Capítulo 9 - Representações de Sistemas Não-Lineares

Eduardo Mendes

emmendes@cpdee.ufmg.br

Departamento de Engenharia Eletrônica
Universidade Federal de Minas Gerais
Av. Antônio Carlos 6627, Belo Horizonte, MG, Brasil

Introdução

- O objetivo deste capítulo é apresentar alguns conceitos relevantes ao assunto de representações matemáticas para sistemas não-lineares. Serão descritas em mais detalhes a representação polinomial e a racional NARMAX.

A série de Volterra

A saída $y(t)$ de um sistema não-linear com entrada $u(t)$ pode ser representada pela chamada série de Volterra definida como

$$y(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h_j(\tau_1, \ldots, \tau_j) \prod_{i=1}^{j} u(t - \tau_i)\, d\tau_i,$$

sendo que as funções h_j são denominadas *kernels* e claramente são generalizações não-lineares da resposta ao impulso $h_1(t)$.

Modelos de Hammerstein e de Wiener

São uma composição de um modelo dinâmico linear $H(s)$ em cascata com uma função estática não-linear $f(\cdot)$.

- No caso do modelo de Hammerstein, a não-linearidade estática precede o modelo dinâmico linear, ou seja,

$$U^*(s) = f(U(s)); \quad \text{e} \quad Y(s) = H(s)U^*(s).$$

Modelos de Hammerstein e de Wiener

São uma composição de um modelo dinâmico linear $H(s)$ em cascata com uma função estática não-linear $f(\cdot)$.

- No caso do modelo de Hammerstein, a não-linearidade estática precede o modelo dinâmico linear, ou seja,

$$U^*(s) = f(U(s)); \quad \text{e} \quad Y(s) = H(s)U^*(s).$$

- No caso do modelo de Wiener, o modelo dinâmico linear precede a não-linearidade estática, isto é,

$$Y^*(s) = H(s)U(s); \quad \text{e} \quad Y(s) = f(Y^*(s)).$$

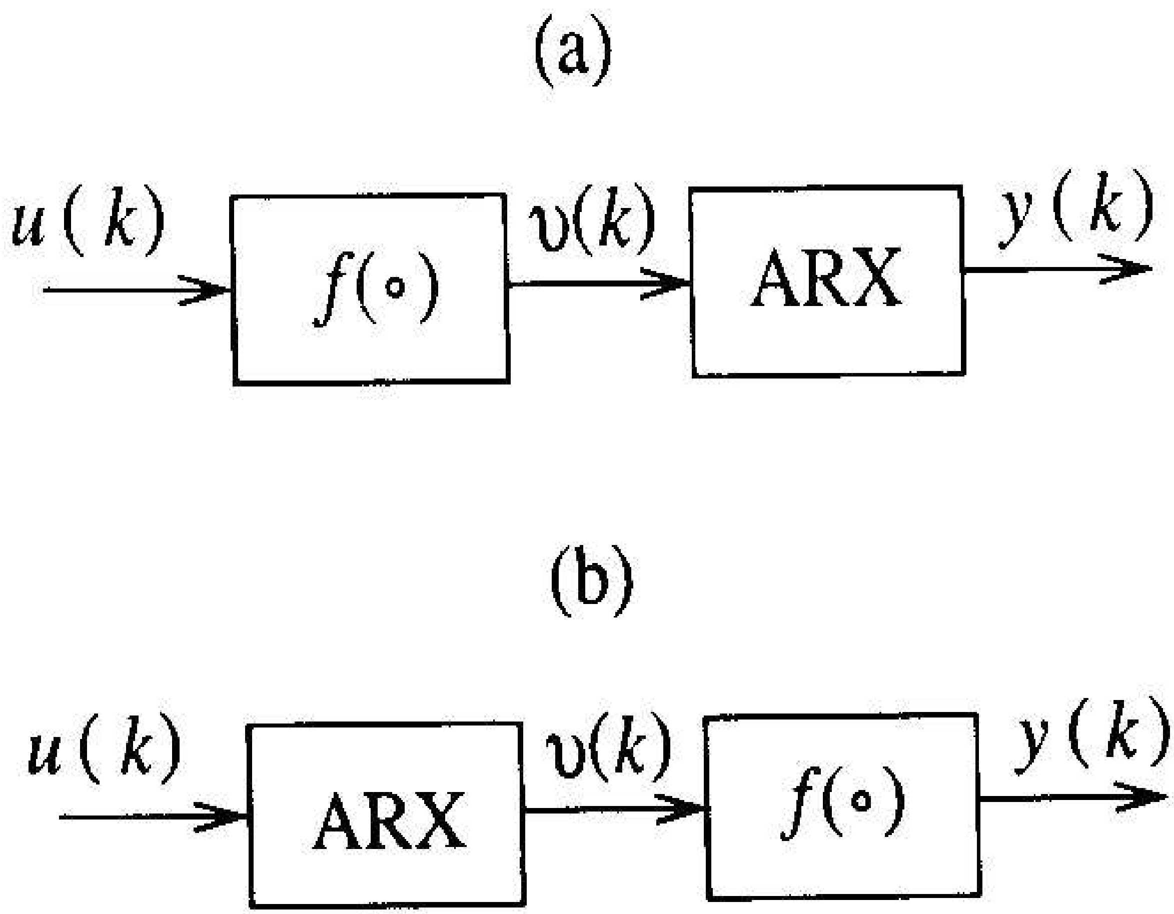

Figura 1: (a) Modelo de Hammerstein, (b) Modelo de Wiener. Em aplicações práticas não se tem acesso à variável intermediária.

Algumas representações NARX

Um modelo NARMAX (do inglês *nonlinear autoregressive moving average model with exogenous variables*) é normalmente representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y(k) &= F[y(k-1),\ldots,y(k-n_y),\ u(k-\tau_{\mathrm{d}}),\ldots \\ &\qquad \ldots u(k-n_u),\ e(k),\ e(k-1),\ldots,e(k-n_e)]. \end{aligned}$$

- Duas representações NARMAX comumente usadas para F são a polinomial e a racional.

$$y(k) = \sum_i c_i \prod_{j=1}^{n_y} y(k-j) \prod_{r=1}^{n_u} u(k-r) \prod_{q=0}^{n_e} e(k-q).$$

Algumas representações NARX

Um modelo NARMAX (do inglês *nonlinear autoregressive moving average model with exogenous variables*) é normalmente representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y(k) \quad &= \quad F[y(k-1), \ldots, y(k-n_y),\ u(k-\tau_{\mathrm{d}}), \ldots \\ &\qquad \ldots u(k-n_u),\ e(k),\ e(k-1), \ldots, e(k-n_e)]. \end{aligned}$$

- Duas representações NARMAX comumente usadas para F são a polinomial e a racional.

$$y(k) = \sum_i c_i \prod_{j=1}^{n_y} y(k-j) \prod_{r=1}^{n_u} u(k-r) \prod_{q=0}^{n_e} e(k-q).$$

- Modelos racionais são formados pela razão entre dois polinômios

$$y(k) = \frac{\sum_i c_i \ \prod_{j=1}^{n_y} \ y(k-j) \ \prod_{r=1}^{n_u} \ u(k-r) \prod_{q=1}^{n_e} \ e(k-q)}{\sum_i d_i \ \prod_{j=1}^{d_y} \ y(k-j) \ \prod_{r=1}^{d_u} \ u(k-r) \prod_{q=1}^{d_e} \ e(k-q)} + e(k).$$

Modelos polinomiais contínuos

Um modelo polinomial para este sinal pode ser formado utilizando-se o sinal e suas derivadas como base, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \dot{y}(t)\\ \dot{Y} &= \ddot{y}(t)\\ \dot{Z} &= \sum_{l=1}^{n_\theta} \theta_l \psi^l,\end{aligned}$$

sendo $\psi^l = X^i Y^j Z^k$ e $i, j, k \in \mathbb{N}$.

Funções de base radial

As funções de base radial (RBF do inglês *radial basis functions*) são mapeamentos do tipo

$$f(\mathbf{y}) = \omega_0 + \sum_i \omega_i \, \phi(\| \mathbf{y} - \mathbf{c}_i \|),$$

sendo que $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{d_\mathrm{e}}$, $\| \cdot \|$ é a norma euclidiana, $\omega_i \in \mathbb{R}$ são pesos, $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^{d_\mathrm{e}}$ são os centros e $\phi(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função, normalmente escolhida a priori, como, por exemplo:

$$\phi(\| \mathbf{y} - \mathbf{c}_i \|) = \exp\left(- \frac{\| \mathbf{y} - \mathbf{c}_i \|^2}{\sigma_i^2} \right),$$

sendo σ_i constante e $\| \mathbf{y} - \mathbf{c}_i \|^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{c}_i)^\mathrm{T} (\mathbf{y} - \mathbf{c}_i)$. A função de base acima é chamada de gaussiana.

Outras funções de base usadas são:

$$
\begin{aligned}
&\text{Multiquadrática inversa}: && \phi(r) = (r^2 + \sigma^2)^{-0,5} \\
&\text{Linear}: && \phi(r) = r \\
&\text{Cúbica}: && \phi(r) = r^3 \\
&\text{Multiquadrática}: && \phi(r) = \sqrt{r^2 + \sigma^2} \\
&Thin - plate\ spline: && \phi(r) = r^2 \log[r],
\end{aligned}
$$

sendo que $r = \| \mathbf{y} - \mathbf{c}_i \|$ e σ define a largura do “chapéu”, no caso das funções gaussiana e das multiquadráticas.

No contexto de identificação de sistemas, é comum acrescentar termos auto-regressivos lineares, bem como termos de entrada, resultando em

$$
\begin{aligned}
y(k) &= \omega_0 + \sum_i \omega_i \, \phi(\| \mathbf{y}(k-1) - \mathbf{c}_i \|) + \\
&+ \sum_{i=1}^{n_y} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_u} a_i u(k-i) + e(k),
\end{aligned}
$$

sendo $\mathbf{y}(k-1) = [y(k-1) \ldots y(k-n_y)\ u(k-1) \ldots u(k-n_u)]^{\mathrm{T}}$, e $e(k)$ é o erro.

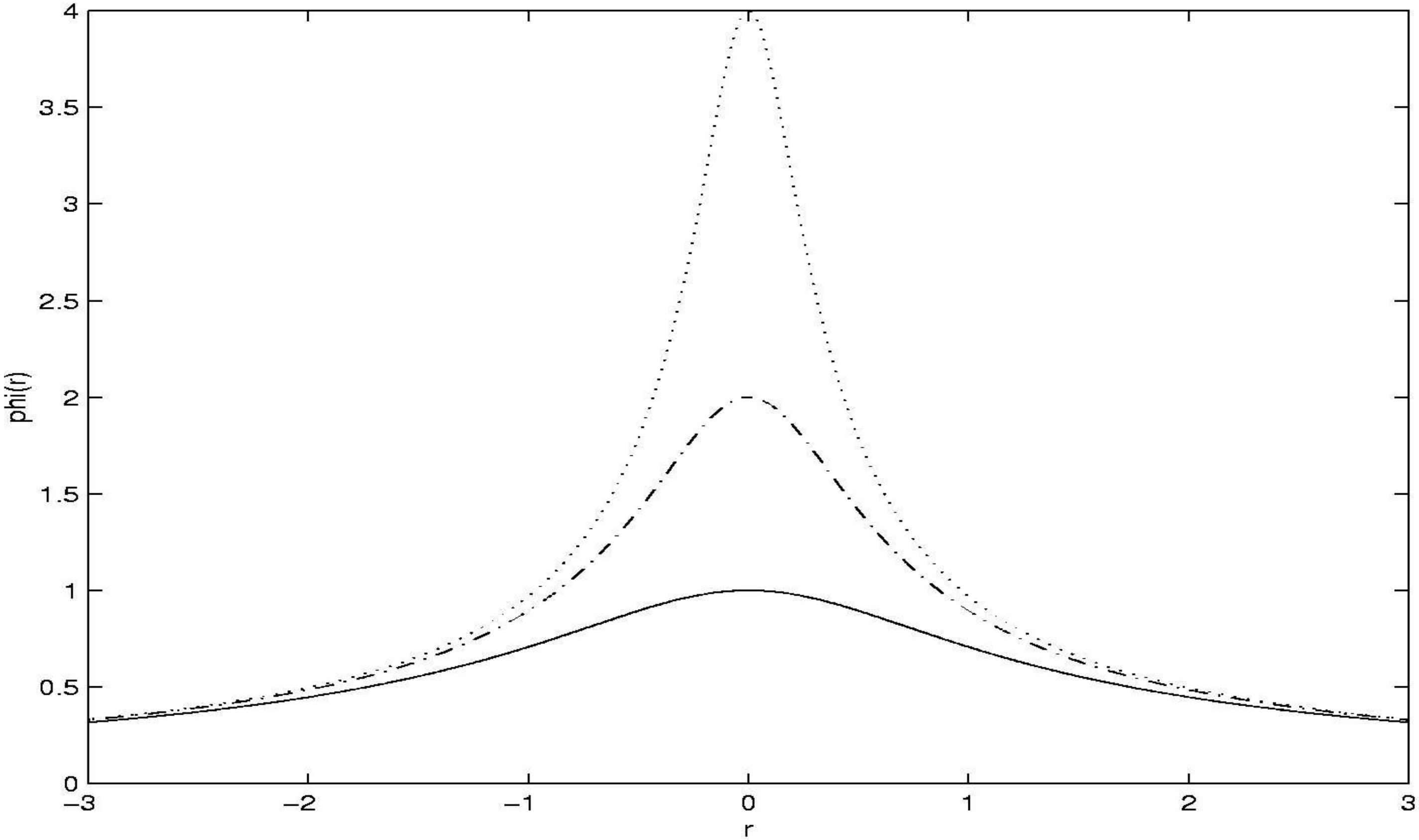

Figura 2: Função multiquadrática inversa para vários valores do parâmetro σ: (—) $\sigma = 1$, $(- \cdot -)$ $\sigma = 0,5$ e $(\cdots)$ $\sigma = 0,25$.

Redes neurais artificiais

A saída de um único neurônio com n entradas é do tipo

$$x = f\left(\sum_{j=1}^{n} \omega_j x_j + b\right),$$

sendo que b (*bias*) e ω_j são constantes e f é chamada de função de ativação. Há vários tipos de função de ativação sendo que uma das mais comuns é a sigmóide

$$f(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}.$$

Normalmente a saída de um neurônio é conectada à entrada de um outro neurônio. Nesse caso, a saída de uma rede com um único nodo na camada de saída e uma camada oculta é uma função não-linear nos parâmetros do tipo

$$y(k) = f_{\mathrm{s}}\left\{\sum_{i=1}^{m} \omega_i f_i\left(\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} x_j + b_i\right) + b_{\mathrm{s}}\right\}.$$

Em aplicações de identificação, é comum escolher $f_{\mathrm{s}}(x) = x$ e $b_{\mathrm{s}} = 0$; assim (-3) fica

$$y(k) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i f_i \left(\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} x_j + b_i \right),$$

que ainda é não-linear nos parâmetros.

Modelo polinomial NARX

Neste exemplo a função $F^{\ell}[\cdot]$ é expandida como um polinômio de grau dois, ou seja, $F^{2}[\cdot]$.

$$
\begin{aligned}
y(k) \quad = \quad & c_{0,0} + \sum_{n_1=1}^{n_y} c_{1,0}(n_1) y(k-n_1) + \sum_{n_1=1}^{n_u} c_{0,1}(n_1) u(k-n_1) \\
& + \sum_{n_1}^{n_y} \sum_{n_2}^{n_y} c_{2,0}(n_1,n_2) y(k-n_1) y(k-n_2) \\
& + \sum_{n_1}^{n_y} \sum_{n_2}^{n_u} c_{1,1}(n_1,n_2) y(k-n_1) u(k-n_2) \\
& + \sum_{n_1}^{n_u} \sum_{n_2}^{n_u} c_{0,2}(n_1,n_2) u(k-n_1) u(k-n_2).
\end{aligned}
$$

Regressores de um modelo polinomial NARX

Assumindo-se $n_y = 2$ e $n_u = 1$ para o modelo do exemplo anterior, tem-se o seguinte vetor de regressores:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}(k-1) \;=\; \big[&y(k-1)\; y(k-2)\; u(k-1)\; y(k-1)^2\; y(k-1)y(k-2)\\ &y(k-2)^2\; u(k-1)^2\; y(k-1)u(k-1)\; y(k-2)u(k-1)\big]^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

O Modelo Racional NARMAX

- Um modelo racional NARMAX tem a seguinte forma geral:

$$
\begin{aligned}
y(k) &= \frac{a(y(k-1),\ldots,y(k-n_y),u(k-1),\ldots,u(k-n_u),}{b(y(k-1),\ldots,y(k-n_y),u(k-1),\ldots,u(k-n_u),}\cdots \\
&\quad \cdots\frac{e(k-1),\ldots,e(k-n_e))}{e(k-1),\ldots,e(k-n_e))}+e(k).
\end{aligned}
$$

O Modelo Racional NARMAX

- Um modelo racional NARMAX tem a seguinte forma geral:

$$
\begin{aligned}
y(k) &= \frac{a(y(k-1),\ldots,y(k-n_y),u(k-1),\ldots,u(k-n_u),}{b(y(k-1),\ldots,y(k-n_y),u(k-1),\ldots,u(k-n_u),}\ldots \\
&\quad \ldots\frac{e(k-1),\ldots,e(k-n_e))}{e(k-1),\ldots,e(k-n_e))} + e(k).
\end{aligned}
$$

- É conveniente definir o numerador e denominador de (0) como sendo, respectivamente,

$$
a(k-1) = \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{n}}} p_{\mathrm{n}j}\theta_{\mathrm{n}j} = \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(k-1)\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{n}},
$$

$$
b(k-1) = \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{d}}} p_{\mathrm{d}j}\theta_{\mathrm{d}j} = \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}(k-1)\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{d}}.
$$

- Manipulando-se os termos, chega-se a

$$\begin{aligned} y^*(k) &= a(k-1) - y(k)\sum_{j=2}^{N_{\mathrm{d}}} p_{\mathrm{d}j}\theta_{\mathrm{d}j} + b(k-1)e(k) \\ &= \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{n}}} p_{\mathrm{n}j}\theta_{\mathrm{n}j} - y(k)\sum_{j=2}^{N_{\mathrm{d}}} p_{\mathrm{d}j}\theta_{\mathrm{d}j} + \zeta(k) \\ &= \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}(k-1)\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{n}} - y(k)\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{d1}}^{\mathrm{T}}(k-1)\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{d}} + \zeta(k), \end{aligned}$$

sendo $\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}(k-1) = [p_{\mathrm{d1}}\ \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{d1}}^{\mathrm{T}}(k-1)]$, $\theta_{\mathrm{d1}} = 1$ e

$$y^*(k) = y(k)p_{\mathrm{d1}} = \frac{a(k-1)}{b(k-1)}p_{\mathrm{d1}} + p_{\mathrm{d1}}e(k),$$

$$\zeta(k) = b(k-1)e(k) = \left(\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{d}}} p_{\mathrm{d}j}\theta_{\mathrm{d}j}\right)e(k),$$

sendo $e(k)$ branco. Como $e(k)$ é independente de $b(k-1)$ e tem média zero, tem-se $\mathrm{E}[\zeta(k)] = \mathrm{E}[b(k-1)]\mathrm{E}[e(k)] = 0$.

Um modelo racional NARX

Um modelo racional é normalmente representado como a razão entre dois polinômios. Um exemplo de tal tipo de modelo é

$$y(k) = \frac{a_0+a_1y(k-1)+a_2u(k-1)+a_3y(k-1)u(k-1) + a_5u(k-1)^2}{b_0 + b_2u(k-1)},$$

sendo que apenas os regressores relacionados a $y(k)$ e $u(k)$ são mostrados.

Agrupamento de Termos

- Um modelo para o qual $n_u = n_y$ abrange uma janela de dados de comprimento $(n_y - 1) \times T_\mathrm{s}$. Se essa janela de dados for suficientemente suave, as seguintes aproximações podem ser escritas

$$\left.\begin{array}{c} y(k-1) \approx y(k-2) \approx \ldots \approx y(k-n_y) \\ u(k-1) \approx u(k-2) \approx \ldots \approx u(k-n_u) \end{array}\right\},$$

Agrupamento de Termos

- Um modelo para o qual $n_u = n_y$ abrange uma janela de dados de comprimento $(n_y - 1) \times T_\mathrm{s}$. Se essa janela de dados for suficientemente suave, as seguintes aproximações podem ser escritas

$$\left.\begin{array}{l} y(k-1) \approx y(k-2) \approx \ldots \approx y(k-n_y) \\ u(k-1) \approx u(k-2) \approx \ldots \approx u(k-n_u) \end{array}\right\},$$

- então a equação um modelo polinomial NARX pode ser aproximado por

$$y(k) \approx \sum_{n_1, n_m}^{n_y, n_u} c_{p,m-p}(n_1, \ldots, n_m) \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{m} y(k-1)^p u(k-1)^{m-p}.$$

- A equação anterior serve como motivação para a seguinte definição

As constantes $\sum_{n_1,n_m}^{n_y,n_u} c_{p,m-p}(n_1,\ldots,n_m)$ são os coeficientes dos agrupamentos de termos $\Omega_{y^p u^{m-p}}$, que contêm termos da forma $y(k-i)^p u(k-j)^{m-p}$ para $m=0,\ldots,\ell$ e $p=0,\ldots,m$. Tais coeficientes são chamados de coeficientes de agrupamentos e são representados por $\Sigma_{y^p u^{m-p}}$.

Agrupamentos de termos de um modelo polinomial NARX

Seja o modelo e seus parâmetros

$$
\begin{aligned}
y(k) \quad = \quad & 1,4269\, y(k-1) - 0,41549\, y(k-3) + 0,012\, y(k-2) \\
& +0,11736\, u(k-3) - 0,04904\, y(k-1)^3 + 1,2007\, y(k-1)^2 u(k-3) \\
& +0,252\, y(k-3)^2 u(k-2) - 0,078346\, u(k-2) \\
& -0,47759\, y(k-2) y(k-3) u(k-3) - 0,030695\, y(k-3)^3 \\
& +0{,}05843\, y(k-2)^3 - 0{,}39072\, y(k-2)^2 u(k-3) \\
& -1{,}0272\, y(k-1)^2 u(k-2) + 0,44085\, y(k-2) y(k-3) u(k-1) \\
& -0,20771 \times 10^{-2} + 0,032643\, y(k-1)^2 - 0,054208\, y(k-2)^2 \\
& +0,023113\, y(k-3)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ll}
c_{1,0}(1) = 1,4269, & c_{1,0}(3) = -0,41549, \\
c_{1,0}(2) = 0,012, & c_{0,1}(3) = 0,11736, \\
c_{3,0}(1,1,1) = -0,04904, & c_{2,1}(1,1,3) = 1,2007, \\
c_{2,1}(3,3,2) = 0,252, & c_{0,1}(2) = -0,078346, \\
c_{2,1}(2,3,3) = -0,47759, & c_{3,0}(3,3,3) = -0,030695, \\
c_{3,0}(2,2,2) = 0,05843, & c_{2,1}(2,2,3) = -0,39072, \\
c_{2,1}(1,1,2) = -1,0272, & c_{2,1}(2,3,1) = 0,44085, \\
c_{0,0} = -0,20771 \times 10^{-2}, & c_{1,1}(1,1) = 0,032643, \\
c_{1,1}(2,2) = -0.054208, & c_{1,1}(3,3) = 0,023113.
\end{array}
$$

No próximo exemplo tais parâmetros serão usados para determinar os coeficientes de agrupamentos.

Coeficientes de agrupamentos de um modelo polinomial NARX

- Os coeficientes de agrupamentos do modelo anterior são

$$\Sigma_y = c_{1,0}(1) + c_{1,0}(3) + c_{1,0}(2) = 1,0234,$$

$$\Sigma_{y^3} = c_{3,0}(1,1,1) + c_{3,0}(3,3,3) + c_{3,0}(2,2,2) = -2,1305\times 10^{-2},$$

$$\Sigma_u = c_{0,1}(3) + c_{0,1}(2) = 3,9019\times 10^{-2},$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{y^2u} &= c_{2,1}(1,1,3) + c_{2,1}(3,3,2) + c_{2,1}(2,3,3)\\ &\quad + c_{2,1}(2,2,3) + c_{2,1}(1,1,2) + c_{2,1}(2,3,1) = -1,9184\times 10^{-3},\end{aligned}$$

$$\Sigma_0 = c_{0,0} = -2,0771\times 10^{-3},$$

$$\Sigma_{y^2} = c_{2,0}(1,1) + c_{2,0}(2,2) + c_{2,0}(3,3) = 1,54771\times 10^{-3},$$

que correspondem aos agrupamentos Ω_y, Ω_{y^3}, Ω_u, Ω_{y^2u}, Ω_0 e Ω_{y^2}, respectivamente.

- Um agrupamento da forma $\Omega_{y^p u^{m-p}}$ é um conjunto de termos do tipo $y(k-i)^p u(k-j)^{m-p}$ para $m=0,\ldots,\ell$ e $p=0,\ldots,m$, e os respectivos coeficientes, $\Sigma_{y^p u^{m-p}}$, são o somatório dos coeficientes de todos os termos no modelo que pertencem ao referido agrupamento. No limite, tem-se

$$\lim_{T_\mathrm{s}\to 0} \Sigma_y = 1,$$

$$\lim_{T_\mathrm{s}\to 0} \Sigma_{y^p u^{m-p}} = 0, \quad \text{para todos os demais agrupamentos.}$$

Pontos Fixos - Número de pontos fixos

- Os pontos fixos ou pontos de equilíbrio de um modelo discreto autônomo são definidos como aqueles pontos para os quais $y(k) = y(k+i), \ i \in \mathbb{Z}$. No caso de modelos não autônomos, os pontos fixos satisfazem $y(k) = y(k+i), \ i \in \mathbb{Z}$ para um dado valor constante do sinal de entrada $\bar{u} = u(k) = u(k+i), i \in \mathbb{Z}$.

Pontos Fixos - Número de pontos fixos

- Os pontos fixos ou pontos de equilíbrio de um modelo discreto autônomo são definidos como aqueles pontos para os quais $y(k) = y(k+i),\ i \in \mathbb{Z}$. No caso de modelos não autônomos, os pontos fixos satisfazem $y(k) = y(k+i),\ i \in \mathbb{Z}$ para um dado valor constante do sinal de entrada $\bar{u} = u(k) = u(k+i), i \in \mathbb{Z}$.
- Os pontos fixos de um modelo polinomial NAR (autônomo) com grau de não-linearidade ℓ são as raízes do seguinte polinômio "agrupado":

$$
\begin{aligned}
y(k) \;&=\; c_{0,0} + y(k) \sum_{n_1=1}^{n_y} c_{1,0}(n_1) + y(k)^2 \sum_{n_1,n_2}^{n_y,n_y} c_{2,0}(n_1,n_2) + \ldots \\
&\quad \ldots + y(k)^{\ell} \sum_{n_1,n_\ell}^{n_y,n_y} c_{\ell,0}(n_1,\ldots,n_\ell),
\end{aligned}
$$

- ou

$$\Sigma_{y^\ell}\, y^\ell + \ldots + \Sigma_{y^2}\, y^2 + (\Sigma_y - 1)\, y + \Sigma_0 = 0,$$

sendo $\Sigma_0 = c_{0,0}$ uma constante.

- ou

$$\Sigma_{y^\ell}\, y^\ell + \ldots + \Sigma_{y^2}\, y^2 + (\Sigma_y - 1)\, y + \Sigma_0 = 0,$$

sendo $\Sigma_0 = c_{0,0}$ uma constante.

- Em muitos casos práticos $\Sigma_0 = c_{0,0} = 0$, e neste caso

$$[\Sigma_{y^\ell}\, y^{\ell-1} + \ldots + \Sigma_{y^2}\, y + (\Sigma_y - 1)]\, y = 0.$$

Localização de pontos fixos

- Os pontos fixos de um polinômio linear $(\ell = 1)$ são dados por

$$\bar{y} = \frac{\Sigma_0}{1 - \Sigma_y}.$$

Localização de pontos fixos

- Os pontos fixos de um polinômio linear $(\ell = 1)$ são dados por

$$\bar{y} = \frac{\Sigma_0}{1 - \Sigma_y}.$$

- Para polinômios quadráticos $(\ell = 2)$,

$$\begin{aligned} \bar{y}_{1,2} &= \frac{1 - \Sigma_y \pm \sqrt{\Delta}}{2\Sigma_{y^2}}, \\ \Delta &= (\Sigma_y - 1)^2 - 4\Sigma_{y^2}\Sigma_0. \end{aligned}$$

- Os pontos fixos de um modelo polinomial cúbico $(\ell = 3)$ são

$$
\begin{aligned}
\bar{y}_1 &= (\Delta_3 + \Delta_2) - \Sigma_{y^2}/(3\Sigma_{y^3}), \\
\bar{y}_{2,3} &= -0,5(\Delta_3 + \Delta_2) - \Sigma_{y^2}/(3\Sigma_{y^3}) \pm j\,\sqrt{3}(\Delta_3 - \Delta_2)/2,
\end{aligned}
$$

sendo $j = \sqrt{-1}$ e

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= \sqrt{3}\,[4(\Sigma_y - 1)^3 \Sigma_{y^3} - (\Sigma_y - 1)^2 \Sigma_{y^2} - 18\,(\Sigma_y - 1)\Sigma_0 \Sigma_{y^2} \Sigma_{y^3} \\
&\quad + 27\,\Sigma_0^2 \Sigma_{y^3}^2 + 4\Sigma_0 \Sigma_{y^2}^3]^{0,5} / \Sigma_{y^3}^2, \\
\Delta_2 &= [\Sigma_{y^2}(\Sigma_y - 1)/6\Sigma_{y^3}^2 - \Sigma_0/2\Sigma_{y^3} - \Sigma_{y^2}^3/27\Sigma_{y^3}^3 - \Delta_1/18]^{1/3}, \\
\Delta_3 &= [\Sigma_{y^2}(\Sigma_y - 1)/6\Sigma_{y^3}^2 - \Sigma_0/2\Sigma_{y^3} - \Sigma_{y^2}^3/27\Sigma_{y^3}^3 + \Delta_1/18]^{1/3}.
\end{aligned}
$$

Pontos fixos de um modelo polinomial NARX

- Substituindo os coeficientes de agrupamentos calculados no exemplo 23, os pontos fixos do modelo podem ser facilmente calculados como sendo (1,150; -1,155; 0,078).

Pontos fixos de um modelo polinomial NARX

- Substituindo os coeficientes de agrupamentos calculados no exemplo 23, os pontos fixos do modelo podem ser facilmente calculados como sendo (1,150; -1,155; 0,078).
- Pelo fato de o agrupamento Ω_{y^3} ser o agrupamento do sinal de saída de mais alto grau, e porque $\Sigma_0 \neq 0$, a versão autônoma do modelo (-8) tem três pontos fixos não triviais, como já era esperado.

Estabilidade de pontos fixos

Um modelo polinomial NAR de ordem n_y pode ser representado como um mapa $f: \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ da seguinte forma:

$$\mathbf{y}(k) = f(\mathbf{y}(k-1)),$$

sendo que $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de estado, ou

$$\begin{bmatrix} y(k-n_y+1) \\ y(k-n_y+2) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{f_1}{y(k-n_y)} & \frac{f_2}{y(k-n_y+1)} & \dots & \frac{f_{n_y}}{y(k-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k-n_y) \\ y(k-n_y+1) \\ \vdots \\ y(k-1) \end{bmatrix}$$

sendo $f_j/y(k-i)=0$ se $f_j(\cdot)$ não inclui $y(k-i)$ e a matriz não é única. Em outras palavras, há diversas funções $f_j(\cdot)$ tais que $y(k) = f_1 + f_2 + \ldots + f_{n_y}$.

Por outro lado, a matriz jacobiana de f é

$$
\mathrm{D}f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y(k-n_y)} & \frac{\partial f}{\partial y(k-n_y+1)} & \frac{\partial f}{\partial y(k-n_y+2)} & \dots & \frac{\partial f}{\partial y(k-1)} \end{bmatrix}
$$

e é única.

Auto-estrutura de um modelo polinomial NARX

- Avaliando a matriz jacobiana do modelo do exemplo 23 nos pontos fixos calculados no exemplo 29 percebe-se que tais pontos fixos são dois focos e uma sela, respectivamente.

Auto-estrutura de um modelo polinomial NARX

- Avaliando a matriz jacobiana do modelo do exemplo 23 nos pontos fixos calculados no exemplo 29 percebe-se que tais pontos fixos são dois focos e uma sela, respectivamente.
- Mais especificamente, os autovalores da matriz jacobiana do modelo (-8) são -0,601 e 0,942$\pm j$0,185 no ponto fixo 1,150 (foco instável); -0,602 e 0,942$\pm j$0,188 no ponto fixo -1,155 (foco instável) e -0,506, 0,824 e 1,079 no ponto fixo 0,078 (sela).

Simetria de pontos fixos

Tabela 1: Agrupamentos de termos necessários para simetria

ℓ	número de pontos fixos triviais	agrupamentos de termos permitidos no modelo
1	1	Ω_y
2	0	$\Omega_{y^2}\,,\,\Omega_0$
3	1	$\Omega_{y^3}\,,\,\Omega_y$
4	0	$\Omega_{y^4}\,,\,\Omega_{y^2}\,,\,\Omega_0$
4	2	$\Omega_{y^4}\,,\,\Omega_{y^2}$
5	1	$\Omega_{y^5}\,,\,\Omega_{y^3}\,,\,\Omega_y$
5	3	$\Omega_{y^5}\,,\,\Omega_{y^3}$
6	0	$\Omega_{y^6}\,,\,\Omega_{y^4}\,,\,\Omega_{y^2}\,,\,\Omega_0$
6	2	$\Omega_{y^6}\,,\,\Omega_{y^4}\,,\,\Omega_{y^2}$
6	4	$\Omega_{y^6}\,,\,\Omega_{y^4}$

Simetria de pontos fixos

- Considere a equação logística $y(k) = \lambda\, y(k-1) - \lambda\, y(k-1)^2$ que não tem pontos fixos simétricos. O fato de não ter pontos fixos triviais pode ser constatado notando que polinômios quadráticos terão pontos fixos simétricos se $\Sigma_0 \neq 0$, $\Sigma_y = 0$ e $\Sigma_{y^2} \neq 0$.

Simetria de pontos fixos

- Considere a equação logística $y(k) = \lambda\, y(k-1) - \lambda\, y(k-1)^2$ que não tem pontos fixos simétricos. O fato de não ter pontos fixos triviais pode ser constatado notando que polinômios quadráticos terão pontos fixos simétricos se $\Sigma_0 \neq 0$, $\Sigma_y = 0$ e $\Sigma_{y^2} \neq 0$.
- Para a equação logística é claro que $\Sigma_0 = 0$, $\Sigma_y = \lambda$ e $\Sigma_{y^2} = -\lambda$.

Simetria de pontos fixos

- Considere a equação logística $y(k) = \lambda\, y(k-1) - \lambda\, y(k-1)^2$ que não tem pontos fixos simétricos. O fato de não ter pontos fixos triviais pode ser constatado notando que polinômios quadráticos terão pontos fixos simétricos se $\Sigma_0 \neq 0$, $\Sigma_y = 0$ e $\Sigma_{y^2} \neq 0$.
- Para a equação logística é claro que $\Sigma_0 = 0$, $\Sigma_y = \lambda$ e $\Sigma_{y^2} = -\lambda$.
- Por outro lado, a *equação logística ímpar* $y(k) = \lambda\, y(k-1) - \lambda\, y(k-1)^3$ tem $\Sigma_0 = 0$, $\Sigma_y = \lambda$ $\Sigma_{y^2} = 0$ e $\Sigma_{y^3} = -\lambda$ e, de acordo com a terceira linha da Tabela 1, essa equação tem pontos fixos não triviais simétricos em torno de um ponto fixo trivial.

Complementos - Modelos polinomiais NARMAX MIMO

- Seja

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(k) \;&=\; F[\mathbf{y}(k-1),\cdots,\mathbf{y}(k-n_y),\mathbf{u}(k-1),\cdots,\mathbf{u}(k-n_u),\\ &\quad\;\mathbf{e}(k-1),\cdots,\mathbf{e}(k-n_e)]+\mathbf{e}(k),\end{aligned}$$

sendo $F[\cdot]$ uma função vetorial qualquer e

$$\mathbf{y}(k)=\begin{bmatrix} y_1(k)\\ y_2(k)\\ \vdots\\ y_m(k)\end{bmatrix},\mathbf{u}(k)=\begin{bmatrix} u_1(k)\\ u_2(k)\\ \vdots\\ u_r(k)\end{bmatrix},\mathbf{e}(k)=\begin{bmatrix} e_1(k)\\ e_2(k)\\ \vdots\\ e_m(k)\end{bmatrix}$$

que pode ser escrito como m equações escalares, uma para cada *subsistema*.

- como se segue:

$$
\begin{aligned}
y_i(k) \quad = \quad & F_i[y_1(k-1), \cdots, y_1(k-n^i_{y1}), \cdots, y_m(k-1), \cdots, y_m(k-n^i_{ym}), \\
& u_1(k-1), \cdots, u_1(k-n^i_{u1}), \cdots, u_r(k-1), \cdots, u_r(k-n^i_{ur}), \\
& e_1(k-1), \cdots, e_1(k-n^i_{e1}), \cdots, e_m(k-1), \cdots, e_m(k-n^i_{em})] + \\
& e_i(k), \ i = 1, \cdots, m.
\end{aligned}
$$

- como se segue:

$$\begin{aligned} y_i(k) \quad = \quad & F_i[y_1(k-1), \cdots, y_1(k-n_{y1}^i), \cdots, y_m(k-1), \cdots, y_m(k-n_{ym}^i), \\ & u_1(k-1), \cdots, u_1(k-n_{u1}^i), \cdots, u_r(k-1), \cdots, u_r(k-n_{ur}^i), \\ & e_1(k-1), \cdots, e_1(k-n_{e1}^i), \cdots, e_m(k-1), \cdots, e_m(k-n_{em}^i)] + \\ & e_i(k), \; i = 1, \cdots, m. \end{aligned}$$

- No caso de $F[\cdot]$ ser aproximado por uma função vetorial polinomial de grau ℓ tem-se para o i-ésimo subsistema

$$y_i(k) = \theta_0^i + \sum_{i_1=1}^{M_r} \theta_{i_1}^i x_{i_1}(k) + \sum_{i_1=1}^{M_r} \sum_{i_2=i_1}^{M_r} \theta_{i_1 i_2}^i x_{i_1}(k) x_{i_2}(k) + \cdots$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{M_r} \cdots \sum_{i_\ell=i_{\ell-1}}^{M_r} \theta_{i_1 \cdots i_\ell}^i x_{i_1}(k) \cdots x_{i_\ell}(k) + e_i(k), \quad i = 1, \cdots, m$$

para $i = 1, \ldots, m$, sendo que θ_i são os parâmetros a estimar, x_i os monômios que compõem os regressores, y_i a saída do i-ésimo subsistema e $e_i(k)$ é o erro da equação de regressão desse subsistema, e $M_r = m(n_y + n_e) + r \times n_u$.

Estimação de derivadas

- Seja um sinal amostrado $y(k)$. Primeiramente deve-se obter uma aproximação polinomial g_n do sinal de interesse numa (normalmente estreita) janela de tempo. Matematicamente, tem-se

$$y(k) \approx g_n, \quad k_\mathrm{i} \leq k \leq k_\mathrm{f},$$

sendo o caso polinomial

$$g_n = \alpha_0 + \alpha_1 k + \ldots + \alpha_{n-1} k^{n-1} + \alpha_n k^n.$$

- A fim de estimar α_i pode ser usada a seguinte equação de regressão

$$y(k) = \alpha_0 + \alpha_1 k + \ldots + \alpha_{n-1} k^{n-1} + \alpha_n k^n + e(k),$$

para $k_\mathrm{i} \leq k \leq k_\mathrm{f}$ e sendo $e(k)$ o erro de regressão.

- A fim de estimar α_i pode ser usada a seguinte equação de regressão

$$y(k) = \alpha_0 + \alpha_1 k + \ldots + \alpha_{n-1} k^{n-1} + \alpha_n k^n + e(k),$$

para $k_\mathrm{i} \leq k \leq k_\mathrm{f}$ e sendo $e(k)$ o erro de regressão.

- Portanto, tomando-se $k_\mathrm{f} - k_\mathrm{i} + 1$ restrições chega-se a:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y(k_\mathrm{i}) \\ \vdots \\ y(k_\mathrm{f}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & k_\mathrm{i} & \ldots & k_\mathrm{i}^{n-1} & k_\mathrm{i}^{n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 1 & k_\mathrm{f} & \ldots & k_\mathrm{f}^{n-1} & k_\mathrm{f}^{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{bmatrix} \\
\mathbf{y} &= X\boldsymbol{\theta},
\end{aligned}$$

e $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [X^\mathrm{T} X]^{-1} X^\mathrm{T} \mathbf{y}$.

- Finalmente, as estimativas das derivadas de $y(k)$ podem ser obtidas derivando-se a aproximação polinomial analiticamente e avaliando as funções resultantes no ponto de interesse, k_0, ou seja

$$\begin{aligned}
\hat{\dot{y}}(k_0) &\approx \left.\frac{d\,g_n}{dk}\right|_{k=k_0} = \hat{\alpha}_1 + \ldots + (n-1)\hat{\alpha}_{n-1}k_0^{n-2} + n\hat{\alpha}_n k_0^{n-1} \\
\hat{\ddot{y}}(k_0) &\approx \left.\frac{d^2\,g_n}{dk^2}\right|_{k=k_0} = \hat{\alpha}_2 + \ldots + (n-2)(n-1)\hat{\alpha}_{n-1}k_0^{n-3} + (n-1)n\hat{\alpha}_n k_0^{n-}
\end{aligned}$$

e assim por diante.

Pontos fixos estimados de dados reais

- O primeiro conjunto de dados considerado foi o atrator dupla-volta. A série temporal original tem $N = 5.000$ valores amostrados com $T_{\mathrm{s}} = 2\mu$s. Nesse caso escolheu-se $L = 900$ e $\Delta = 5$. Os pontos fixos estimados com a matriz Ψ incluindo todos os agrupamentos foram:
$\{-2,25 \pm 0,02;\ 0,03 \pm 0,13;\ 2,15 \pm 0,02\}$ V.

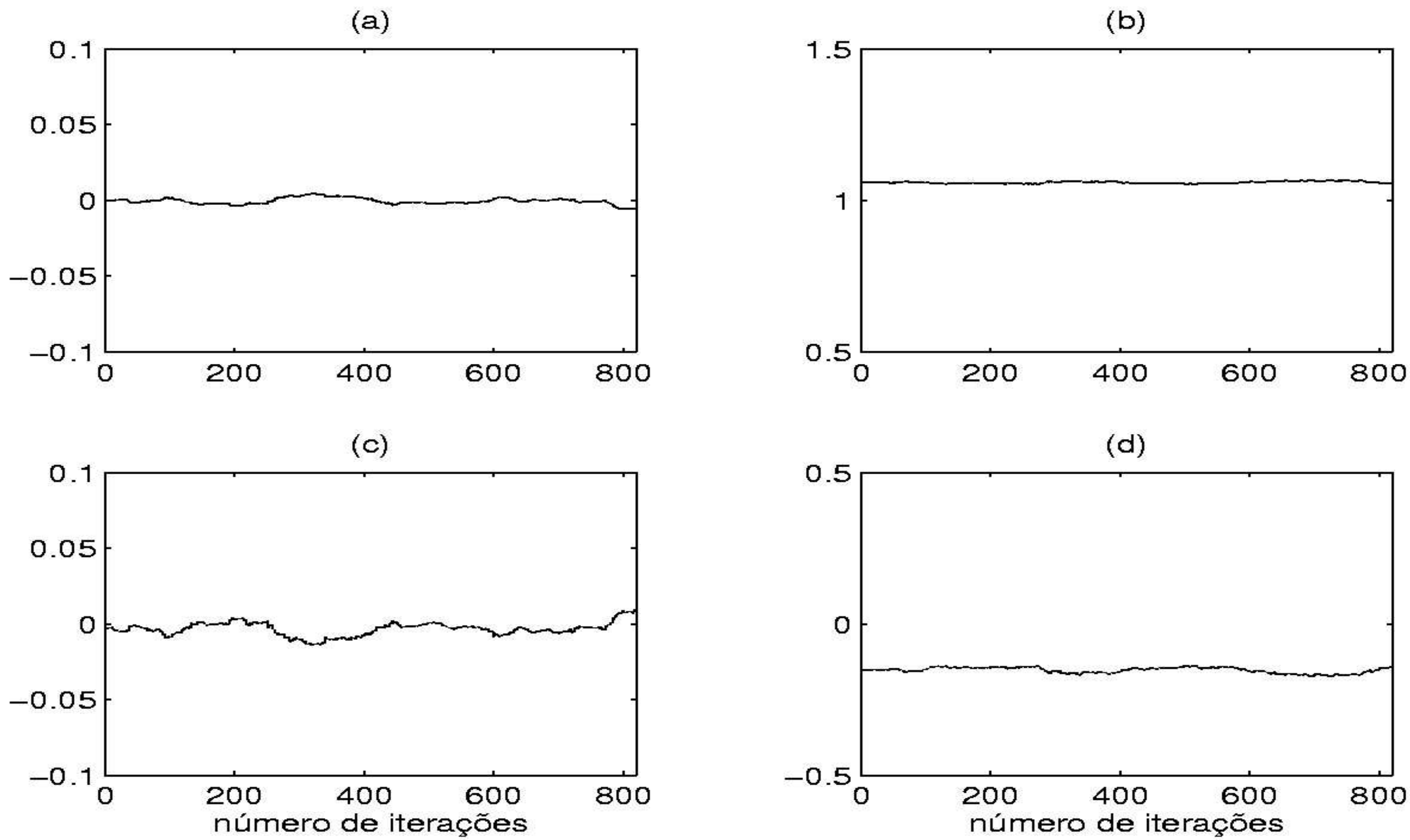

Figura 3: Coeficientes de agrupamentos estimados a partir de dados sobre o atrator dupla-volta (dsvc1). (a) Σ_0, (b) Σ_y, (c) Σ_{y^2}, (d) Σ_{y^3}.

- A Figura 3 claramente revela que os agrupamentos Ω_0 e Ω_{y^2} são espúrios. Portanto, eliminando-se as colunas de Ψ correspondentes aos agrupamentos espúrios Ω_0 e Ω_{y^2}, os seguintes pontos fixos *simétricos* foram estimados: $\{\pm 2,20 \pm 0,01p;\ 0,00\}$ V.

- A Figura 3 claramente revela que os agrupamentos Ω_0 e Ω_{y^2} são espúrios. Portanto, eliminando-se as colunas de Ψ correspondentes aos agrupamentos espúrios Ω_0 e Ω_{y^2}, os seguintes pontos fixos *simétricos* foram estimados: $\{\pm 2,20 \pm 0,01p;\ 0,00\}$ V.
- A seguir, 3.000 observações foram tomadas do atrator espiral do mesmo oscilador eletrônico (spivc1 @). Os seguintes valores foram usados $T_\mathrm{s} = 20\mu$ s, $L = 900$ e $\Delta = 5$.

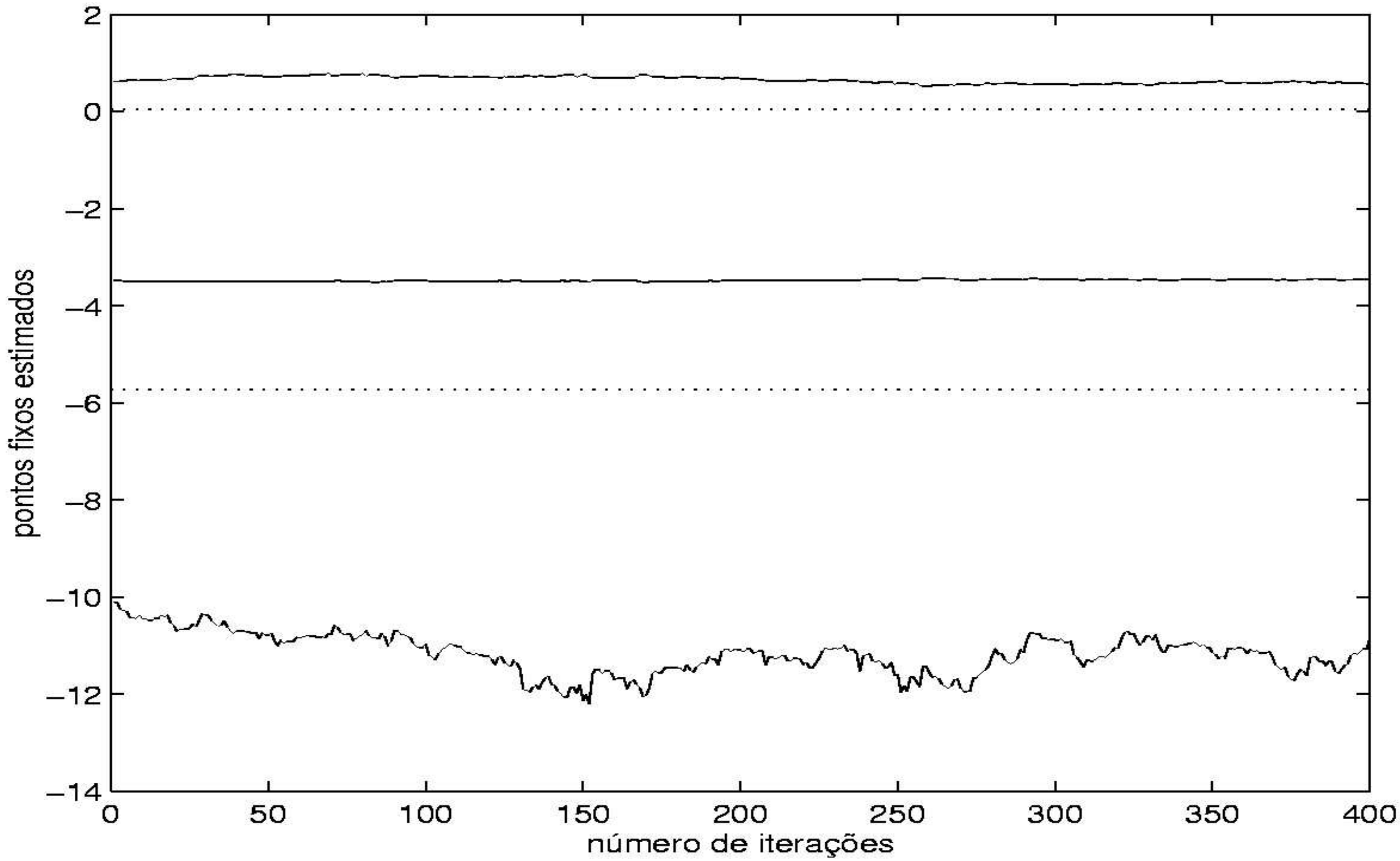

Figura 4: Pontos fixos estimados a partir de dados do atrator espiral. As linhas tracejadas indicam a faixa em que se encontram os dados medidos.

- A variância de um ponto fixo é muito maior do que a dos demais, além de os valores estimados estarem fora dos limites dos dados (aproximadamente -6 e 0). Pode-se concluir que o algoritmo pode estimar corretamente apenas dois pontos fixos e, portanto, as colunas de Ψ que correspondem a Ω_{y^3} devem ser removidas. Fazendo-se isso, os seguintes pontos fixos foram finalmente estimados: $\{-3,65 \pm 0,02; 0,00\}$ V.

Características estáticas de modelos ARX e NARX

- Considere os seguintes modelos obtidos de (mydin2 @)

$$
\begin{aligned}
y(k) \;&=\; 1,3817\, y(k-1) + 0,0411\, u(k-1) - 0,4296\, y(k-2) \\
&\quad -0,0077\, u(k-2) + \xi(k),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(k) \;&=\; 1,3920\, y(k-1) + 0,0454\, u(k-1)^2 - 0,4235\, y(k-2) \\
&\quad -0,4388\, y(k-1)u(k-2) + 0,3756\, y(k-2)u(k-2) \\
&\quad +0,0218\, u(k-2)^2 + 0,0097 u(k-1)u(k-2) + \xi(k).
\end{aligned}
$$

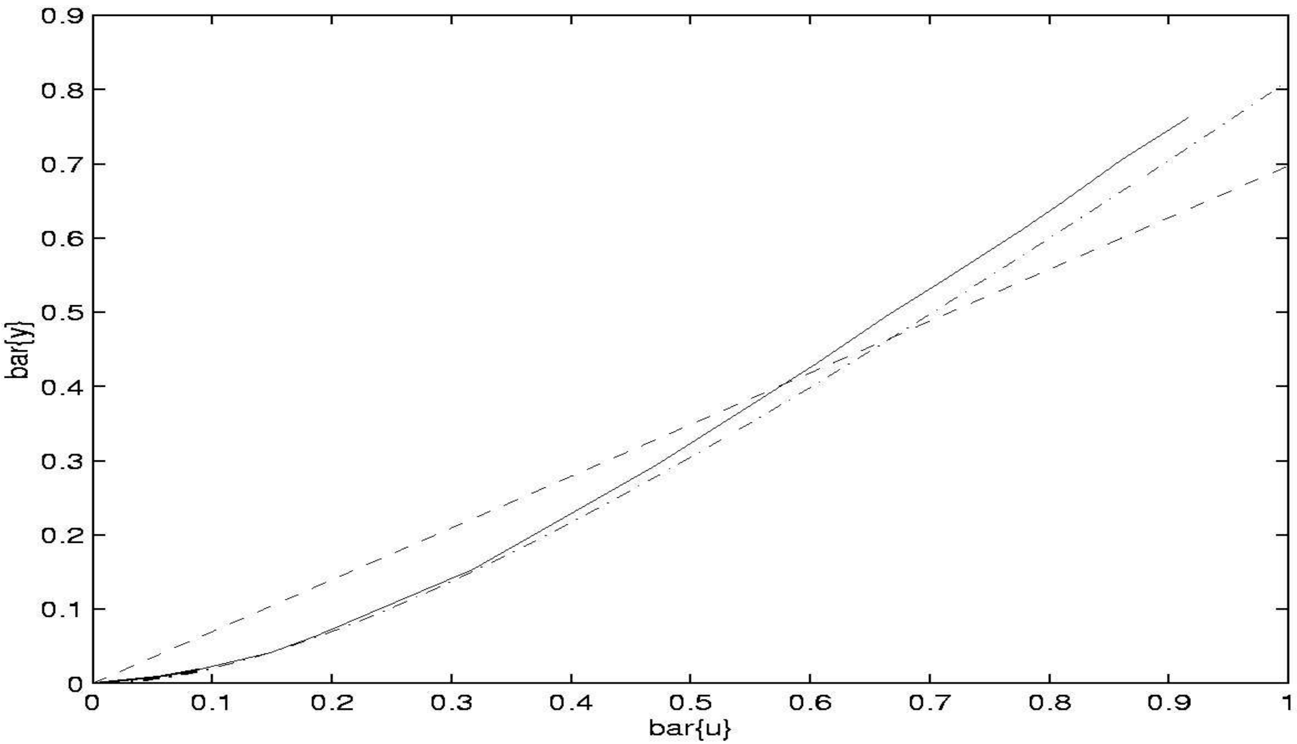

Figura 5: Características estáticas de um pequeno aquecedor elétrico. $\bar{u}$ é o valor em volts em estado estacionário da tensão elétrica da entrada e $\bar{y}$ é o valor em p.u. correspondente à temperatura atingida em estado estacionário. Característica estática (—) medida em teste estático, (- -) do modelo linear e $(- \cdot -)$ do modelo não-linear.