Capítulo 7 - Estimadores Não Polarizados

Eduardo Mendes

emmendes@cpdee.ufmg.br

Departamento de Engenharia Eletrônica
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte, MG, Brasil

Introdução

Neste capítulo serão apresentados três estimadores que contornam o problema de polarização na situação descrita acima:

- o estimador estendido de mínimos quadrados (EMQ),

Introdução

Neste capítulo serão apresentados três estimadores que contornam o problema de polarização na situação descrita acima:

- o estimador estendido de mínimos quadrados (EMQ),
- o estimador generalizado de mínimos quadrados (GMQ)

Introdução

Neste capítulo serão apresentados três estimadores que contornam o problema de polarização na situação descrita acima:

- o estimador estendido de mínimos quadrados (EMQ),
- o estimador generalizado de mínimos quadrados (GMQ)
- e o estimador das variáveis instrumentais (VI).

Introdução

Neste capítulo serão apresentados três estimadores que contornam o problema de polarização na situação descrita acima:

- o estimador estendido de mínimos quadrados (EMQ),
- o estimador generalizado de mínimos quadrados (GMQ)
- e o estimador das variáveis instrumentais (VI).

Tais algoritmos serão denominados *estimadores não polarizados*.

Introdução

Neste capítulo serão apresentados três estimadores que contornam o problema de polarização na situação descrita acima:

- o estimador estendido de mínimos quadrados (EMQ),
- o estimador generalizado de mínimos quadrados (GMQ)
- e o estimador das variáveis instrumentais (VI).

Tais algoritmos serão denominados *estimadores não polarizados*.

Uma forma de evitar a polarização (usada pelos estimadores EMQ e GMQ) é transformar a equação matricial $\mathbf{y} = \Psi\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}$ em

$$\mathbf{y}^* = \Psi^*\boldsymbol{\theta}^* + \mathbf{e}^*,$$

sendo $\mathbf{e}^*$ branco de forma que $\mathrm{E}[A^*\mathbf{e}^*] = 0$ e $A^*\Psi^* = I$.

O Estimador Estendido de MQ

Polarização devida a ruído MA — análise

- Seja o modelo ARX:

$$
\begin{aligned}
y(k) &= ay(k-1) + bu(k-1) + e(k), \\
e(k) &= c\nu(k-1) + \nu(k),
\end{aligned}
$$

e $\nu(k)$ é ruído branco.

O Estimador Estendido de MQ

Polarização devida a ruído MA — análise

- Seja o modelo ARX:

$$\begin{aligned} y(k) &= ay(k-1) + bu(k-1) + e(k), \\ e(k) &= c\nu(k-1) + \nu(k), \end{aligned}$$

  e $\nu(k)$ é ruído branco.

- Fazendo-se substituições, tem-se

$$\begin{aligned} y(k) &= ay(k-1) + bu(k-1) + c\nu(k-1) + \nu(k), \\ y(k-1) &= ay(k-2) + bu(k-2) + c\nu(k-2) + \nu(k-1). \end{aligned}$$

- Finalmente, chega-se a

$$
\begin{aligned}
y(k) \quad &= \quad a[ay(k-2) + bu(k-2) + c\nu(k-2) + \underline{\nu(k-1)}] \\
&\quad\; +bu(k-1) + c\underline{\nu(k-1)} + \nu(k),
\end{aligned}
$$

que está na forma $y(k) = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(k-1)\boldsymbol{\theta} + e(k)$, sendo

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(k-1) \quad &= \quad \left[\left(a\,y(k-2) + b\,u(k-2) + c\,\nu(k-2) + \underline{\nu(k-1)}\right) \quad u(k-1)\right] \\
\boldsymbol{\theta} \quad &= \quad [a\ b]^{\mathrm{T}} \\
e(k) \quad &= \quad c\underline{\nu(k-1)} + \nu(k).
\end{aligned}
$$

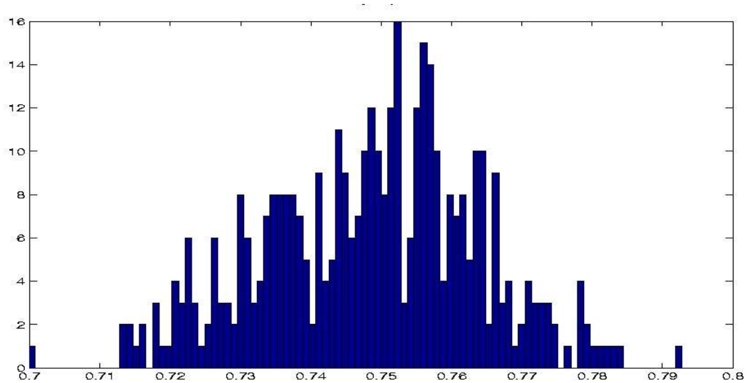
Polarização devida a ruído MA — simulação

Os dados serão gerados pelo seguinte modelo:

$$\begin{aligned} y(k) &= ay(k-1) + bu(k-1) + e(k), \\ e(k) &= 0,8\nu(k-1) + \nu(k), \end{aligned}$$

sendo que $\nu(k)$ e $u(k)$ são independentes, brancos e gaussianos com $\sigma_\nu^2 = 0,04$ e $\sigma_u^2 = 1$.

(a)



(b)

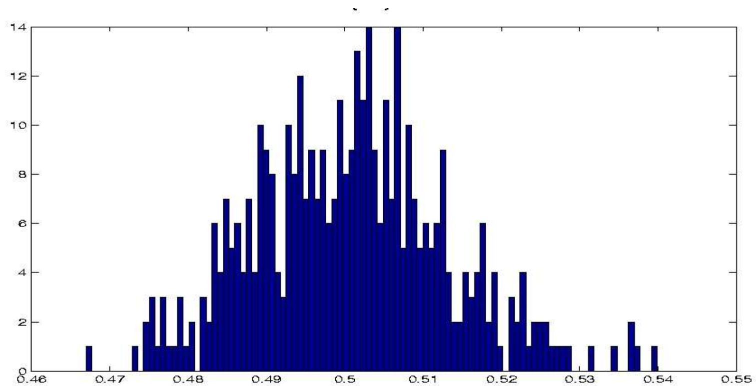


Figura 1: Polarização em modelos ARX. Os valores reais dos parâmetros são (a) $a = 0,7$ e (b) $b = 0,5$

Eliminando polarização com o estimador EMQ — análise

A equação matricial gerada por

$$\begin{aligned} y(k) &= a[ay(k-2) + bu(k-2) + c\nu(k-2) + \underline{\nu(k-1)}] \\ &\quad + bu(k-1) + c\underline{\nu(k-1)} + \nu(k), \end{aligned}$$

pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [y(k-1)] & u(k-1) & \nu(k-1) \\ [y(k)] & u(k) & \nu(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [y(k+N-2)] & u(k+N-2) & \nu(k+N-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \nu(k) \\ \nu(k+1) \\ \vdots \\ \nu(k+N-1) \end{bmatrix}$$

- Logo, pode-se escrever

$$\mathbf{y}^* = \Psi^* \boldsymbol{\theta}^* + \mathbf{e}^*,$$

sendo que $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}$, $\mathbf{e}^* = [\nu(k) \ \ldots \ \nu(k+N-1)]^{\mathrm{T}}$,

- Logo, pode-se escrever

$$\mathbf{y}^* \quad = \quad \Psi^* \boldsymbol{\theta}^* + \mathbf{e}^*,$$

sendo que $\mathbf{y}^* = \mathbf{y}$, $\mathbf{e}^* = [\nu(k) \;\; \ldots \;\; \nu(k+N-1)]^{\mathrm{T}}$,

- A matrix estendida de regressores é:

$$\Psi^* = \begin{bmatrix} & \vdots & \nu(k-1) \\ & \vdots & \nu(k) \\ \Psi & \vdots & \nu(k+1) \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \nu(k+N-2) \end{bmatrix}$$

e $\boldsymbol{\theta}^* = [\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}} \,\vdots\, c]^{\mathrm{T}}$.

- Deve ser notado que $e^*(k)$ é uma variável aleatória "branca", ou seja,

$$r_{e^* e^*}(k) = 0, \quad \forall k \neq 0,$$

e conseqüentemente $\mathrm{E}[\Psi \mathbf{e}^*] = \mathbf{0}$, $\mathrm{E}[A^* \mathbf{e}^*] = \mathbf{0}$ e $\mathrm{E}[\Psi^* \mathbf{e}^*] = \mathbf{0}$.

- Deve ser notado que $e^*(k)$ é uma variável aleatória "branca", ou seja,

$$r_{e^* e^*}(k) = 0, \quad \forall k \neq 0,$$

  e conseqüentemente $\mathrm{E}[\Psi \mathbf{e}^*] = \mathbf{0}$, $\mathrm{E}[A^* \mathbf{e}^*] = \mathbf{0}$ e $\mathrm{E}[\Psi^* \mathbf{e}^*] = \mathbf{0}$.

- Logo, a estimativa

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = [\Psi^{*\mathrm{T}} \Psi^*]^{-1} \Psi^{*\mathrm{T}} \mathbf{y}$$

  não apresentará polarização, ou seja, $\mathrm{E}[\hat{\boldsymbol{\theta}}^*] = [\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}} \ c]^{\mathrm{T}}$.

Resíduos como estimativa do ruído

- Os dados serão gerados pelo seguinte modelo:

$$\begin{aligned} y(k) &= ay(k-1) + bu(k-1) + e(k), \\ e(k) &= 0,8\nu(k-1) + \nu(k), \end{aligned}$$

sendo que $\nu(k)$ e $u(k)$ são independentes, brancos e gaussianos com $\sigma_\nu^2 = 0,04$ e $\sigma_u^2 = 1$.

Resíduos como estimativa do ruído

- Os dados serão gerados pelo seguinte modelo:

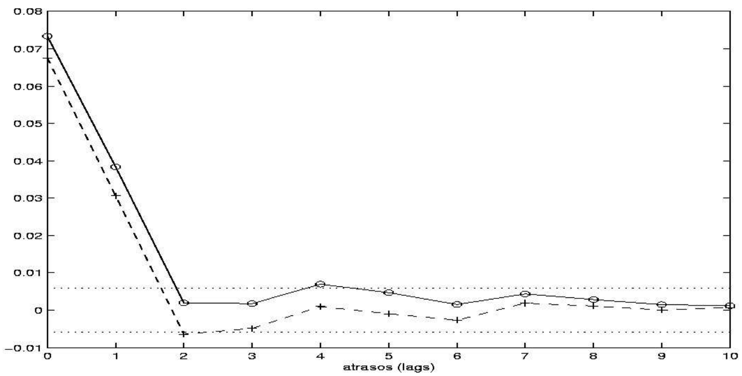
$$\begin{aligned} y(k) &= ay(k-1) + bu(k-1) + e(k), \\ e(k) &= 0{,}8\nu(k-1) + \nu(k), \end{aligned}$$

  sendo que $\nu(k)$ e $u(k)$ são independentes, brancos e gaussianos com $\sigma_\nu^2 = 0{,}04$ e $\sigma_u^2 = 1$.

- Usando-se a estrutura acima como equação de regressão, obtém-se um modelo do tipo

$$y(k) = \hat{a}y(k-1) + \hat{b}u(k-1) + \xi(k).$$

(a)



(b)

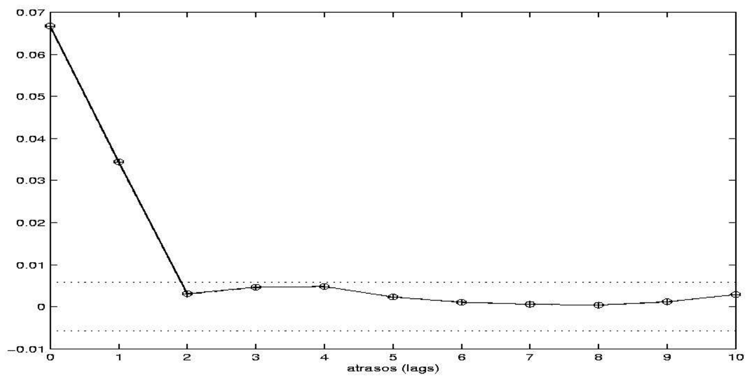


Figura 2: Funções de autocorrelação de: (∘) ruído MA e (+) resíduos $\xi(k)$. No gráfico superior os resíduos são de modelo polarizado. No gráfico inferior cruzes indicam a FAC do vetor de

- A figura mostra que

$$e(k) = 0,8\nu(k-1) + \nu(k) \approx \hat{c}_1\tilde{\xi}(k-1) + \hat{c}_2\tilde{\xi}(k-2) + \tilde{\xi}(k).$$

- A figura mostra que

$$e(k) = 0,8\nu(k-1) + \nu(k) \approx \hat{c}_1\tilde{\xi}(k-1) + \hat{c}_2\tilde{\xi}(k-2) + \tilde{\xi}(k).$$

- Assumindo-se que a parte modelável do vetor de erro foi devidamente modelada (isso será constatado verificando-se que a polarização é eliminada.

- A figura mostra que

$$e(k) = 0,8\nu(k-1) + \nu(k) \approx \hat{c}_1\tilde{\xi}(k-1) + \hat{c}_2\tilde{\xi}(k-2) + \tilde{\xi}(k).$$

- Assumindo-se que a parte modelável do vetor de erro foi devidamente modelada (isso será constatado verificando-se que a polarização é eliminada.
- ou seja, se for verificado que $0,8\nu(k-1) \approx \hat{c}_1\tilde{\xi}(k-1) + \hat{c}_2\tilde{\xi}(k-2)$, então $\tilde{\xi}(k) \approx \nu(k)$.

- A figura mostra que

$$e(k) = 0,8\nu(k-1) + \nu(k) \approx \hat{c}_1\tilde{\xi}(k-1) + \hat{c}_2\tilde{\xi}(k-2) + \tilde{\xi}(k).$$

- Assumindo-se que a parte modelável do vetor de erro foi devidamente modelada (isso será constatado verificando-se que a polarização é eliminada.
- ou seja, se for verificado que $0,8\nu(k-1) \approx \hat{c}_1\tilde{\xi}(k-1) + \hat{c}_2\tilde{\xi}(k-2)$, então $\tilde{\xi}(k) \approx \nu(k)$.
- Portanto, este exemplo verificou que, *após a convergência*, os resíduos podem ser utilizados como estimativa da nova variável regressora $\nu(k)$ que aparece em Ψ^*. É precisamente isso que é feito pelo estimador EMQ.

Mínimos Quadrados Estendido

- a partir da equação de regressão $y(k) = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(k-1)\boldsymbol{\theta} + e(k)$ e dos dados disponíveis, monte a equação matricial $\mathbf{y} = \Psi\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}$, como no método de mínimos quadrados, e determine $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MQ}} = [\Psi^{\mathrm{T}}\Psi]^{-1}\Psi^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$;

Mínimos Quadrados Estendido

- a partir da equação de regressão $y(k) = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(k-1)\boldsymbol{\theta} + e(k)$ e dos dados disponíveis, monte a equação matricial $\mathbf{y} = \Psi\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}$, como no método de mínimos quadrados, e determine $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MQ}} = [\Psi^{\mathrm{T}}\Psi]^{-1}\Psi^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$;
- calcule o vetor de resíduos $\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{y} - \Psi\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MQ}}$;

Mínimos Quadrados Estendido

- a partir da equação de regressão $y(k) = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(k-1)\boldsymbol{\theta} + e(k)$ e dos dados disponíveis, monte a equação matricial $\mathbf{y} = \Psi\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}$, como no método de mínimos quadrados, e determine $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MQ}} = [\Psi^{\mathrm{T}}\Psi]^{-1}\Psi^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$;
- calcule o vetor de resíduos $\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{y} - \Psi\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MQ}}$;
- faça $i = 2$ (i indica o número da iteração);

Mínimos Quadrados Estendido

- a partir da equação de regressão $y(k) = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(k-1)\boldsymbol{\theta} + e(k)$ e dos dados disponíveis, monte a equação matricial $\mathbf{y} = \Psi\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}$, como no método de mínimos quadrados, e determine $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MQ}} = [\Psi^{\mathrm{T}}\Psi]^{-1}\Psi^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$;
- calcule o vetor de resíduos $\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{y} - \Psi\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MQ}}$;
- faça $i = 2$ (i indica o número da iteração);
- com $\boldsymbol{\xi}_{i-1}$, monte a matriz estendida de regressores, Ψ_i^*, e estime $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*_{\mathrm{EMQ}\,i} = [\Psi_i^{*\mathrm{T}}\Psi_i^*]^{-1}\Psi_i^{*\mathrm{T}}\mathbf{y}$;

Mínimos Quadrados Estendido

- a partir da equação de regressão $y(k) = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(k-1)\boldsymbol{\theta} + e(k)$ e dos dados disponíveis, monte a equação matricial $\mathbf{y} = \Psi\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}$, como no método de mínimos quadrados, e determine $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MQ}} = [\Psi^{\mathrm{T}}\Psi]^{-1}\Psi^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$;
- calcule o vetor de resíduos $\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{y} - \Psi\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MQ}}$;
- faça $i = 2$ (i indica o número da iteração);
- com $\boldsymbol{\xi}_{i-1}$, monte a matriz estendida de regressores, Ψ_i^*, e estime $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*_{\mathrm{EMQ}\,i} = [\Psi_i^{*\mathrm{T}}\Psi_i^*]^{-1}\Psi_i^{*\mathrm{T}}\mathbf{y}$;
- determine o vetor de resíduos $\boldsymbol{\xi}_i = \mathbf{y} - \Psi_i^*\hat{\boldsymbol{\theta}}^*_{\mathrm{EMQ}\,i}$;

Mínimos Quadrados Estendido

- a partir da equação de regressão $y(k) = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(k-1)\boldsymbol{\theta} + e(k)$ e dos dados disponíveis, monte a equação matricial $\mathbf{y} = \Psi\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}$, como no método de mínimos quadrados, e determine $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MQ}} = [\Psi^{\mathrm{T}}\Psi]^{-1}\Psi^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$;
- calcule o vetor de resíduos $\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{y} - \Psi\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{MQ}}$;
- faça $i = 2$ (i indica o número da iteração);
- com $\boldsymbol{\xi}_{i-1}$, monte a matriz estendida de regressores, Ψ_i^*, e estime $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*_{\mathrm{EMQ}\,i} = [\Psi_i^{*\mathrm{T}}\Psi_i^*]^{-1}\Psi_i^{*\mathrm{T}}\mathbf{y}$;
- determine o vetor de resíduos $\boldsymbol{\xi}_i = \mathbf{y} - \Psi_i^*\hat{\boldsymbol{\theta}}^*_{\mathrm{EMQ}\,i}$;
- faça $i = i + 1$ e volte ao passo 4. Repita até convergir.

$$\begin{aligned}\nu(k) &= y(k) - ay(k-1) - bu(k-1) - c\nu(k-1) \\ &= y(k) - \boldsymbol{\psi}^{*\mathrm{T}}(k-1,\boldsymbol{\theta}^*)\boldsymbol{\theta}^*.\end{aligned}$$

Modelos com esta propriedade são às vezes chamados de modelos *pseudolineares*.

Eliminando polarização com o estimador EMQ — simulação

- Os dados serão gerados pelo seguinte modelo:

$$\begin{aligned} y(k) &= ay(k-1) + bu(k-1) + e(k), \\ e(k) &= 0,8\nu(k-1) + \nu(k), \end{aligned}$$

sendo que $\nu(k)$ e $u(k)$ são independentes, brancos e gaussianos com $\sigma_\nu^2 = 0,04$ e $\sigma_u^2 = 1$.

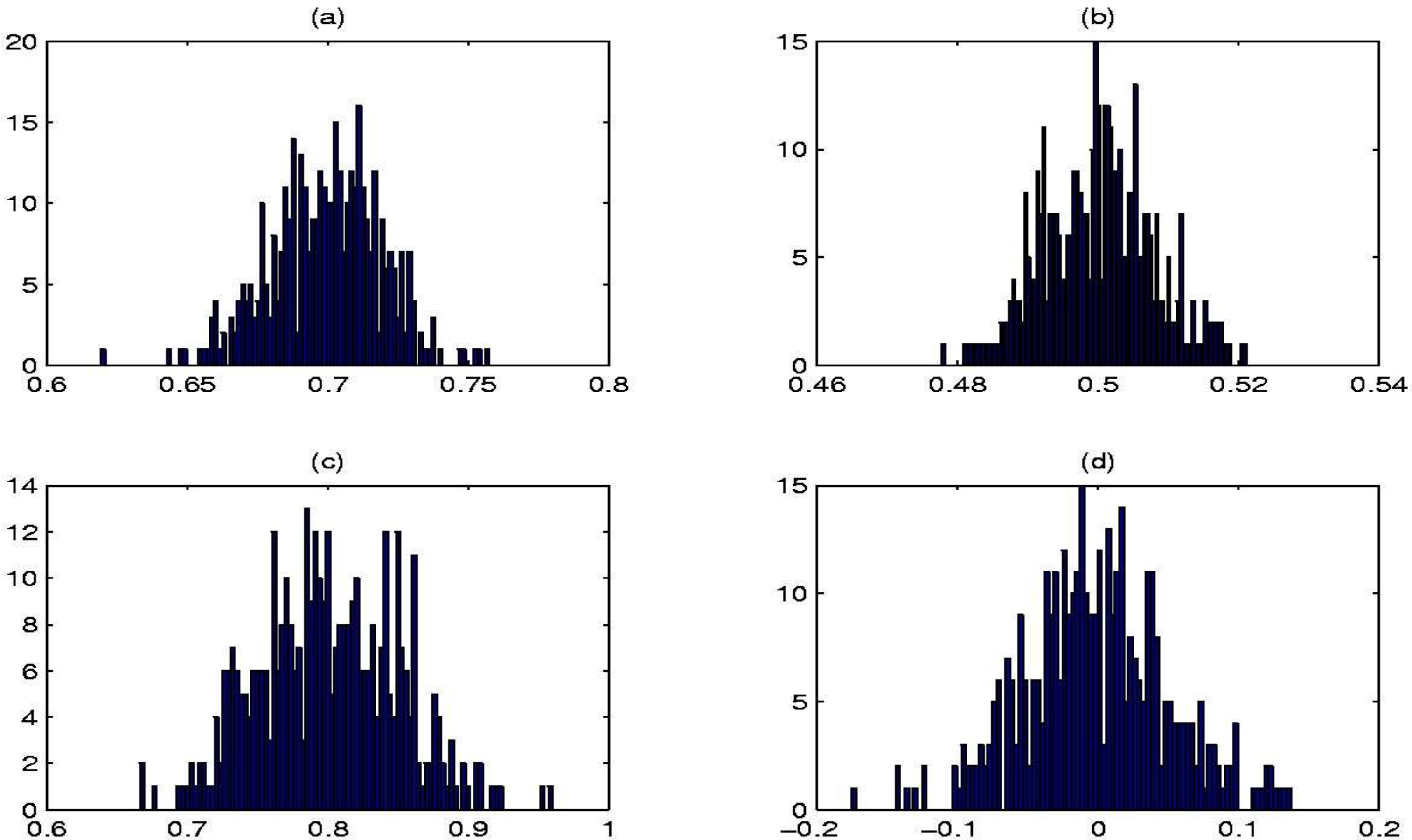


Figura 3: Eliminando polarização com o estimador EMQ. Os valores reais dos parâmetros são: (a) $a = 0,7$; (b) $b = 0,5$; (c) $c_1 = c = 0,8$ e (d) $c_2 = 0$.

Estimador EMQ com modelo de erro na saída

- Seja o modelo de erro na saída

$$F(q)y(k) = B(q)u(k) + F(q)\nu(k),$$

que está representada na forma de um modelo ARMAX, com $A(q) = F(q)$ e $C(q) = F(q)$.

Estimador EMQ com modelo de erro na saída

- Seja o modelo de erro na saída

$$F(q)y(k) = B(q)u(k) + F(q)\nu(k),$$

que está representada na forma de um modelo ARMAX, com $A(q) = F(q)$ e $C(q) = F(q)$.

- Assim, para gerar os dados usou-se

$$\begin{aligned} w(k) &= 1,5w(k-1) - 0,7w(k-2) + 0,5u(k-1) \\ y(k) &= w(k) + \nu(k), \end{aligned}$$

sendo que $u(k)$ e $\nu(k)$ são sinais aleatórios com distribuição normal, média nula e variâncias $\sigma_u^2 = 1$ e $\sigma_\nu^2 = 0,04$.

- A equação de regressão foi

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + C(q)\nu(k).$$

Constata-se que $\mathrm{E}[\hat{A}(q)] \approx \mathrm{E}[\hat{C}(q)] \approx \mathrm{E}[F(q)]$.

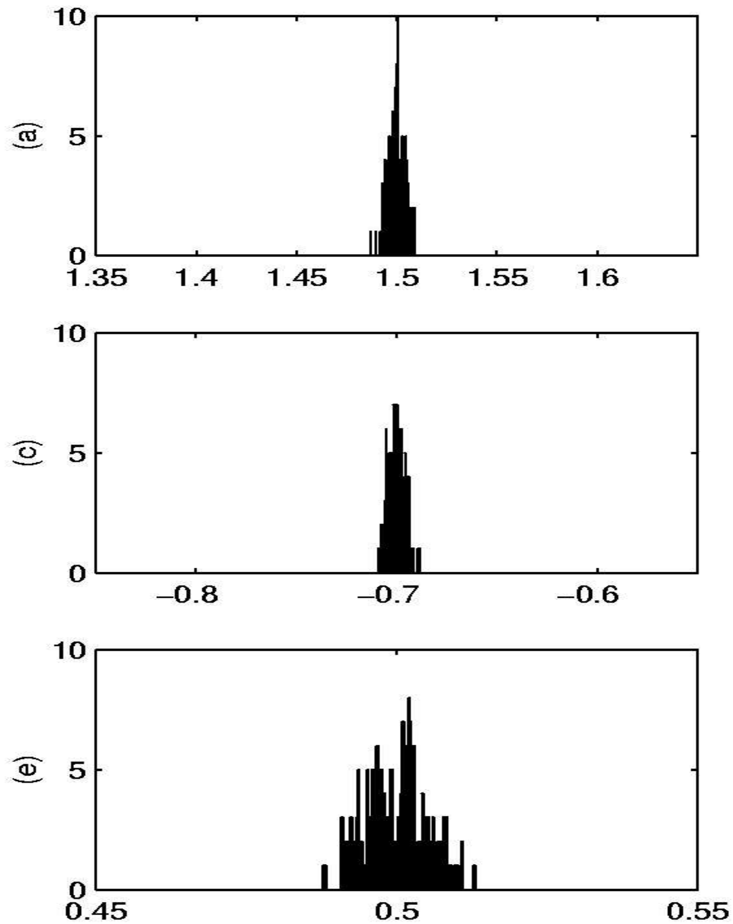


Figura 4: Estimador EMQ com modelo de erro na saída. Parâmetros estimados usando-se o estimador EMQ e um modelo ARMAX. Os dados foram gerados por um modelo de erro na saída. Os valores reais dos parâmetros são: (a,b) $a_1 = c_1 = 1,5$;

O Estimador Generalizado de MQ

- Uma outra maneira de eliminar a polarização é filtrar o vetor de erro original de forma que $\mathbf{e}^* = Q\mathbf{e}$ seja branco. Portanto,

$$
\begin{aligned}
Q\mathbf{y} &= Q(\Psi\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}) \\
Q\mathbf{y} &= Q\Psi\boldsymbol{\theta} + Q\mathbf{e} \\
\mathbf{y}^* &= \Psi^*\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}^*.
\end{aligned}
$$

O Estimador Generalizado de MQ

- Uma outra maneira de eliminar a polarização é filtrar o vetor de erro original de forma que $\mathbf{e}^* = Q\mathbf{e}$ seja branco. Portanto,

$$Q\mathbf{y} = Q(\Psi\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e})$$
$$Q\mathbf{y} = Q\Psi\boldsymbol{\theta} + Q\mathbf{e}$$
$$\mathbf{y}^* = \Psi^*\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}^*.$$

- Seja $R = \mathrm{cov}[\mathbf{e}]$ a matriz de covariância do ruído da equação de regressão. Portanto, $\mathrm{cov}[\mathbf{e}^*] = \mathrm{cov}[Q\mathbf{e}] = Q\mathrm{cov}[\mathbf{e}]Q^{\mathrm{T}} = Q\,R\,Q^{\mathrm{T}}$. Também, $\mathrm{cov}[\mathbf{e}^*] = Q\,R\,Q^{\mathrm{T}} = \sigma_e^2 I$ e, portanto,

$$R = Q^{-1}\sigma_e^2 Q^{-\mathrm{T}} \quad \mathrm{e} \quad R^{-1} = \frac{Q^{\mathrm{T}}Q}{\sigma_e^2},$$

sendo que foi utilizada a propriedade $(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$.

- A estimativa de mínimos quadrados de $\boldsymbol{\theta}$ a partir das grandezas filtradas Ψ^* e $\mathbf{y}^*$ é

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{GMQ}} &= \left[\Psi^{*\mathrm{T}}\Psi^*\right]^{-1}\Psi^{*\mathrm{T}}\mathbf{y}^* \\
&= \left[(Q\Psi)^{\mathrm{T}}(Q\Psi)\right]^{-1}(Q\Psi)^{\mathrm{T}}Q\mathbf{y} \\
&= \left[\Psi^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}Q\Psi\right]^{-1}\Psi^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}Q\mathbf{y} \\
&= \left[\Psi^{\mathrm{T}}\sigma_e^2R^{-1}\Psi\right]^{-1}\Psi^{\mathrm{T}}\sigma_e^2R^{-1}\mathbf{y} \\
&= \left[\Psi^{\mathrm{T}}R^{-1}\Psi\right]^{-1}\Psi^{\mathrm{T}}R^{-1}\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

O estimador de Markov

- Os dados serão gerados pelo seguinte modelo:

$$\begin{aligned} y(k) &= ay(k-1) + bu(k-1) + e(k), \\ e(k) &= 0,8\nu(k-1) + \nu(k), \end{aligned}$$

sendo que $\nu(k)$ e $u(k)$ são independentes, brancos e gaussianos com $\sigma_\nu^2 = 0,04$ e $\sigma_u^2 = 1$.

O estimador de Markov

- Os dados serão gerados pelo seguinte modelo:

$$\begin{aligned} y(k) &= ay(k-1) + bu(k-1) + e(k), \\ e(k) &= 0,8\nu(k-1) + \nu(k), \end{aligned}$$

  sendo que $\nu(k)$ e $u(k)$ são independentes, brancos e gaussianos com $\sigma_\nu^2 = 0,04$ e $\sigma_u^2 = 1$.

- Será usada a seguinte matriz de covariância do erro na equação de regressão

$$R = \sigma_\nu^2 \begin{bmatrix} 1+c_1^2 & c_1 & & & \\ c_1 & 1+c_1^2 & c_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & c_1 \\ & & & c_1 & 1+c_1^2 \end{bmatrix}.$$

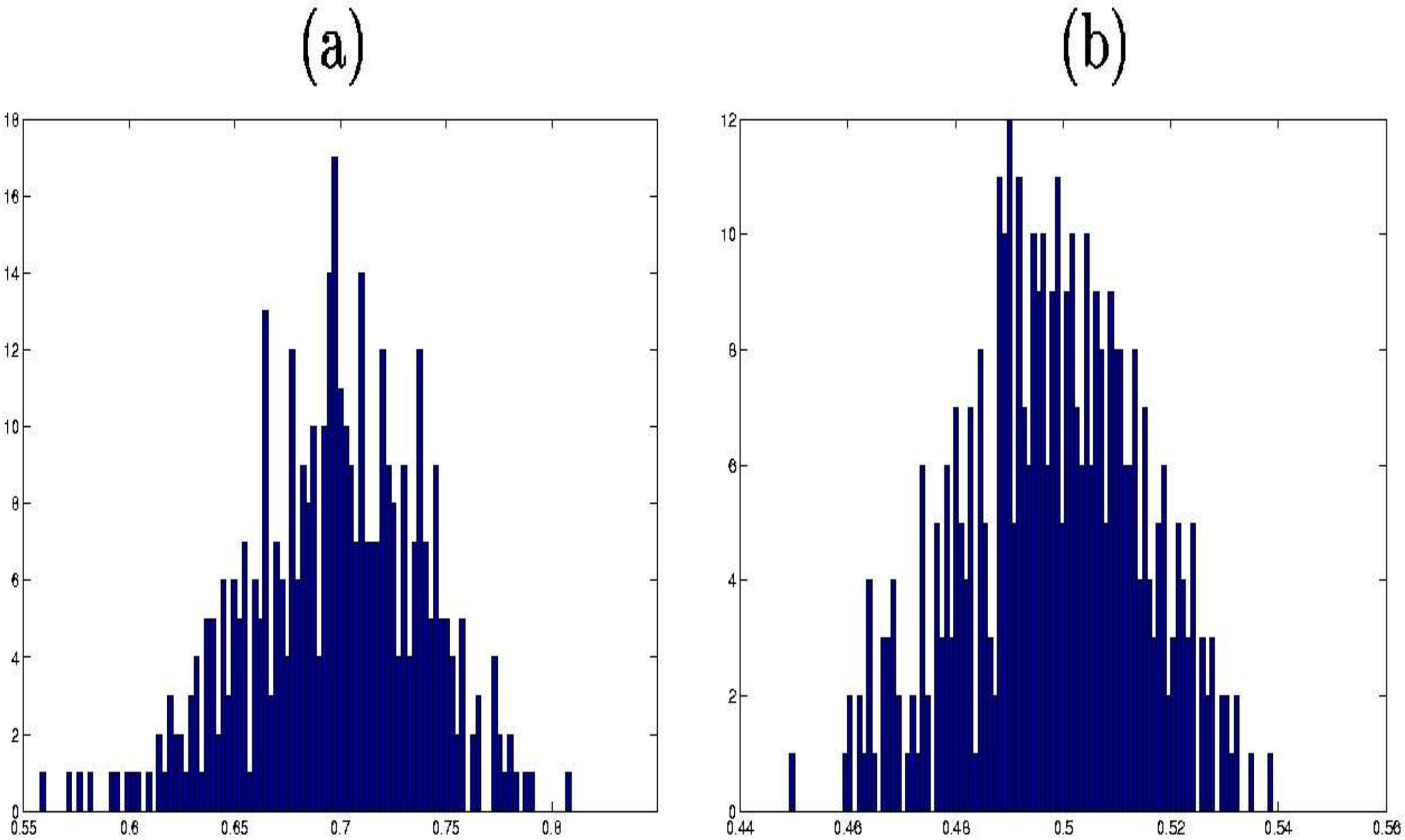


Figura 5: Estimador de Markov Os valores reais dos parâmetros são (a) $a = 0,7$ e (b) $b = 0,5$.

O Estimador GMQ Iterativo

- O modelo será representado na seguinte forma:

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}\nu(k),$$

sendo que A, B, C e D são polinômios em q^{-1} e $\nu(k)$ é ruído branco.

O Estimador GMQ Iterativo

- O modelo será representado na seguinte forma:

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}\nu(k),$$

  sendo que A, B, C e D são polinômios em q^{-1} e $\nu(k)$ é ruído branco.

- Tomando $C = 1$ e omitindo os argumentos, tem-se

$$Ay(k) = Bu(k) + \frac{A}{D}\nu(k).$$

O Estimador GMQ Iterativo

- O modelo será representado na seguinte forma:

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}\nu(k),$$

sendo que A, B, C e D são polinômios em q^{-1} e $\nu(k)$ é ruído branco.

- Tomando $C = 1$ e omitindo os argumentos, tem-se

$$Ay(k) = Bu(k) + \frac{A}{D}\nu(k).$$

- Substituindo-se $D = AD'$ na última equação, tem-se

$$Ay(k) = Bu(k) + \frac{1}{D'}\nu(k),$$

sendo que o erro $e(k) = \nu(k)/D'$ não será branco, a menos que $D' = 1$.

- Supondo que D' seja conhecido. Nesse caso tem-se

$$
\begin{aligned}
y^*(k) &= D'y(k) \\
u^*(k) &= D'u(k).
\end{aligned}
$$

- Supondo que D' seja conhecido. Nesse caso tem-se

$$\begin{aligned} y^*(k) &= D'y(k) \\ u^*(k) &= D'u(k). \end{aligned}$$

- Multiplicando-se por D' tem-se

$$\begin{aligned} AD'y(k) &= BD'u(k) + \nu(k) \\ Ay^*(k) &= Bu^*(k) + \nu(k). \end{aligned}$$

O estimador GMQ iterativo

1. Usando o estimador MQ, estime $\hat{A}_i$ e $\hat{B}_i$ com $y^*_{i-1}(k)$ e $u^*_{i-1}(k)$;

O estimador GMQ iterativo

1. Usando o estimador MQ, estime $\hat{A}_i$ e $\hat{B}_i$ com $y^*_{i-1}(k)$ e $u^*_{i-1}(k)$;
2. determine os resíduos fazendo $\xi_i(k) = \hat{A}_i y(k) - \hat{B}_i u(k)$;

O estimador GMQ iterativo

1. Usando o estimador MQ, estime $\hat{A}_i$ e $\hat{B}_i$ com $y^*_{i-1}(k)$ e $u^*_{i-1}(k)$;
2. determine os resíduos fazendo $\xi_i(k) = \hat{A}_i y(k) - \hat{B}_i u(k)$;
3. ajuste um modelo auto-regressivo usando o estimador MQ para a seqüência de resíduos, ou seja, $\xi_i(k) = -\hat{D}'_i(q)\xi_i(k) + \nu_i(k)$. Aqui, $\hat{D}'_i(q)$ é o filtro descorrelacionador de ruído a ser utilizado na iteração i;

O estimador GMQ iterativo

1. Usando o estimador MQ, estime $\hat{A}_i$ e $\hat{B}_i$ com $y^*_{i-1}(k)$ e $u^*_{i-1}(k)$;
2. determine os resíduos fazendo $\xi_i(k) = \hat{A}_i y(k) - \hat{B}_i u(k)$;
3. ajuste um modelo auto-regressivo usando o estimador MQ para a seqüência de resíduos, ou seja, $\xi_i(k) = -\hat{D'}_i(q)\xi_i(k) + \nu_i(k)$. Aqui, $\hat{D'}_i(q)$ é o filtro descorrelacionador de ruído a ser utilizado na iteração i;
4. atualize as séries filtradas $y^*_i(k) = \hat{D'}_i(q)y(k)$ e $u^*_i(k) = \hat{D'}_i(q)u(k)$. Incremente i e volte ao passo 1 até observar convergência.

O estimador GMQ com ruído MA e AR

- Os dados serão gerados pelo seguinte modelo:

$$\begin{aligned} y(k) &= ay(k-1) + bu(k-1) + e(k), \\ e(k) &= 0,8\nu(k-1) + \nu(k), \end{aligned}$$

sendo que $\nu(k)$ e $u(k)$ são independentes, brancos e gaussianos com $\sigma_\nu^2 = 0,04$ e $\sigma_u^2 = 1$.

O estimador GMQ com ruído MA e AR

- Os dados serão gerados pelo seguinte modelo:

$$\begin{aligned} y(k) &= ay(k-1) + bu(k-1) + e(k), \\ e(k) &= 0,8\nu(k-1) + \nu(k), \end{aligned}$$

  sendo que $\nu(k)$ e $u(k)$ são independentes, brancos e gaussianos com $\sigma_\nu^2 = 0,04$ e $\sigma_u^2 = 1$.
- O estimador GMQ foi empregado para obter $\hat{a}$ e $\hat{b}$ em 400 realizações diferentes do ruído $\nu(k)$ $(N = 500)$.

O estimador GMQ com ruído MA e AR

- Os dados serão gerados pelo seguinte modelo:

$$
\begin{aligned}
y(k) &= ay(k-1) + bu(k-1) + e(k), \\
e(k) &= 0,8\nu(k-1) + \nu(k),
\end{aligned}
$$

  sendo que $\nu(k)$ e $u(k)$ são independentes, brancos e gaussianos com $\sigma_\nu^2 = 0,04$ e $\sigma_u^2 = 1$.

- O estimador GMQ foi empregado para obter $\hat{a}$ e $\hat{b}$ em 400 realizações diferentes do ruído $\nu(k)$ $(N = 500)$.

Neste exemplo o ruído será tanto um processo MA quanto um processo AR. Na formulação usada do estimador GMQ iterativo, o ruído é sempre modelado (parametrizado) como um processo AR. O presente exemplo ilustra o desempenho desse estimador em ambos os casos.

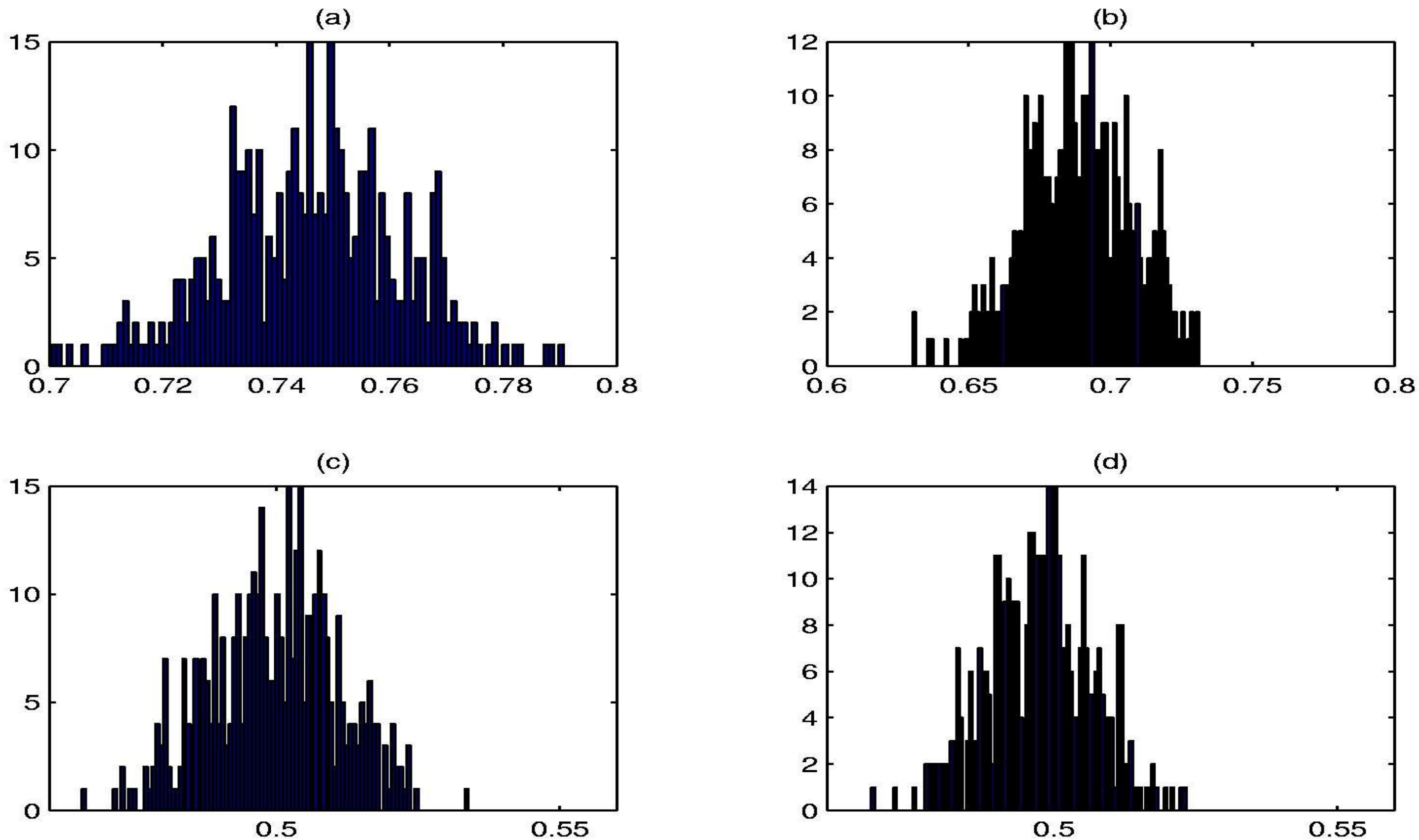


Figura 6: Estimador GMQ com ruído MA. Histogramas dos parâmetros estimados pelo estimador GMQ para o caso de erros do tipo ruído MA ($e(k) = 0,8\nu(k-1) + \nu(k)$) e presença de regressores de saída. Os gráficos (a) e (c) correspondem aos valores dos parâmetros estimados na primeira iteração do algoritmo ite-

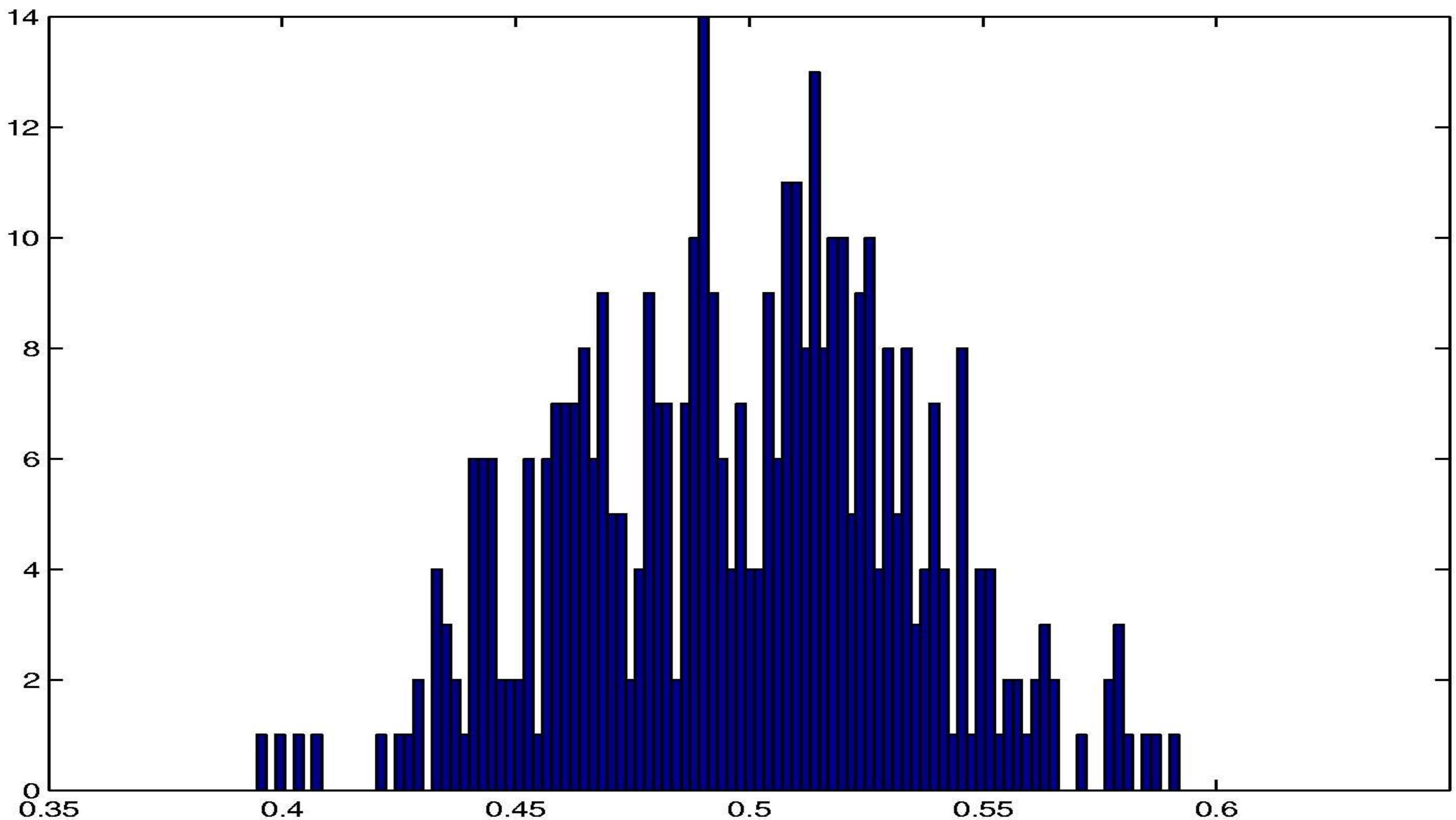


Figura 7: Estimador GMQ com ruído MA, coeficiente de ruído. Histograma de estimativas de $-\hat{d}_1$, sendo $\hat{D}'(q) = 1 + \hat{d}_1 q^{-1}$. A razão de E($-\hat{d}_1$)$\neq 0,8$ deve-se ao fato de que o estimador GMQ pressupõe ruído AR e, na realidade, o ruído usado para gerar os dados foi do tipo MA.

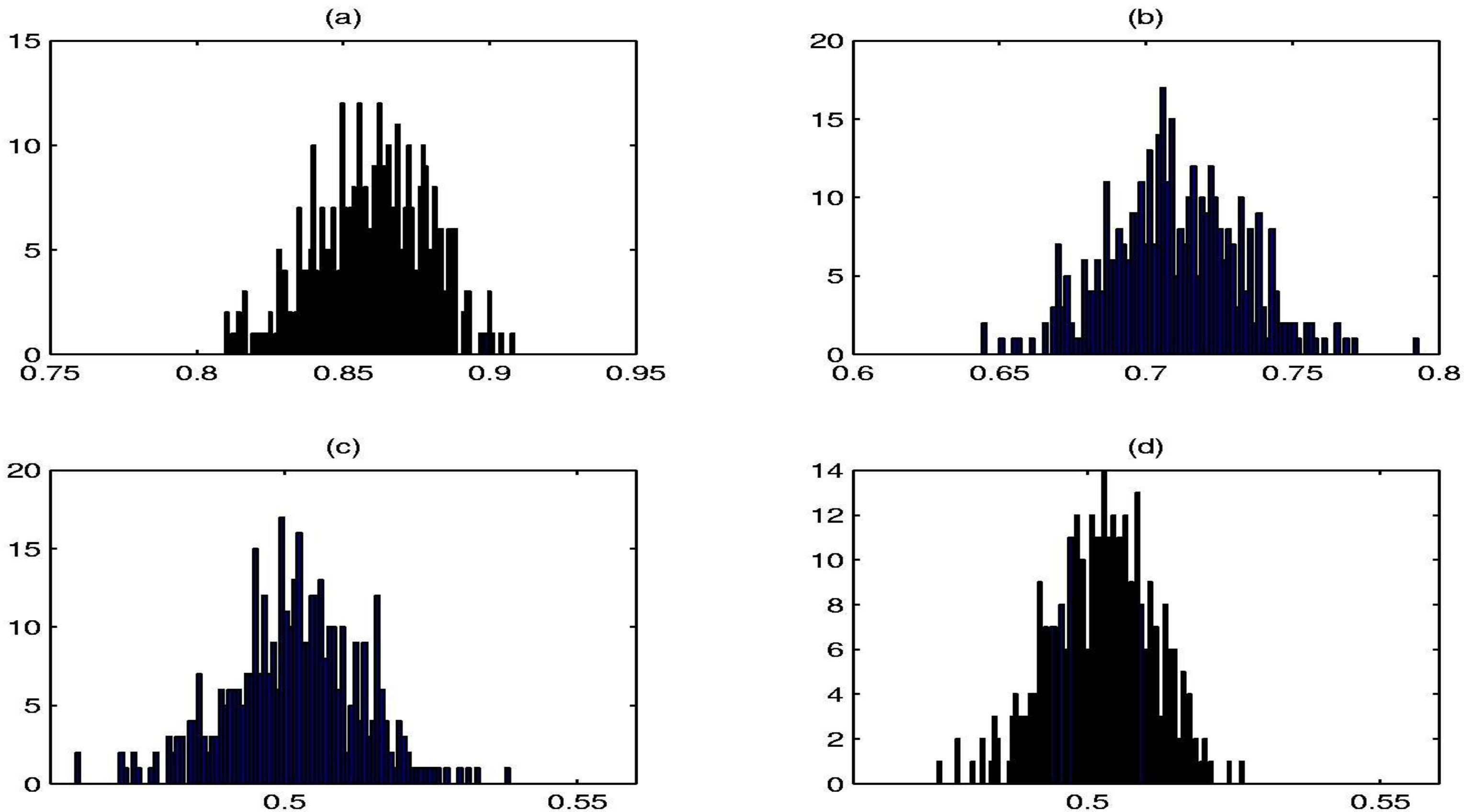


Figura 8: Estimador GMQ com ruído AR. Histogramas dos parâmetros estimados pelo estimador GMQ no caso do erro ser do tipo ruído AR ($e(k) = 0,8e(k-1) + \nu(k)$) e presença de regressores de saída. Os gráficos (a) e (c) correspondem aos valores dos parâmetros estimados na primeira iteração do algoritmo ite-

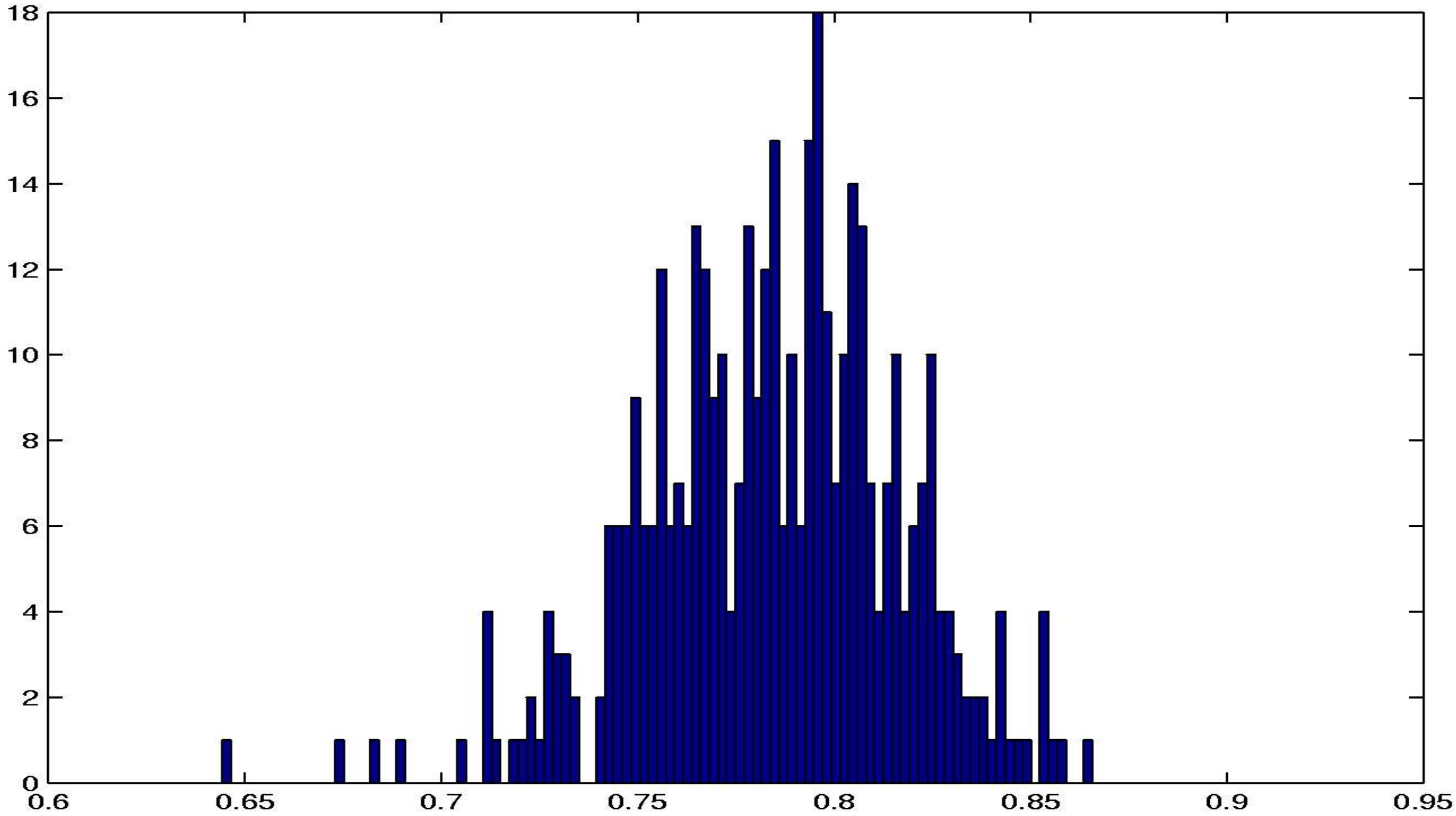


Figura 9: Estimador GMQ com ruído AR, coeficiente de ruído. Histograma de estimativas de $-\hat{d}_1$, sendo $\hat{D}'(q) = 1 + \hat{d}_1 q^{-1}$. O valor real de d_1 é 0,8.

O Método das Variáveis Instrumentais

- A definição de polarização utilizada até o presente é a definição para pequenas amostras (PPA).

O Método das Variáveis Instrumentais

- A definição de polarização utilizada até o presente é a definição para pequenas amostras (PPA).
- Uma alternativa à definição de polarização PPA é a polarização *assintótica*. A idéia é relaxar um pouco a definição PPA e, por um lado, permitir que haja polarização para uma amostra pequena, mas por outro, verificar se tal polarização desaparece à medida que o tamanho do conjunto de observações cresce.

O Método das Variáveis Instrumentais

- A definição de polarização utilizada até o presente é a definição para pequenas amostras (PPA).
- Uma alternativa à definição de polarização PPA é a polarização *assintótica*. A idéia é relaxar um pouco a definição PPA e, por um lado, permitir que haja polarização para uma amostra pequena, mas por outro, verificar se tal polarização desaparece à medida que o tamanho do conjunto de observações cresce.
-

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}_{\mathrm{a}} &= \lim_{N\to\infty} \mathrm{E}[\hat{\boldsymbol{\theta}}(N)] - \boldsymbol{\theta} \\
&= \mathrm{plim}[\hat{\boldsymbol{\theta}}] - \boldsymbol{\theta} \\
&= \mathrm{plim}\left[A(\Psi\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e})\right] - \boldsymbol{\theta} \\
&= \mathrm{plim}\left[A\Psi\boldsymbol{\theta} + A\mathbf{e}\right] - \boldsymbol{\theta} \\
&= \mathrm{plim}\left[A\mathbf{e}\right],
\end{aligned}
$$

sendo que foi assumido que $A\Psi = I$.

- Deseja-se ter $A = BC$, sendo que $B = f(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $C = g(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n \times N}$, sendo $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n}$ um vetor de variáveis aleatórias.

- Deseja-se ter $A = BC$, sendo que $B = f(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $C = g(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n\times N}$, sendo $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ um vetor de variáveis aleatórias.
- As matrizes B e C podem ser definidas da seguinte forma:

$$B = [Z^{\mathrm{T}}\Psi]^{-1} \quad \text{e} \quad C = Z^{\mathrm{T}}.$$

- Deseja-se ter $A = BC$, sendo que $B = f(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $C = g(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n \times N}$, sendo $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ um vetor de variáveis aleatórias.
- As matrizes B e C podem ser definidas da seguinte forma:

$$B = [Z^{\mathrm{T}} \Psi]^{-1} \quad \text{e} \quad C = Z^{\mathrm{T}}.$$

- Tem-se o seguinte estimador

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{VI}} = [Z^{\mathrm{T}} \Psi]^{-1} Z^{\mathrm{T}} \mathbf{y}.$$

- Deseja-se ter $A = BC$, sendo que $B = f(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $C = g(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{n\times N}$, sendo $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ um vetor de variáveis aleatórias.
- As matrizes B e C podem ser definidas da seguinte forma:

$$B = [Z^{\mathrm{T}}\Psi]^{-1} \quad \text{e} \quad C = Z^{\mathrm{T}}.$$

- Tem-se o seguinte estimador

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{VI}} = [Z^{\mathrm{T}}\Psi]^{-1} Z^{\mathrm{T}}\mathbf{y}.$$

- Portanto, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_{\mathrm{a}} &= \operatorname{plim}\,[A\mathbf{e}] \\
&= \operatorname{plim}\left[(Z^{\mathrm{T}}\Psi)^{-1} Z^{\mathrm{T}}\mathbf{e}\right] \\
&= \operatorname{plim}\left[(Z^{\mathrm{T}}\Psi)^{-1}\right] \operatorname{plim}\,[Z^{\mathrm{T}}\mathbf{e}]\,,
\end{aligned}$$

- Finalmente

$$\mathbf{b}_{\mathrm{a}} \quad = \quad N \mathrm{plim}\left[(Z^{\mathrm{T}}\Psi)^{-1} \right] \mathbf{c},$$

sendo **c** o vetor de correlação cruzada entre as colunas de Z (geradas pelas variáveis instrumentais) e **e**.

O estimador VI sem a propriedade de ortogonalidade

À semelhança do estimador MQP, o estimador VI também é do tipo $\hat{\boldsymbol{\theta}} = A\mathbf{y}$, mas para o caso do estimador VI tem-se $A = [Z^{\mathrm{T}}\Psi]^{-1}Z^{\mathrm{T}}$. Logo, pode-se testar se o estimador VI satisfaz a condição de ortogonalidade. Para esse estimador, tem-se

$$
\begin{aligned}
\Psi^{\mathrm{T}}\Psi A\mathbf{y} &\stackrel{?}{=} \Psi^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \\
\Psi^{\mathrm{T}}\Psi[Z^{\mathrm{T}}\Psi]^{-1}Z^{\mathrm{T}}\mathbf{y} &\stackrel{?}{=} \Psi^{\mathrm{T}}\mathbf{y},
\end{aligned}
$$

sendo que a condição não é satisfeita para o estimador em estudo. Esse resultado não deve causar nenhuma surpresa. A forma do estimador VI evitar a polarização é diferente da forma usada pelo estimador EMQ. O estimador VI não força os resíduos a serem brancos e, portanto, o vetor de resíduos *não* é ortogonal à hipersuperfície gerada pelos regressores do modelo.

O estimador VI

Neste exemplo, o estimador VI será utilizado em três situações distintas.

- Em primeiro lugar, será considerado o caso em que há ruído de observação e este é branco.

O estimador VI

Neste exemplo, o estimador VI será utilizado em três situações distintas.

- Em primeiro lugar, será considerado o caso em que há ruído de observação e este é branco.
- Os outros dois casos investigados usam erros do tipo ruídos MA e AR na equação de regressão.

O estimador VI

Neste exemplo, o estimador VI será utilizado em três situações distintas.

- Em primeiro lugar, será considerado o caso em que há ruído de observação e este é branco.
- Os outros dois casos investigados usam erros do tipo ruídos MA e AR na equação de regressão.

Para cada caso, duas escolhas de regressores foram testadas.

O estimador VI

Neste exemplo, o estimador VI será utilizado em três situações distintas.

- Em primeiro lugar, será considerado o caso em que há ruído de observação e este é branco.
- Os outros dois casos investigados usam erros do tipo ruídos MA e AR na equação de regressão.

Para cada caso, duas escolhas de regressores foram testadas.

- Primeiramente, os regressores do sinal de saída, do tipo $y(k-1)$, foram substituídos pelas respectivas predições de um passo à frente, $\hat{y}(k-1)$.

O estimador VI

Neste exemplo, o estimador VI será utilizado em três situações distintas.

- Em primeiro lugar, será considerado o caso em que há ruído de observação e este é branco.
- Os outros dois casos investigados usam erros do tipo ruídos MA e AR na equação de regressão.

Para cada caso, duas escolhas de regressores foram testadas.

- Primeiramente, os regressores do sinal de saída, do tipo $y(k-1)$, foram substituídos pelas respectivas predições de um passo à frente, $\hat{y}(k-1)$.

- Uma segunda alternativa substitui o vetor de regressores $\boldsymbol{\psi}(k-1) = [y(k-1)\ u(k-1)]^{\mathrm{T}}$ pelo vetor de variáveis instrumentais $\mathbf{z}(k-1) = [u(k-1)\ u(k-2)]^{\mathrm{T}}$.

Exemplo

- Os dados para a primeira parte do exemplo foram gerados pelo modelo $y^{\mathrm{i}}(k) = 0,7y^{\mathrm{i}}(k-1) + 0,5u(k-1)$, com condições iniciais nulas e tomando $u(k)$ como ruído branco, distribuição gaussiana com média zero e variância unitária.

Exemplo

- Os dados para a primeira parte do exemplo foram gerados pelo modelo $y^{\mathrm{i}}(k) = 0,7y^{\mathrm{i}}(k-1) + 0,5u(k-1)$, com condições iniciais nulas e tomando $u(k)$ como ruído branco, distribuição gaussiana com média zero e variância unitária.
- A seguir, adicionou-se ruído de observação de tal forma a gerar $y(k) = y^{\mathrm{i}}(k) + \nu(k)$, sendo $\nu(k)$ ruído branco e gaussiano com E($\nu(k)$)=0 e $\sigma_{\nu}^{2} = 0,04$. Em todas as simulações numéricas deste exemplo foram usadas 400 realizações com $N = 500$.

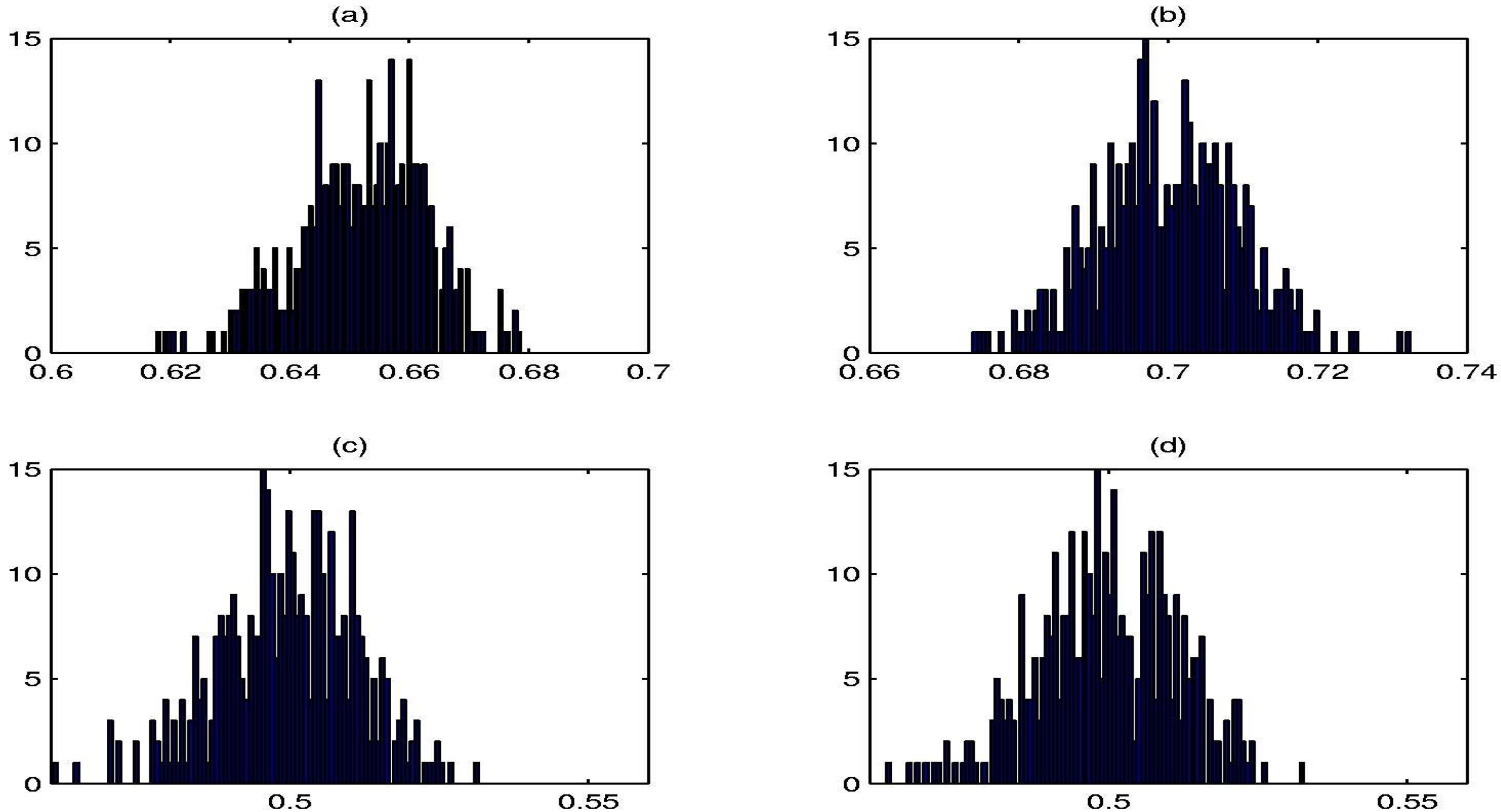


Figura 10: Estimador VI com ruído de observação. Histogramas dos parâmetros estimados pelo estimador VI para o caso de ruído de observação branco. Os gráficos (a) e (c) correspondem aos valores dos parâmetros estimados pelo estimador MQ. Os gráficos (b) e (d) correspondem ao estimador VI com

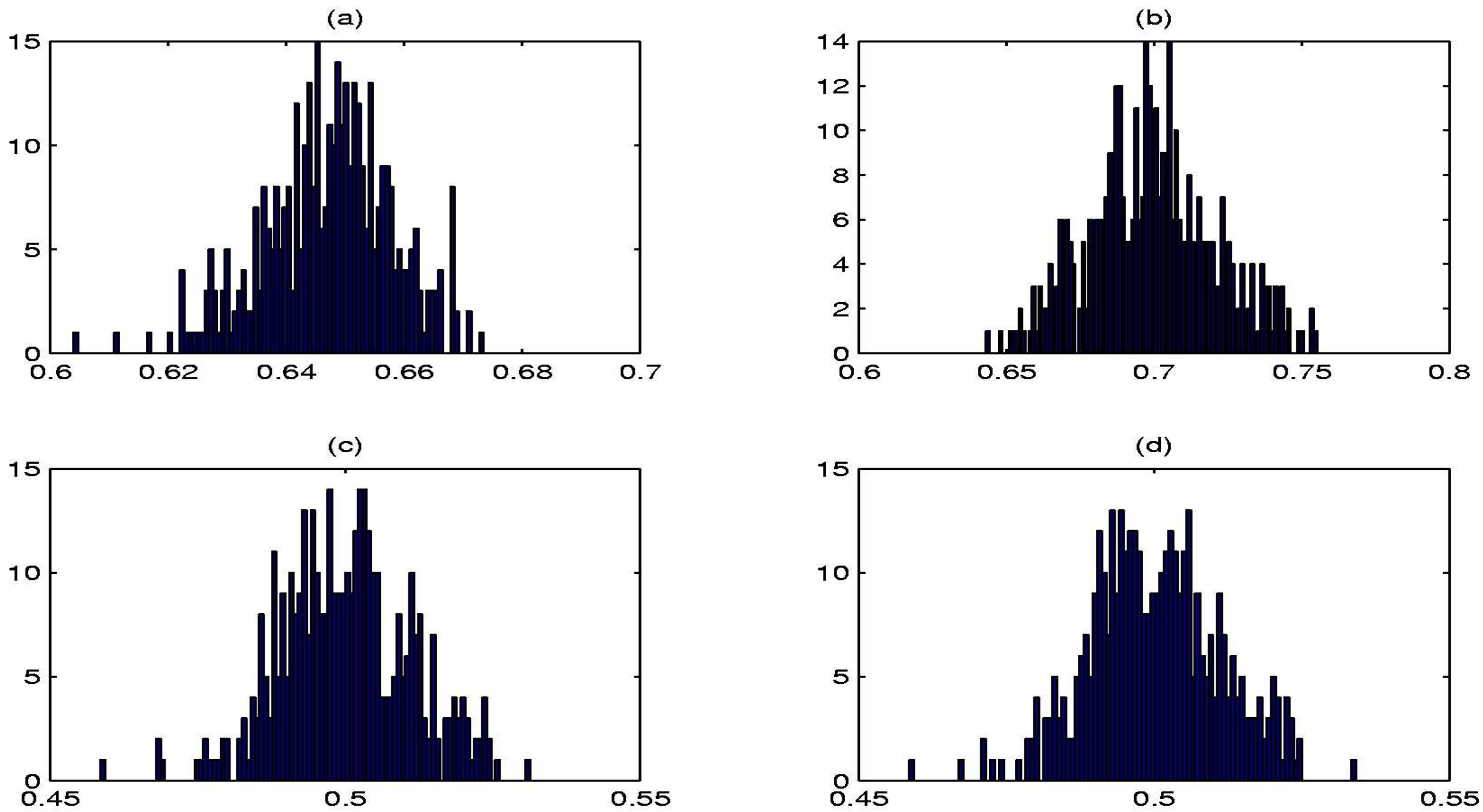


Figura 11: Estimador VI com ruído de observação. Histogramas dos parâmetros estimados pelo estimador VI para o caso de ruído de observação branco. Os gráficos (a) e (c) correspondem aos valores dos parâmetros estimados pelo estimador MQ. Os gráficos (b) e (d) correspondem ao estimador VI com

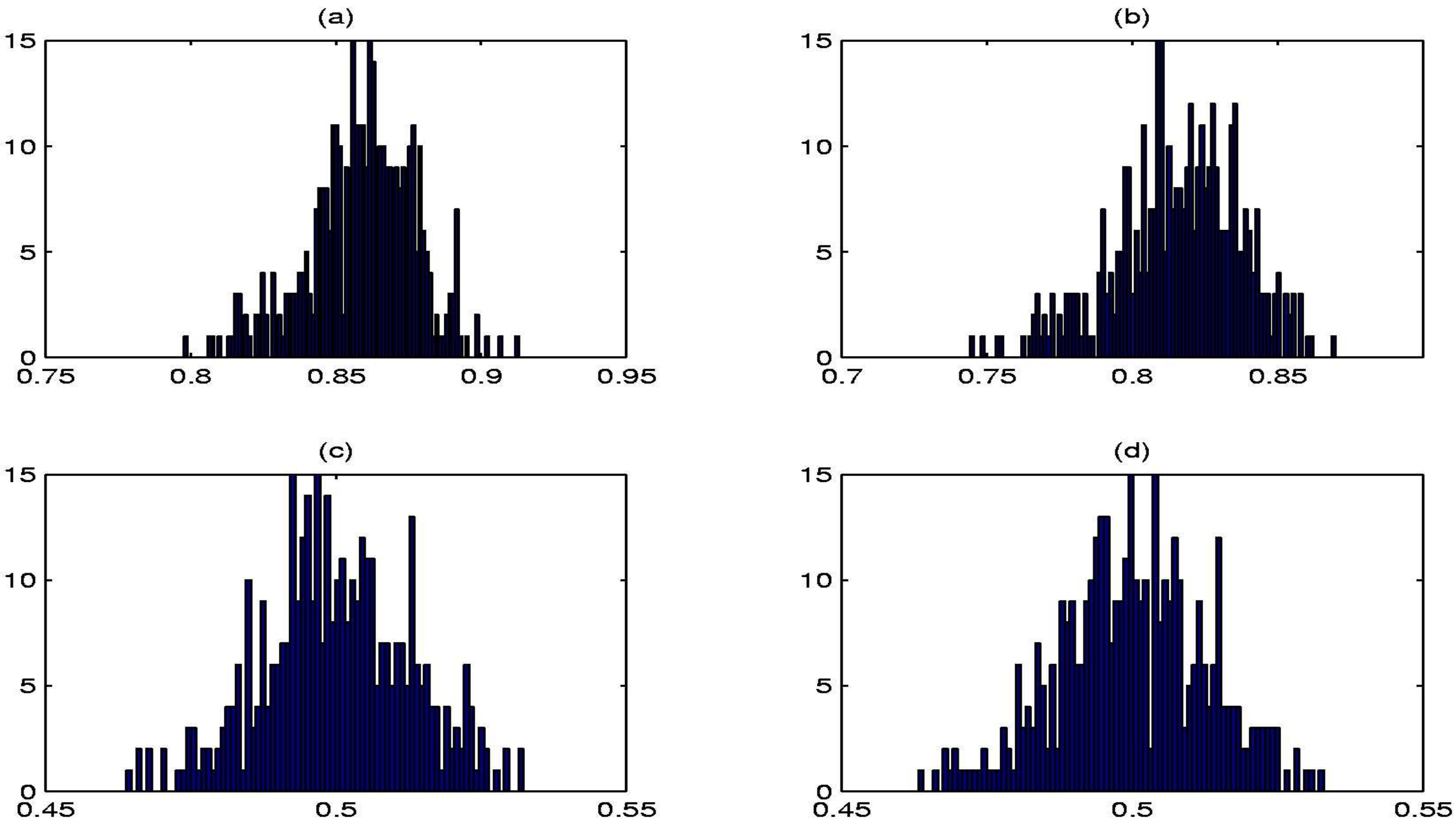


Figura 12: Estimador VI com erro AR de regressão. Histogramas dos parâmetros estimados pelo estimador VI para o caso de erro de regressão do tipo ruído AR. Os gráficos (a) e (c) correspondem aos valores dos parâmetros estimados pelo estimador MQ. Os gráficos (b) e (d) correspondem ao estimador VI com

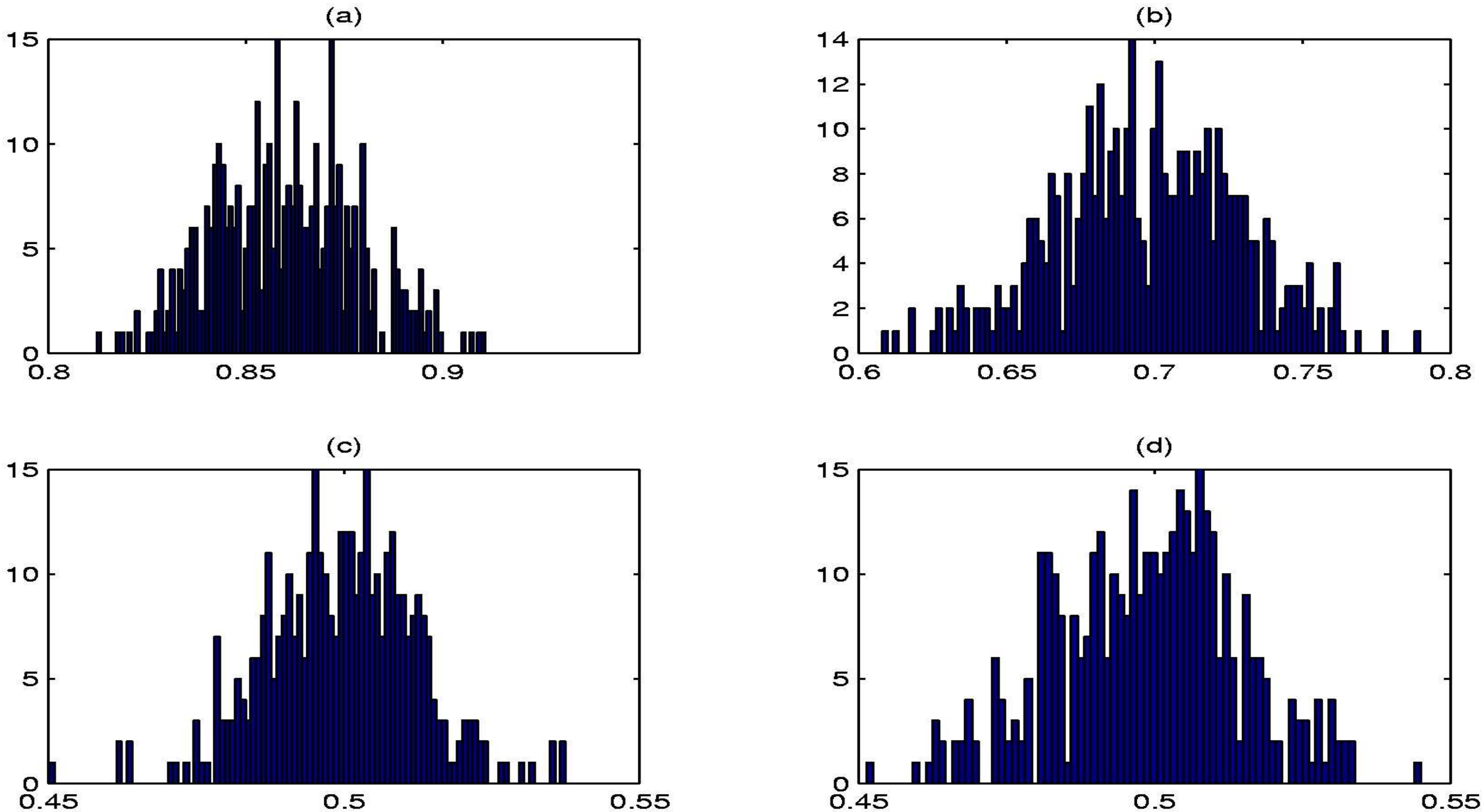


Figura 13: Estimador VI com erro AR de regressão. Histogramas dos parâmetros estimados pelo estimador VI para o caso de erro de regressão do tipo ruído AR. Os gráficos (a) e (c) correspondem aos valores dos parâmetros estimados pelo estimador MQ. Os gráficos (b) e (d) correspondem ao estimador VI com os ins-

Complementos - Solução do problema de erro nas variáveis

Neste exemplo os dados ideais serão gerados por

$$y^{\mathrm{i}}(k) \quad = \quad 1,5y^{\mathrm{i}}(k-1) - 0,7y^{\mathrm{i}}(k-2) + 0,5u^{\mathrm{i}}(k-1),$$

sendo que $u^{\mathrm{i}}(k)$ é um sinal aleatório com distribuição normal, média nula e variância $\sigma_u^2 = 1$.
Tanto o sinal de entrada quanto o de saída são observados com ruído branco, de média nula e variância $0,04$. Isso é representado da seguinte forma $y(k) = y^{\mathrm{i}}(k) + e_y(k)$ e $u(k) = u^{\mathrm{i}}(k) + e_u(k)$. Além disso, $e_y(k)$ e $e_u(k)$ não estão correlacionados.

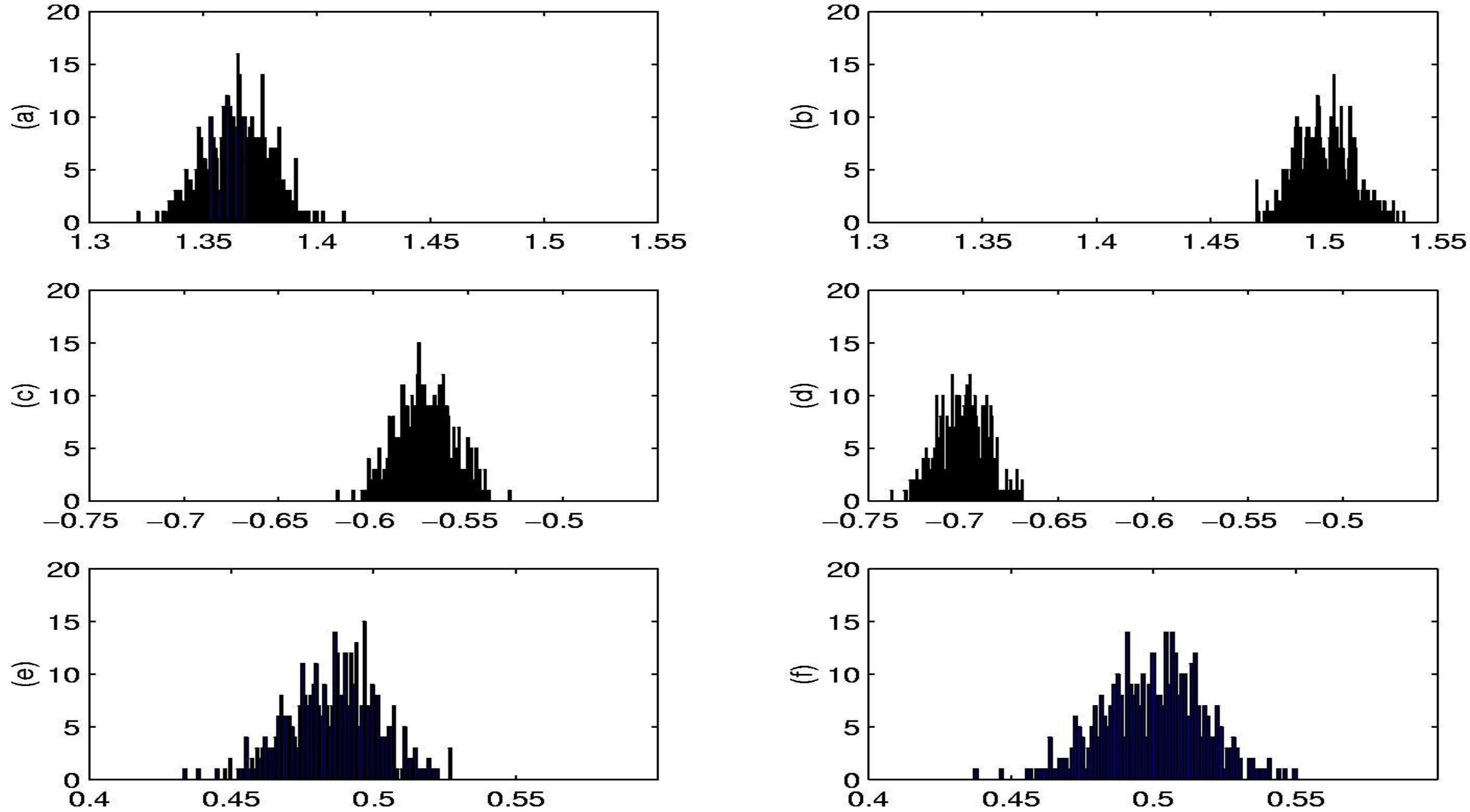


Figura 14: Eliminando polarização com o estimador MQT. Histogramas de valores estimados usando os estimadores MQ e MQT quando os sinais de entrada e saída têm ruído de medição branco. Os gráficos (a,c,e) correspondem ao estimador MQ e os gráficos (b,d,f) correspondem ao estimador MQT. Os valores reais