em N_f frequências distintas, pode-se definir a seguinte função custo:

$$J_L = \sum_{i=1}^{N_f} [\alpha(\omega_i)^2 + \beta(\omega_i)^2].$$

- ▶ Os coeficientes de $H(s)$ podem ser facilmente determinados, usando-se técnicas convencionais, minimizando-se J_L .



Exemplo - O método de Levy

O objetivo é obter um modelo paramétrico, $H(s)$, a partir da resposta em frequência, $\hat{H}(j\omega)$, estimada usando os dados coletados em teste realizado numa planta piloto de bombeamento de água. Os modelos determinados pelo método de Levy são

$$H_1(s) = \frac{0,24144}{175,81s + 1},$$

$$H_2(s) = \frac{30,9165s + 0,19532}{2,8525 \times 10^4 s^2 + 243,24s + 1}.$$

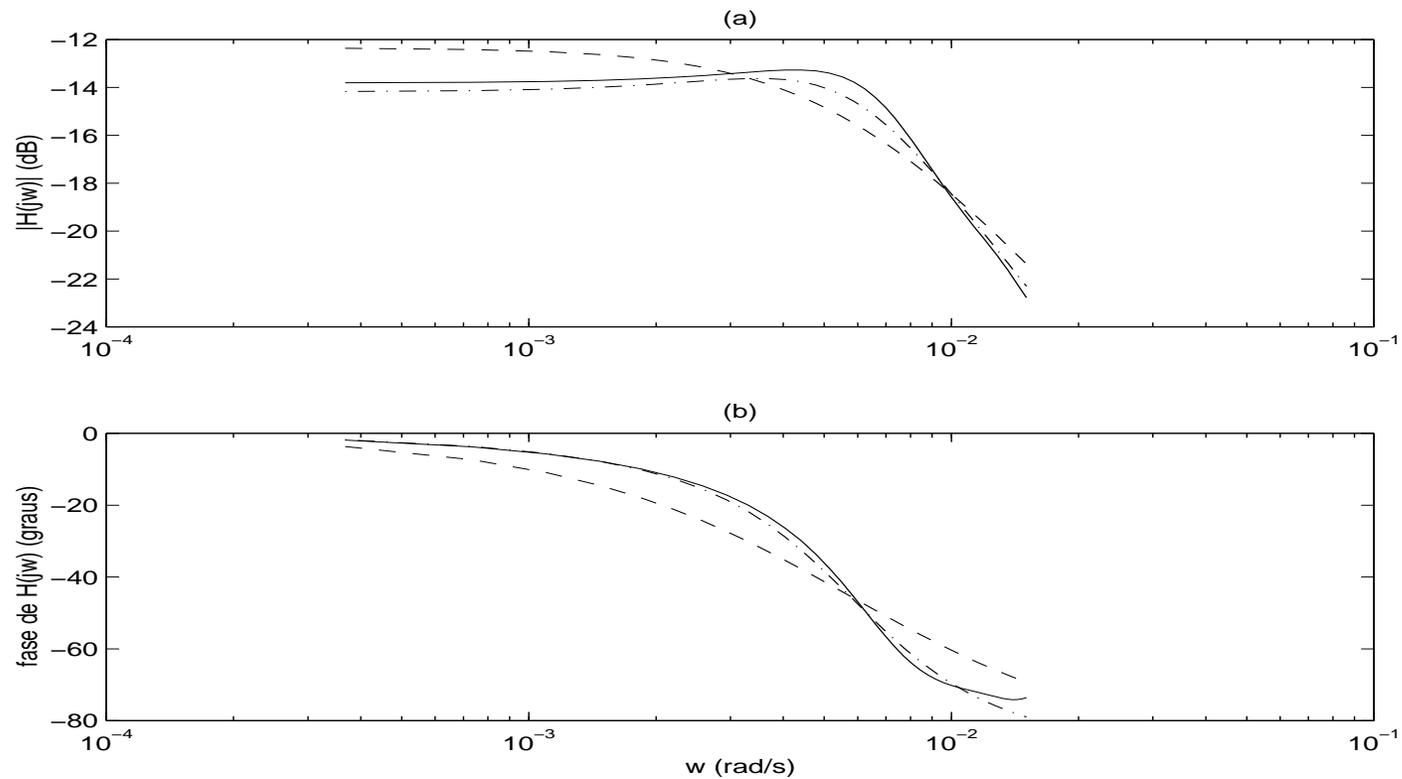
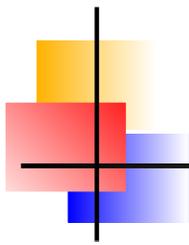


Figura 18: Resposta em freqüência estimada e de modelos: $\hat{H}(j\omega)$, e respostas em freqüência dos modelos obtidos usando o método de Levy. (—) $\hat{H}(j\omega)$, (- -) $H_1(j\omega)$ e (-.-) $H_2(j\omega)$. (a) ganho, e (b) fase (pulso).