

# Identificação de Sistemas Dinâmicos

1º Sem. 2012

---

Adolfo Bauchspiess



Laboratório de Automação e Robótica  
Departamento de Engenharia Elétrica  
Faculdade de Tecnologia  
Universidade de Brasília



# Sumário

---

## I. Introdução

## II. Sinais e Sistemas Dinâmicos

## III. Algoritmos

- a. Métodos Determinísticos
- b. O Estimador de Mínimos Quadrados
- c. Estimadores não polarizados
- d. Estimadores Recursivos

## IV. Identificação na Prática

- a. Processo Térmico
- b. Nível de Líquido 2<sup>a</sup> Ordem
- c. Nível de Líquido 4<sup>a</sup> Ordem

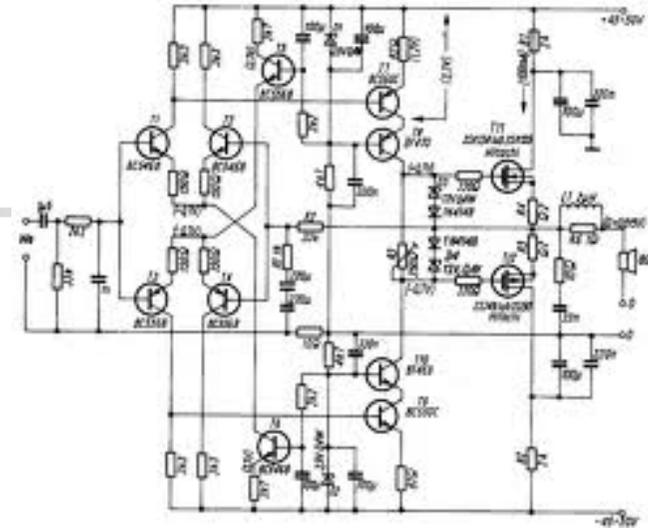
## V. Conclusões



# 1 - INTRODUÇÃO



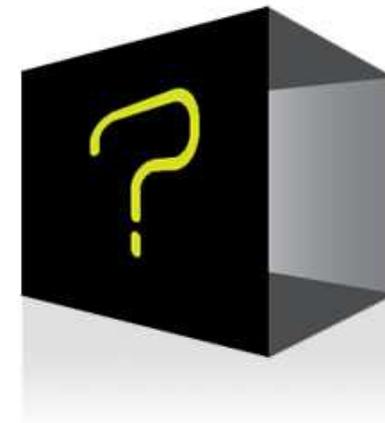
# I - Introdução

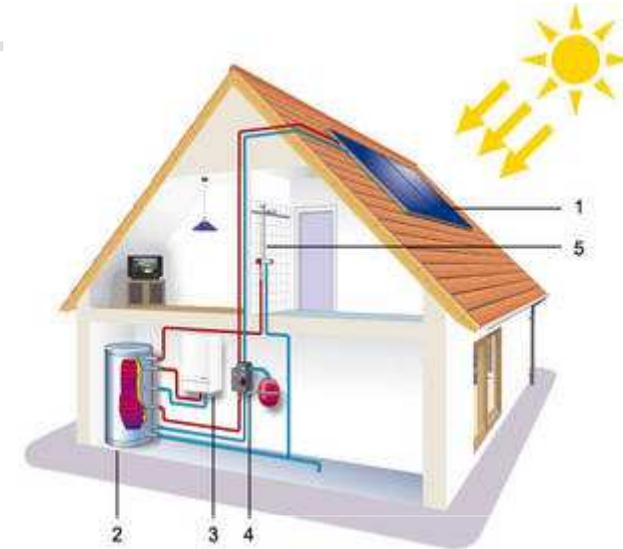
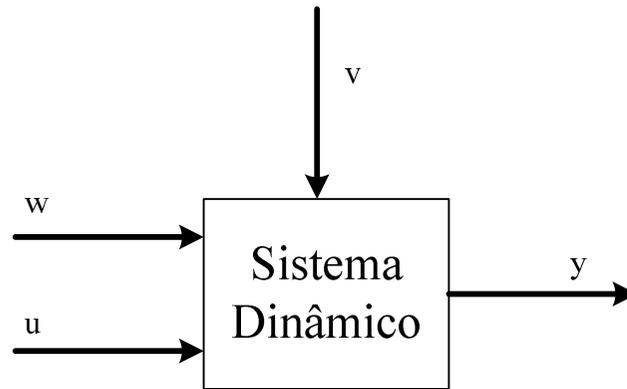


Modelos:

- Caixa Branca
- Caixa Preta
- Caixa Cinza

➤ Identificação de Sistemas





Sinais:

$u$  - entrada (variável manipulada)

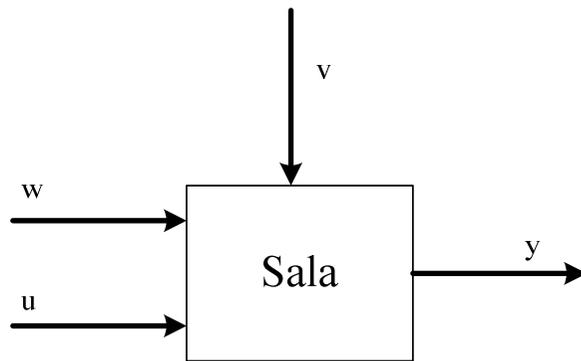
$y$  - saída (variável controlada)

$w$  - perturbação mensurável

$v$  - perturbação não mensurável



# Exemplo – Conforto Térmico



Sinais:

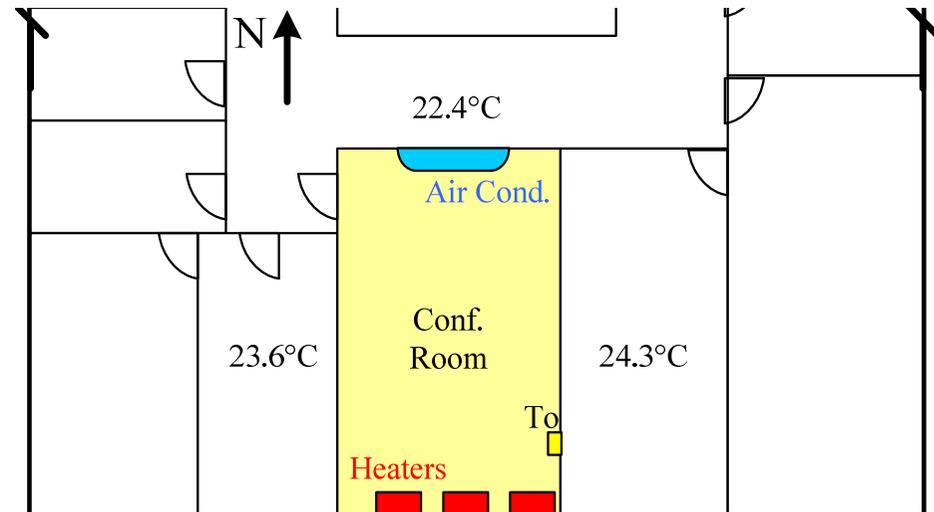
$u$  – ar condicionado, calefação

$y$  – temperatura

$w$  – temperatura externa

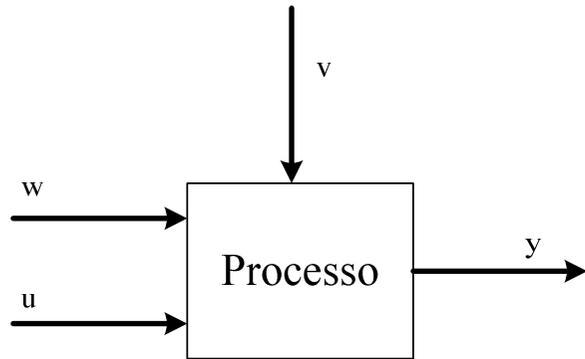
$v$  – radiação solar

Sistema:





# Exemplo – Processo de nível



Sinais:

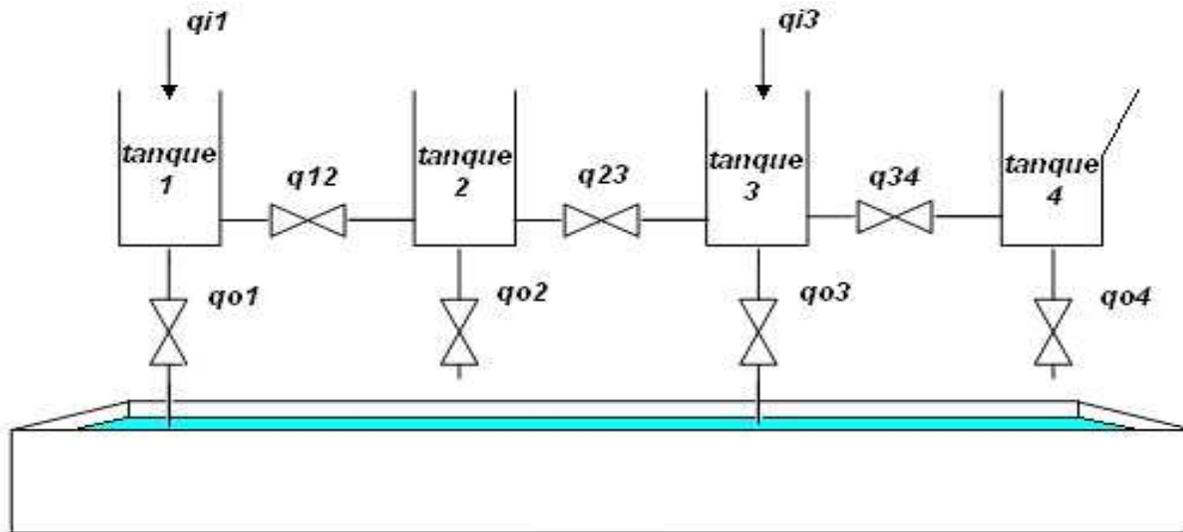
$u - qi1$ , vazão [ $\text{cm}^3/\text{s}$ ]

$y - \text{nível}$  [cm]

$w - qi3$

$v - ?$

Sistema:





# Exemplo – Helicóptero

Sistema:

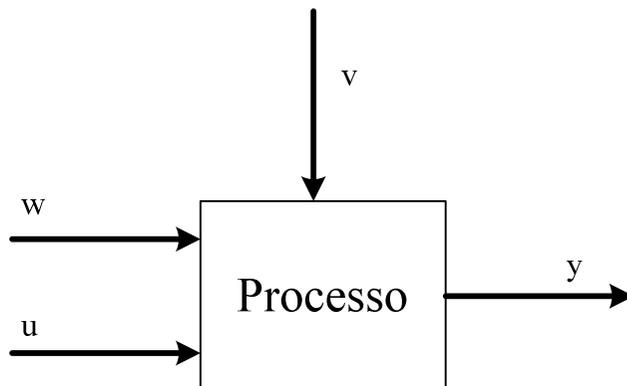
Sinais:

$u$  – motores

$y$  – posição e orientação

$w$  – ?

$v$  – vento





# Principais Etapas numa Identificação

- ✓ Coleta de dados
- ✓ Escolha da representação matemática
- ✓ Determinação da estrutura
- ✓ Estimação dos parâmetros
- ✓ Validação





---

# II – SINAIS E SISTEMAS DINÂMICOS



## II. Sinais e Sistemas Dinâmicos

---

Breve revisão de conceitos vistos em  
Análise Dinâmica Linear, Controle Dinâmico e Controle Digital

- Sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo
- Sistemas discretos
- Sistemas não-lineares
- Sistemas a parâmetros distribuídos
- Paradigmas de controle de sistemas dinâmicos



# Tipos de Modelos

---

- Estáticos x Dinâmicos
- Discretos x Contínuos
- Autônomos x Não autônomos
- Monovariáveis x Multivariáveis
- Determinísticos x Estocásticos
- Paramétricos x Não paramétricos



# Sistemas lineares invariantes no tempo

---

- Princípio da superposição
- Função de transferência

Todos os sistemas reais são não lineares:

- Saturação
- Zona-Morta
- Dependência do ponto de operação
- etc



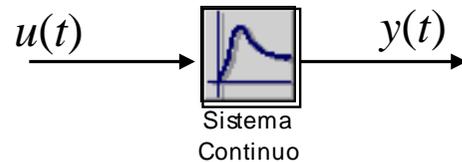
# Sistemas Discretos

---

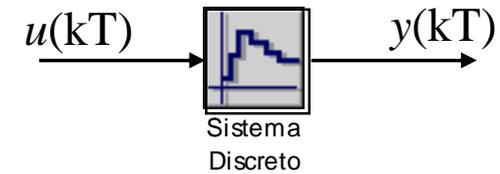
- Amostragem
- Transformada  $z$
- Computadores, CLPs, Microcontroladores & etc
  
- Identificação de Sistemas
  - utiliza amostras dos sinais



# Sistemas LTI discretos



$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} h_c(\tau)u(t-\tau)d\tau$$



$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(t-k), \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

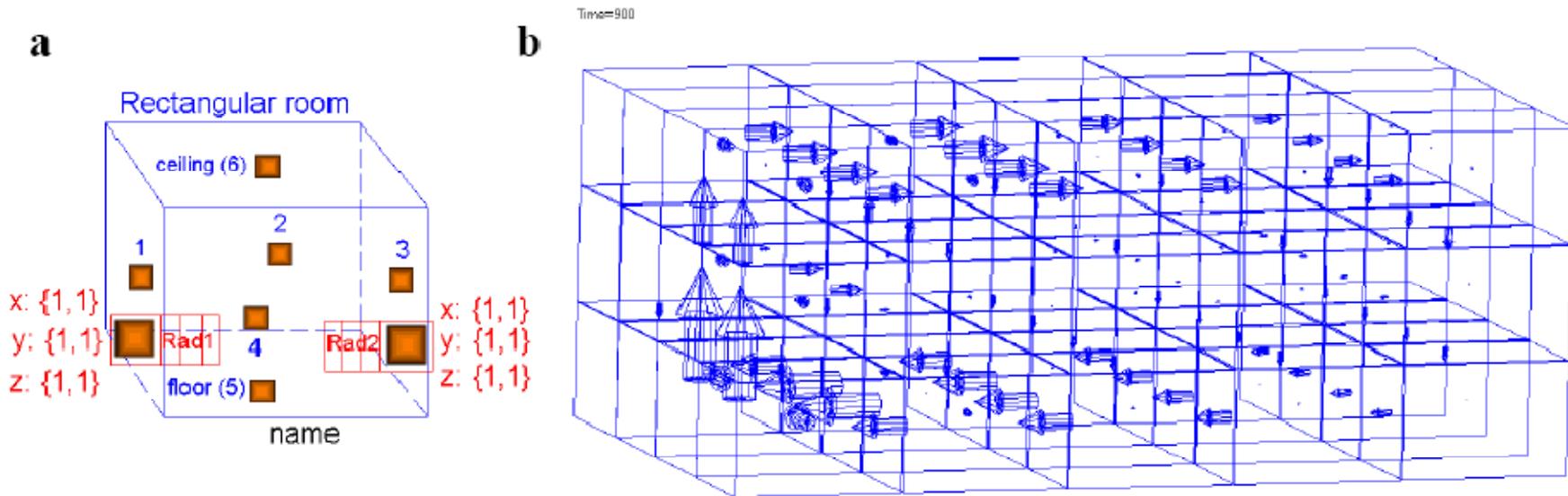
$$H(q) = \sum_{t=0}^{\infty} h(k)q^{-t} \rightarrow \text{Função de Transferência}$$

Obs:  $q^{-1}$  operador deslocamento unitário  
 $z$  frequência discreta

# Sistemas a Parâmetros Distribuídos

- Fenômenos de Transporte
- Exemplo: Transferência de Calor

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = K \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$



Simulação da velocidade do vento em Modelica, por Felgner, ASIM2002

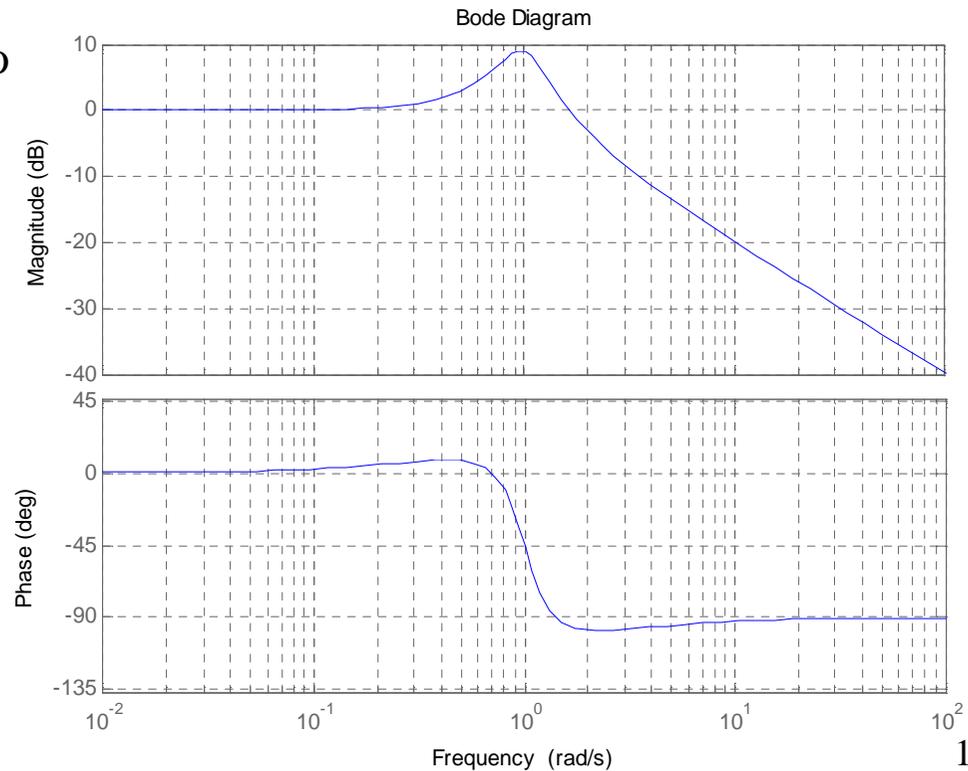
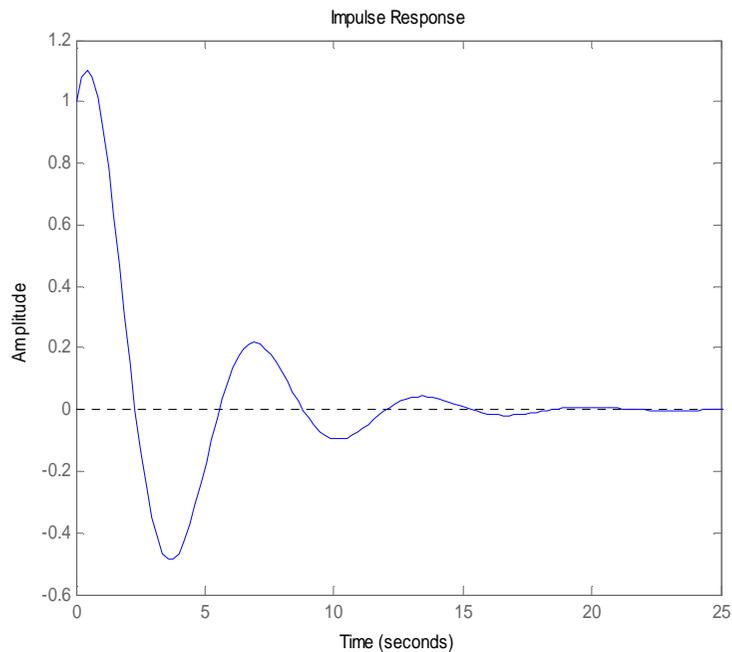


# Modelo Paramétrico x Modelo Não P.

$$H(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 0,5s + 1} \quad \text{Modelo Paramétrico}$$

## Modelo Não Paramétrico: Diagrama de Bode

## Modelo Não Paramétrico: Resp. Impulso





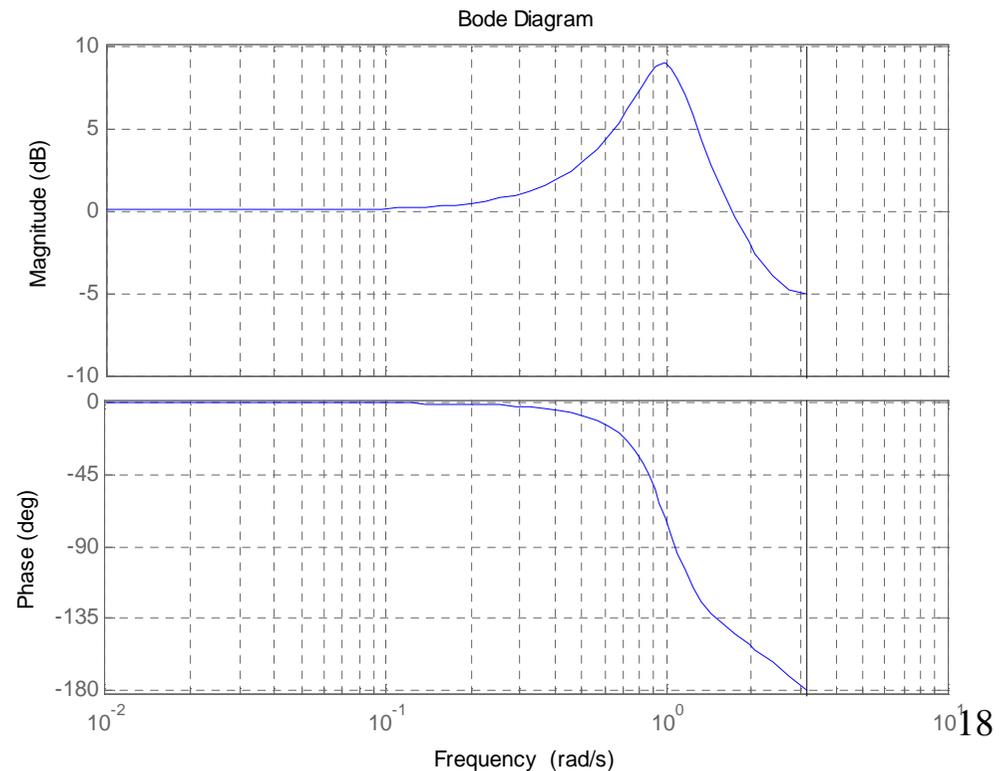
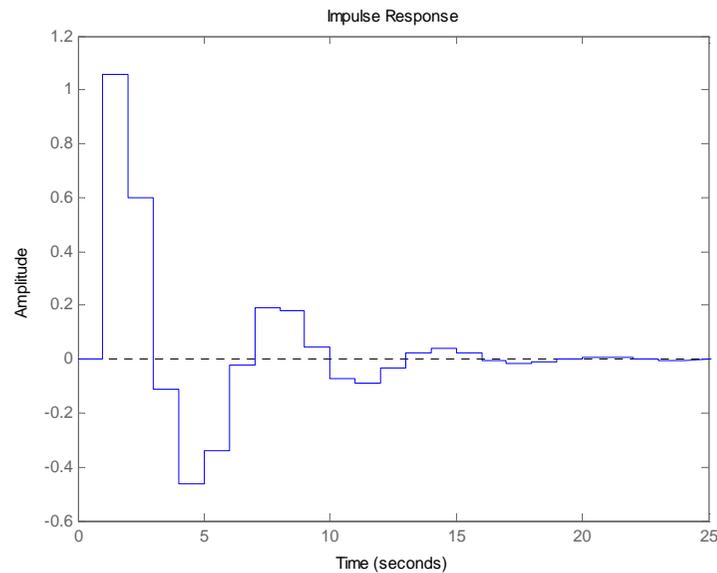
# Modelo Discreto

$$H(z) = \frac{1,056z - 0,3319}{z^2 - 0,8828z + 0,6065}$$

Modelo Paramétrico Discreto

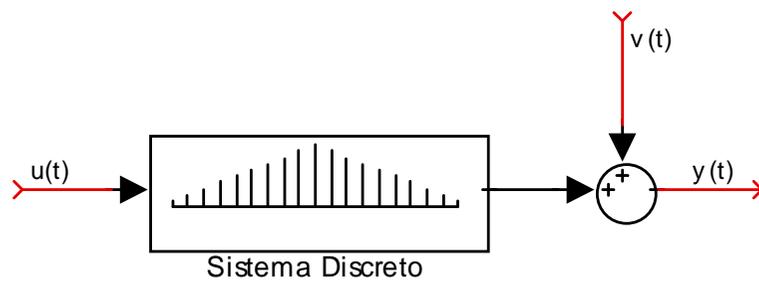
## Modelo Não Paramétrico: Diagrama de Bode

### Modelo Não Paramétrico: Resp. pulso

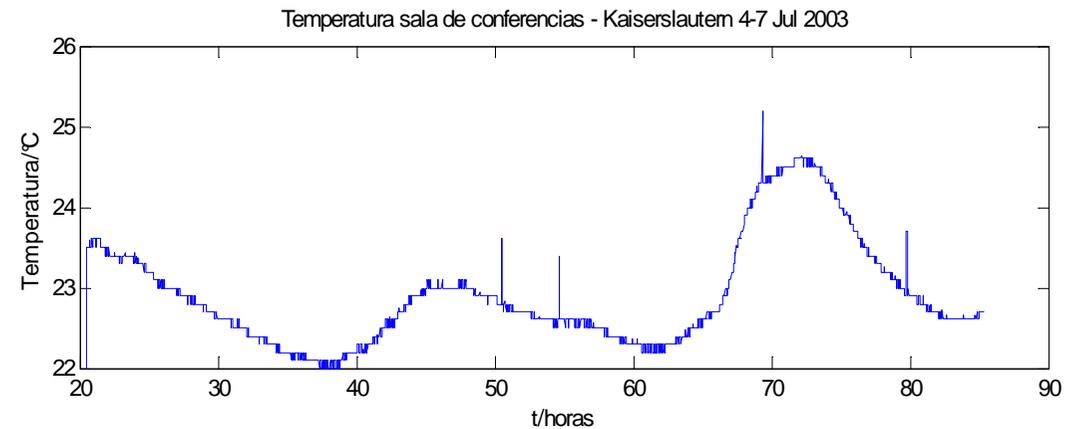
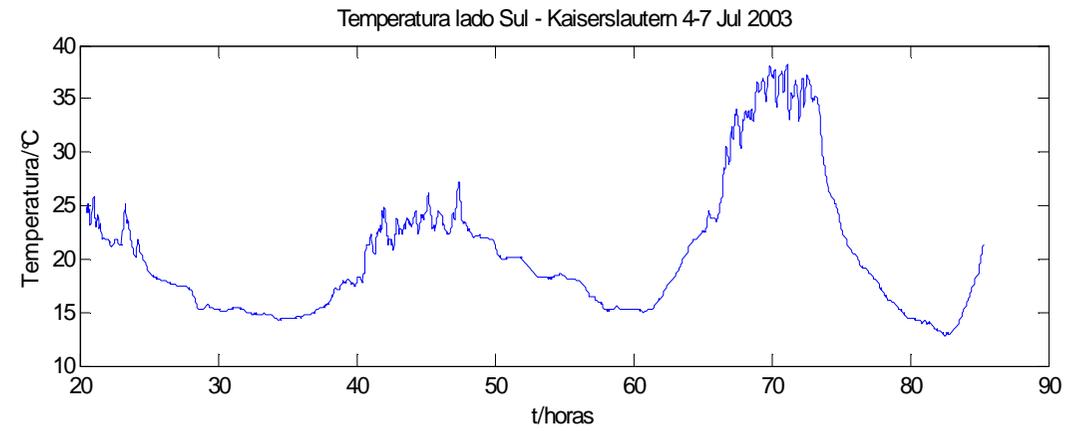




# Perturbações



$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)u(t-k) + v(t)$$



Ex. Temperatura medida com ruído

Causas: ruído de medida, entradas não controláveis



# Caracterização de perturbações

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e(t-k)$$

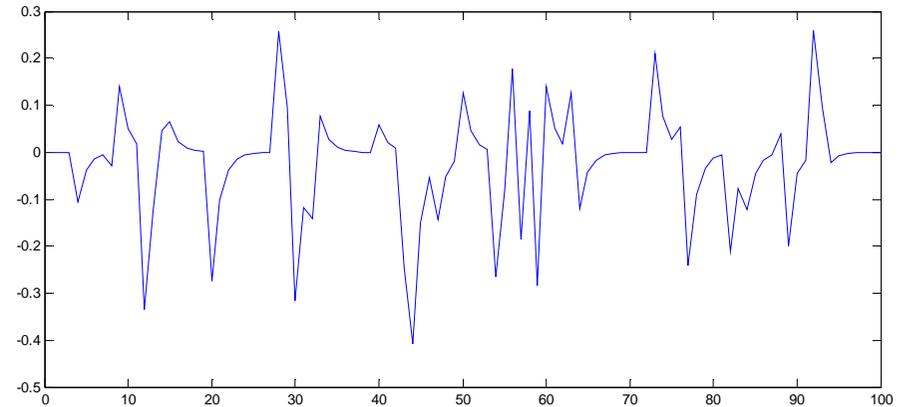
$\{e(t)\} \rightarrow$  ruído branco

Exemplos :  $H(s) = \frac{1}{s+1}$

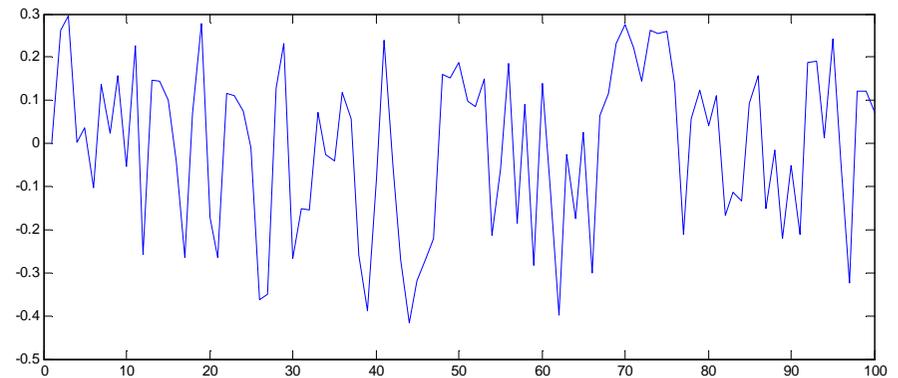
a)  $\left\{ \begin{array}{l} e(t) = 0, \text{ com probabilidade } 1-\mu \\ e(t) = r, \text{ com probabilidade } \mu; r \in N(0, \gamma), \text{ distribuição normal} \end{array} \right.$

b)  $e(t) \in N(0, \gamma)$

a)



b)





# Covariância

Assumindo  $e(t)$  com média 0 e variância  $\lambda$ ,

$$\text{Média: } Ev(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)Ee(t-k) = 0$$

*Covariância:*

$$\begin{aligned} Ev(t)v(t-\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} h(k)h(s)Ee(t-k)e(t-\tau-s) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} h(k)h(s)\delta(t-\tau-s)\lambda \\ &= \lambda \sum_{s=0}^{\infty} h(k)h(k-\tau) \end{aligned}$$

*Covariância do processo  $v$ :  $R_v(\tau) = Ev(t)v(t-\tau)$*



# Funções de Transferência

Resposta do sistema  $\longrightarrow y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)u(t-k) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)q^{-k}u(t) = \left[ \sum_{k=1}^{\infty} g(k)q^{-k} \right] u(t) = G(q)u(t)$

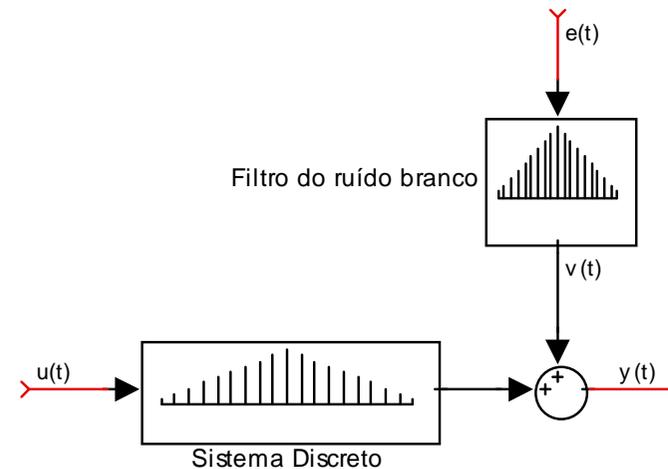
$$G(q) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)q^{-k}$$

Funções de Transf.  $\longrightarrow G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)z^{-k}$

$$H(q) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k}$$

Resposta à perturbação  $\longrightarrow v(t) = H(q)e(t)$

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t)$$



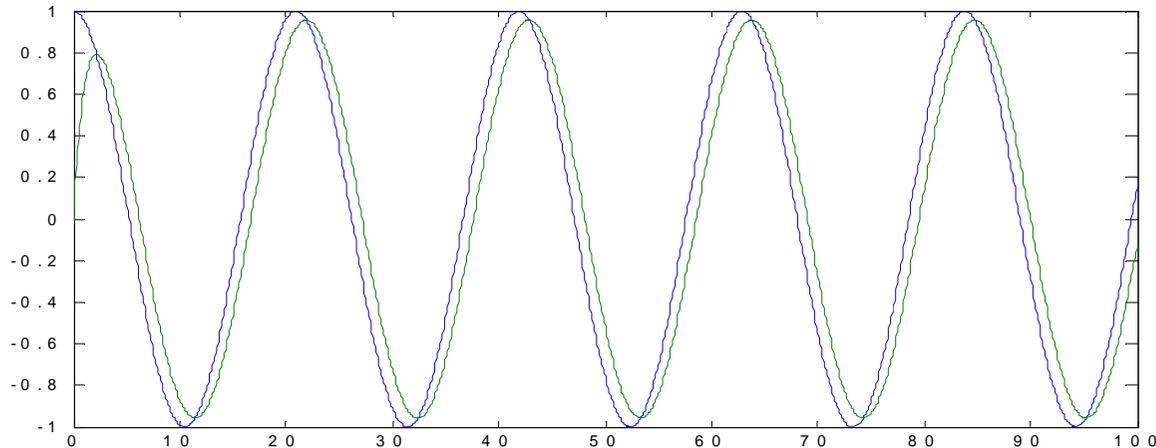
# Resposta no domínio da frequência

$$u(t) = \cos(\omega t) = \text{Re}(e^{i\omega t}) \rightarrow \begin{array}{c} \text{Sistema} \\ \text{Contínuo} \end{array} \rightarrow y(t) = |G(e^{i\omega})| \cos(\omega t + \arg G(e^{i\omega}))$$

para  $u(t) = 0 \quad \forall t < 0$ ,

$$y(t) = |G(e^{i\omega})| \cos(\omega t + \arg G(e^{i\omega})) - \text{Re} \left[ e^{i\omega t} \sum_{k=t}^{\infty} g(k) e^{-i\omega k} \right]$$

$$\underbrace{\leq \sum_{k=t}^{\infty} |g(k)| \rightarrow 0}_{\text{para sistemas estáveis}}$$





# Periodograma

*Sequência finita*  $\{u(t), t = 1, 2, \dots, N\}$

*Transformada de Fourier:*

$$U_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N u(t) e^{-i\omega t}$$

*Transformada de Fourier Discreta:*  $\left\{ U_N\left(\frac{2\pi}{N}k\right), k = 1, 2, \dots, N \right\}$

*(DFT)*

*DFT inversa:*

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1-N/2}^{N/2} U_N\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{i\left(\frac{2\pi}{N}t\right)k}$$

*Parseval:*

$$\sum_{k=1}^N \left| U_N\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \right|^2 = \sum_{t=1}^N |u(t)|^2$$

**Periodograma:**  $|U_N(\omega)|^2$



# Propriedades do Periodograma

---

*periodicidade*  $U_N(\omega + 2\pi) = U_N(\omega)$

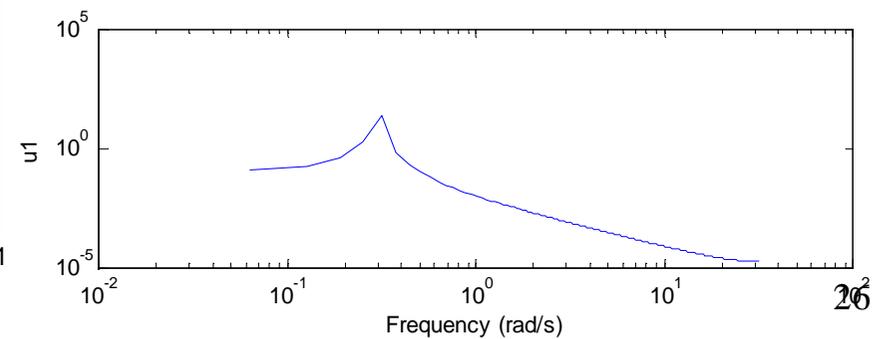
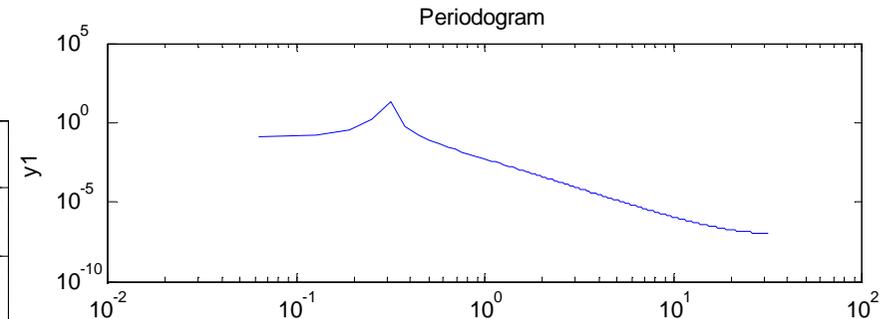
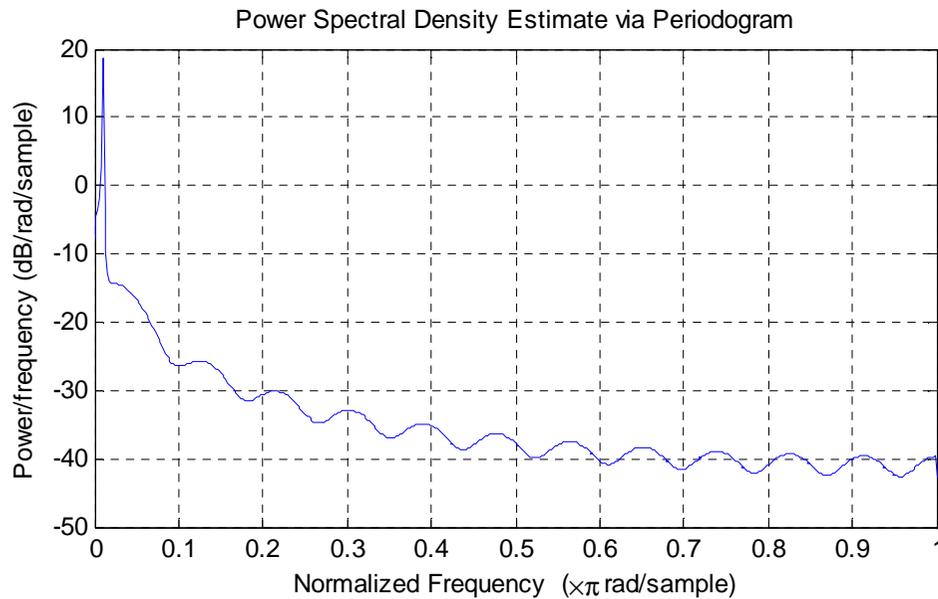
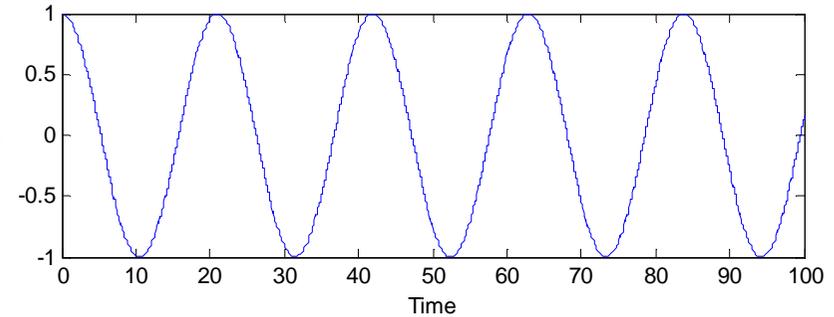
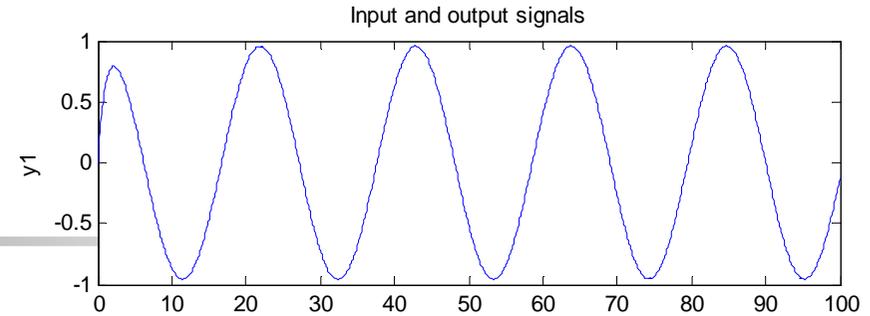
*se  $u(t)$  é real*  $U_N(-\omega) = U_N^*(\omega)$



# Exemplos

$$u(t) = A \cos \omega_0 t, \text{ com } \omega = 2\pi / N_0, N = sN_0$$

$$\rightarrow |U_N(\omega)|^2 = \begin{cases} N \frac{A^2}{4}, & \text{para } \omega = \pm \omega_0 \\ 0, & \text{senão} \end{cases}$$





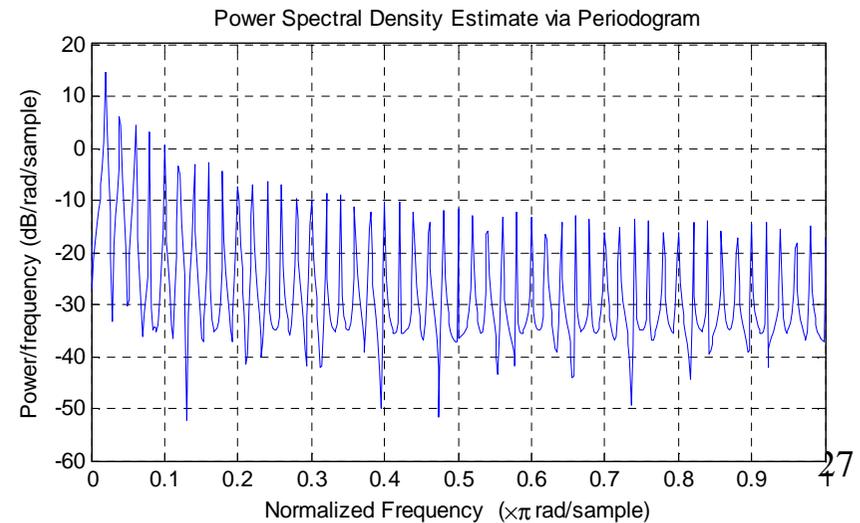
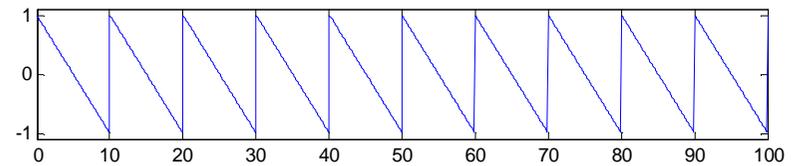
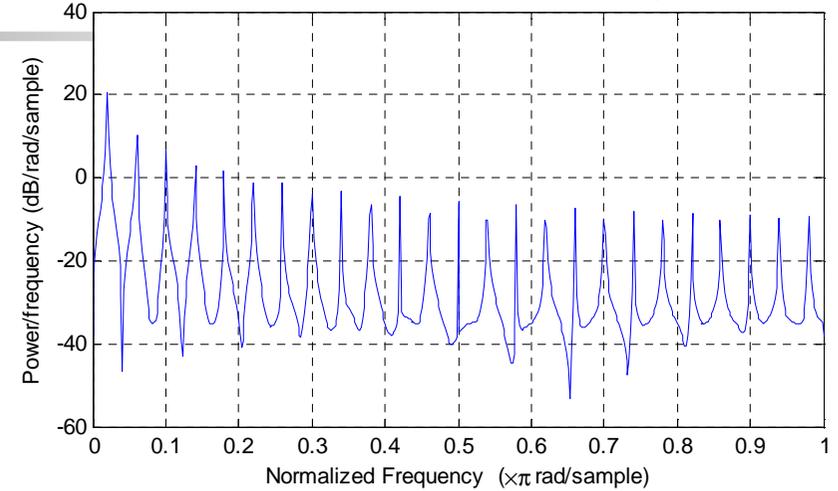
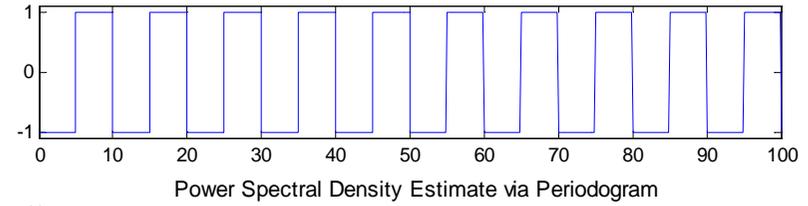
# Sinal Periódico

$$u(t) = u(t + N_0), \quad [1, N], \quad N = sN_0$$

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_{r=-N_0/2+1}^{N_0/2} A_r e^{2\pi i r t / N_0}$$

$$\text{com } A_r = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_{t=1}^{N_0} u(t) e^{-2\pi i r t / N_0}$$

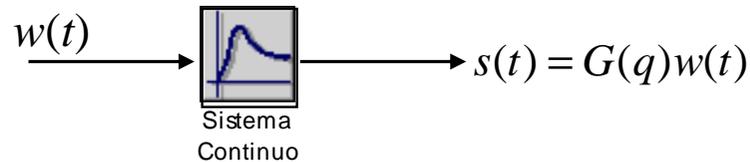
$$|U_N(\omega)|^2 = \begin{cases} s|A_r|^2, & \text{se } \omega = \frac{2\pi k}{N_0}, \\ 0, & \text{senão} \end{cases} \quad r = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{N_0}{2}$$





# Filtro ou Sistema Dinâmico: → Transformada de Fourier

$\{s(t)\}$  e  $\{w(t)\}$  são relacionados por um sistema estritamente estável



$$S_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N s(t) e^{-i\omega t}$$

$$W_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N w(t) e^{-i\omega t}$$

$$S_N(\omega) = G(e^{i\omega})W_N(\omega) + R_N(\omega)$$

onde  $|R_N(\omega)| \leq 2C_w \frac{C_G}{\sqrt{N}}$ ,

com  $C_G = \sum_{k=1}^{\infty} k|g(k)|$



# Processos Estocásticos

- Uma seqüência de variáveis aleatórias com uma pdf conjunta
- Definições:

$$m_x(t) = Ex(t) = \textit{média}$$

$$R_x(t) = Ex(t_1)x^T(t_2) = \textit{correlação}$$

$$C_x(t_1, t_2) = E(x(t_1) - m_x(t_1))(x(t_2) - m_x(t_2))^T = \textit{covariância}$$

$$R_{xy}(t) = Ex(t_1)y^T(t_2) = \textit{correlação cruzada}$$

$$\textit{Var}(x(t)) = R_x(t, t) - E^2(x(t)) = \textit{variância}$$



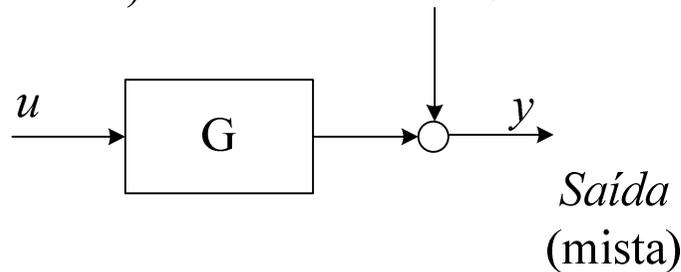
# Estacionariedade

$x(t)$  é estacionário no sentido amplo (WSS) se:

$$\begin{cases} m_x(t) = m_x = \text{constante} \quad \forall t \\ R_x(t_1, t_2) = R_x(t_1 - t_2) \end{cases}$$

*Experimento*  
(*determinístico*)

*Ruído*  
 $n$  (estocástico)



$$Ey(t) = G(q)u(t) \quad (\neq \text{cte}) \rightarrow \text{não é mais estacionário}$$



# Processos quasi-estacionários

$$1) E s(t) = m_s(t) \quad |m_s(t)| \leq C \quad \forall t$$

$$2) E s(t)s(r) = R_s(t, r) \quad |R_s(t, r)| \leq C$$

$$e \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N R_s(t, t - \tau) = R_s(\tau) \quad \forall \tau$$

Se  $s(t)$  é um processo estacionário, então satisfaz 1 e 2.  
Se  $s(t)$  é determinístico então:

$$1) |s(t)| \leq C$$

$$2) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N s(t)s(t - \tau) = R_s(\tau)$$



# Exemplo

$s(t)$  tem energia finita

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t)u(t-\tau) \right| \leq \frac{1}{N} \|u\|_2^2 \rightarrow 0 \quad N \rightarrow \infty$$

em geral

$$s(t) = x(t) + u(t)$$

*estocástico + determinístico*

$$\text{Notação : } \bar{E}(\cdot) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\cdot)$$

$$\text{Situação quasi-estacionária} \Rightarrow \bar{E}s(t) = m_s = cte$$

$$\bar{E}s(t)s(\tau) = R_s(t-\tau)$$

$$\bar{E}s(t) = m_x + m_u$$

$$\bar{E}s(t)s(t-\tau) = R_x(\tau) + R_u(\tau) + 2m_x m_u$$



# Espectro de Potência

Para um processo quasi-estacionário:

$$\Phi_x(e^{i\omega}) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau}$$

(Transformada de Fourier de  $R_x(\tau)$ )

*Exemplo: Sinal Senoidal*  $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$

$$R_x(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N A \cos(\omega_0 t) A \cos \omega_0(t - \tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$$

$$\Phi_x(e^{i\omega}) = \frac{A^2}{4} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$



# Espectro de processo estacionário

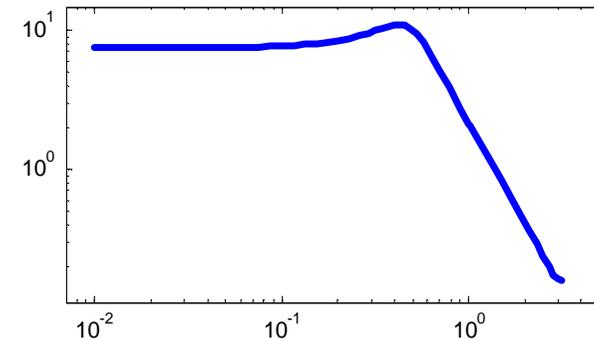
$$E v(t)v(t-\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} h(k)h(s)E e(t-k)e(t-\tau-s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} h(k)h(s)\delta(t-\tau-s)\lambda$$

$$= \lambda \sum_{s=0}^{\infty} h(k)h(k-\tau)$$

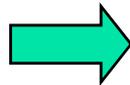
$$\Phi_v(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_v(\tau)e^{-i\omega\tau} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \lambda e^{-i\omega\tau} \sum_{k=\max(0,\tau)}^{\infty} h(k)h(k-\tau)$$

$$= \lambda \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{k=\max(0,\tau)}^{\infty} h(k)e^{-ik\omega}h(k-\tau)e^{-i(k-\tau)\omega}$$

$$= \lambda \sum_{s=0}^{\infty} h(s)e^{-is\omega} \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e^{-ik\omega} = \lambda |H(e^{i\omega})|^2$$



$$\Phi_v(\omega) = \lambda |H(e^{i\omega})|^2$$



Espectro de um processo estocástico descrito por

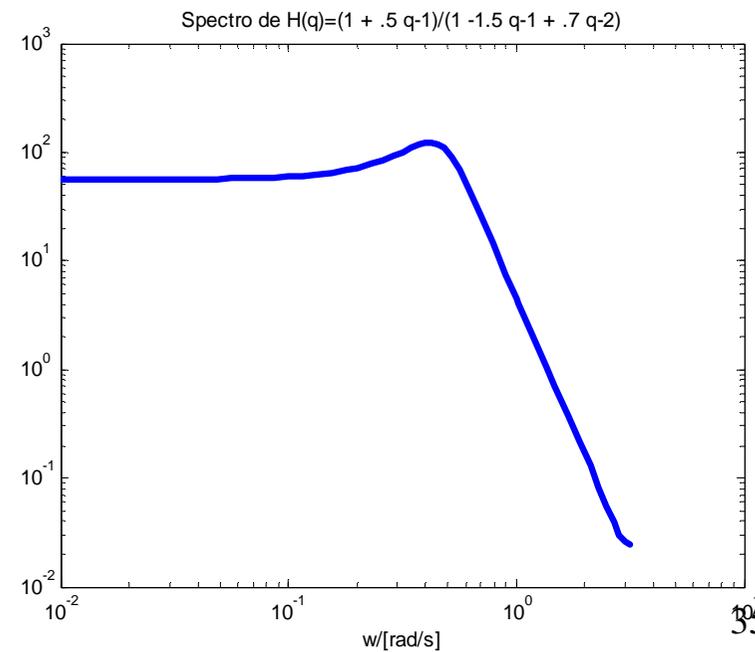
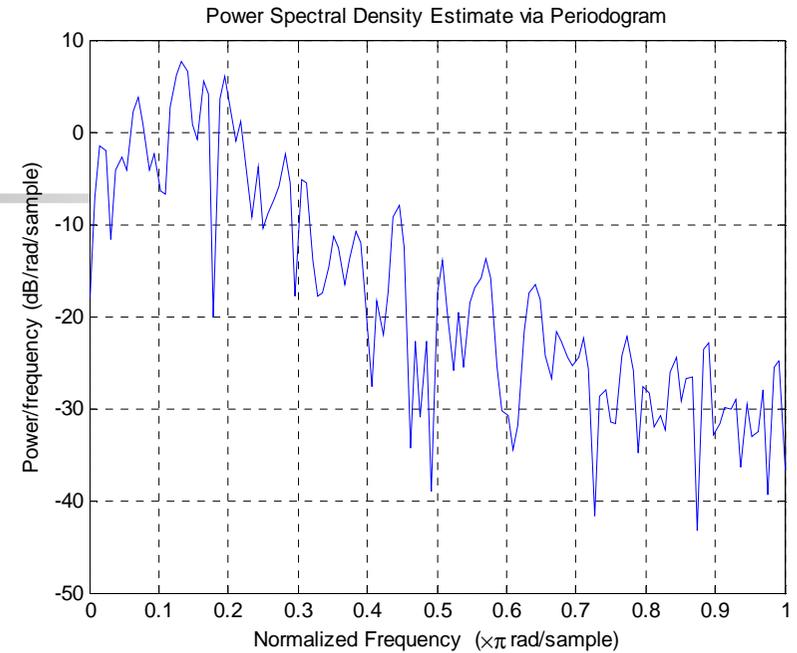
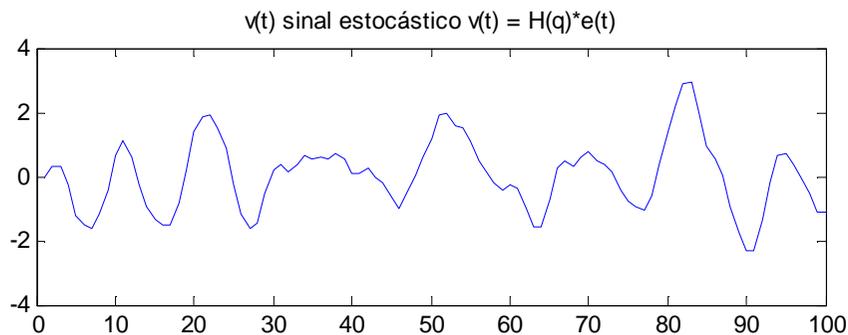
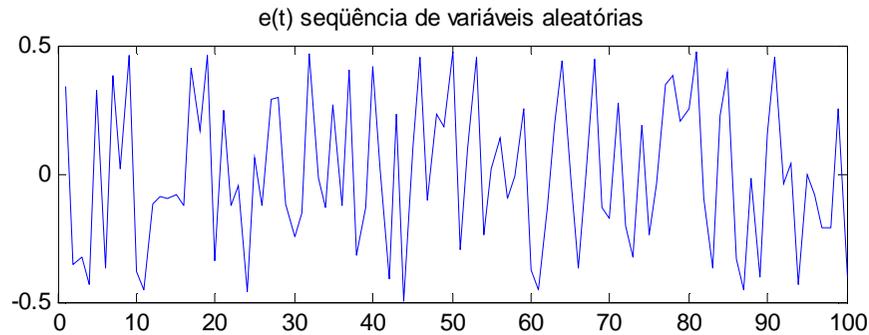
$$v(t) = H(q) e(t),$$

onde a seqüência de variáveis aleatórias  $\{e(t)\}$  tem média 0 e covariância  $\lambda$



# Exemplo: Processo estacionário

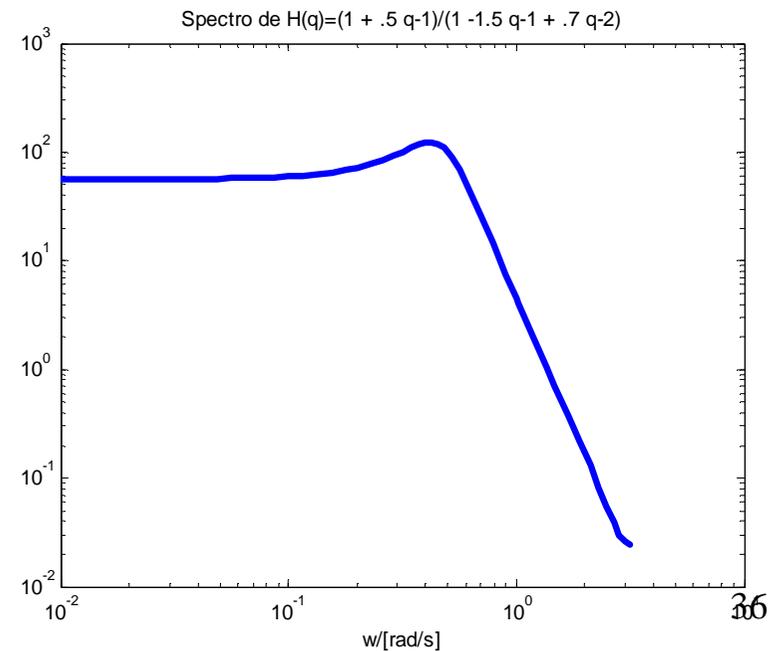
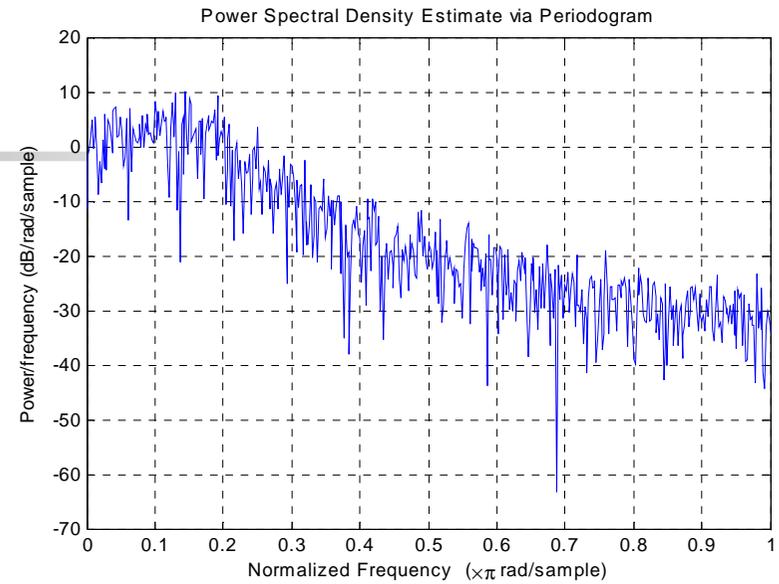
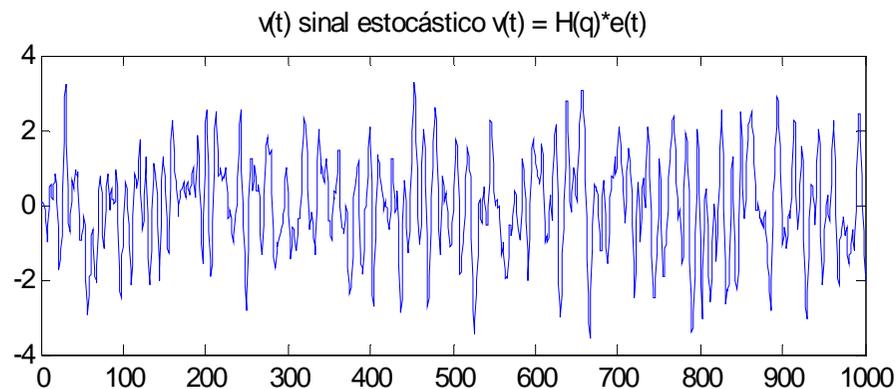
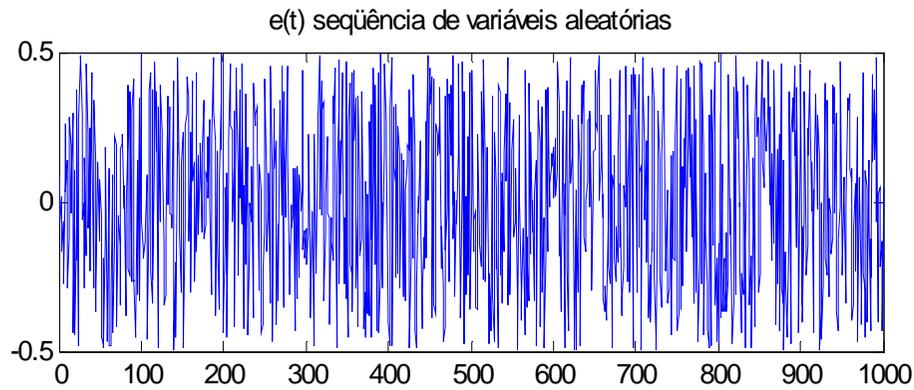
## Periodograma x Espectro





# Exemplo: Processo estacionário

## Periodograma x Espectro





## Sinal misto: determinístico + estocástico

$$s(t) = u(t) + v(t)$$

$\{u(t)\} \rightarrow$  *determinístico, espectro  $\Phi_u(\omega)$*

$\{v(t)\} \rightarrow$  *estocástico, média 0, e espectro  $\Phi_v(\omega)$*

$$\begin{aligned}\bar{E}s(t)s(t-\tau) &= \bar{E}u(t)u(t-\tau) + \bar{E}u(t)v(t-\tau) \\ &\quad + \bar{E}v(t)u(t-\tau) + \bar{E}v(t)v(t-\tau) \\ &= R_u(\tau) + R_v(\tau)\end{aligned}$$

pois  $\bar{E}v(t)u(t-\tau) = 0$ .

$$\Phi_s(\omega) = \Phi_u(\omega) + \Phi_v(\omega)$$



# Periodograma x Espectro de Potência

$$|X_N(\omega)|^2 = \begin{cases} \frac{A^2}{4} N, & \text{para } \omega = \pm\omega_0 \\ 0, & \text{senão} \end{cases}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |X_N(\omega)|^2 \xrightarrow{?} \Phi_x(e^{i\omega})$$

Resultado, para  $s(t)$  quasi-estacionário:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} E |S_N(\omega)|^2 \Psi(\omega) d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_s(\omega) \Psi(\omega) d\omega$$

*para toda função  $\Psi(\omega)$  suficientemente suave.*

*(Convergência como distribuição)*

*Obs.:*

*$|S_N(\omega)|^2$  é uma função "errática"*

*$\Phi_s(e^{i\omega})$  é uma função "bem comportada"*



# Espectro

## Motivação:

O espectro é uma propriedade de segunda ordem dos sinais.

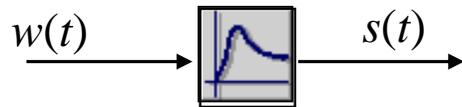
Descreve apenas certos aspectos do sinal, é, no entanto suficiente para caracterizar várias propriedades relacionadas à identificação de sistemas dinâmicos.

## Espectro cruzado

$$\Phi_{xy}(e^{i\omega}) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)e^{-i\omega\tau}$$



# Espectro de sinais filtrados



$\{w(t)\}$  *quasi-estacionário*

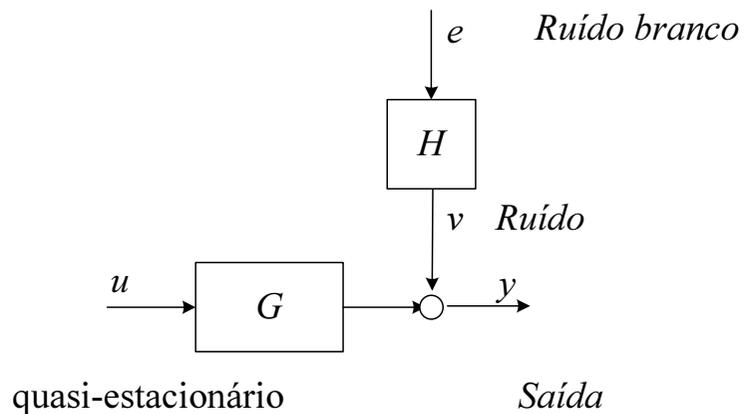
$s(t) = G(q)w(t) \rightarrow \{s(t)\}$  *quasi-estacionário*

$$\Phi_s(\omega) = |G(e^{i\omega})|^2 \Phi_w(\omega)$$

$$\Phi_{sw}(\omega) = G(e^{i\omega}) \Phi_w(\omega)$$



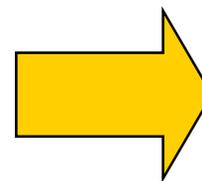
# Modelo para sistemas com saídas ruidosas



$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t)$$

$\{u(t)\} \rightarrow$  *quasi-estacionário, espectro  $\Phi_u(\omega)$*   
 $\{e(t)\} \rightarrow$  *ruído branco de variância  $\lambda$*

$$\Phi_y(\omega) = |G(e^{i\omega})|^2 \Phi_u(\omega) + \lambda |H(e^{i\omega})|^2$$
$$\Phi_{yu}(\omega) = G(e^{i\omega}) \Phi_u(\omega)$$



Relações fundamentais em  
Identificação de Sistemas  
→ Métodos de correlação

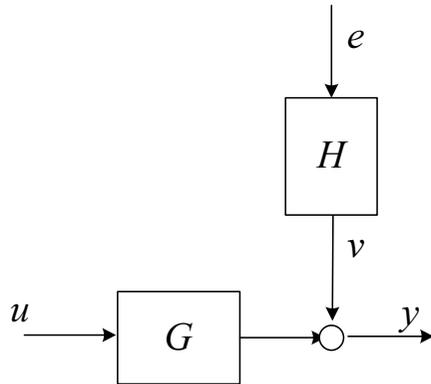


# MODELOS DE SISTEMAS LTI



# Modelo Completo

$$y(t) = G(q)u(t) + H(q)e(t)$$



$u(t) \rightarrow$  entrada

$y(t) \rightarrow$  saída

$e(t) \rightarrow$  ruído (com  $f_e(\cdot)$  PDF)

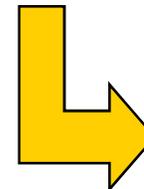
$$G(q) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)q^{-k}$$

$$H(q) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} h(k)q^{-k}$$

*Modelo Parametrizado*

$$y(t) = G(\theta, q)u(t) + H(\theta, q)e(t)$$

$$\theta \in D \subseteq \mathcal{R}^d$$



Conjunto de Modelos  
“Estrutura”



# Modelos de Funções de Transferência

ARX (*AutoRegressivo com entrada eXógena*)

$$\begin{matrix} \text{L} \rightarrow & A(q)y(t) & \text{L} \rightarrow & B(q)u(t) \end{matrix}$$

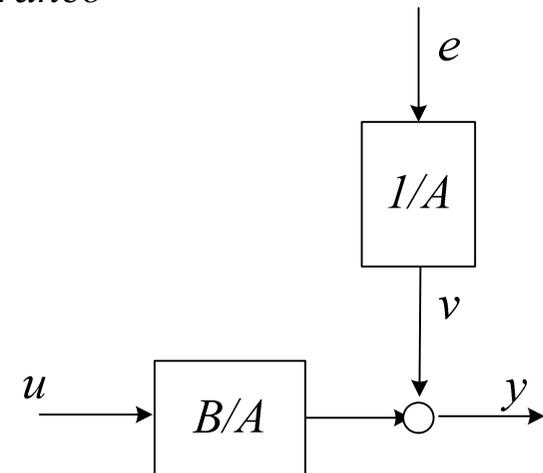
$$\begin{aligned} y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) \\ = b_1 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) + e(t) \end{aligned}$$

$$\theta = [a_1 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n_b}] \quad e(t) \text{ é um ruído branco}$$

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a}$$

$$B(q) = b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b}$$

$$\text{para o modelo } y = Gu + He \rightarrow G = \frac{B}{A}, \quad H = \frac{1}{A}$$





# ARMAX

ARMAX (*AutoRegressivo Média Móvel com entrada eXógena*)

$$\hookrightarrow A(q)y(t)$$

$$\hookrightarrow C(q)e(t)$$

$$\hookrightarrow B(q)u(t)$$

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{n_a} y(t-n_a) =$$

$$b_1 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b)$$

$$+ e(t) + c_1 e(t-1) + \dots + c_{n_c} e(t-n_c)$$

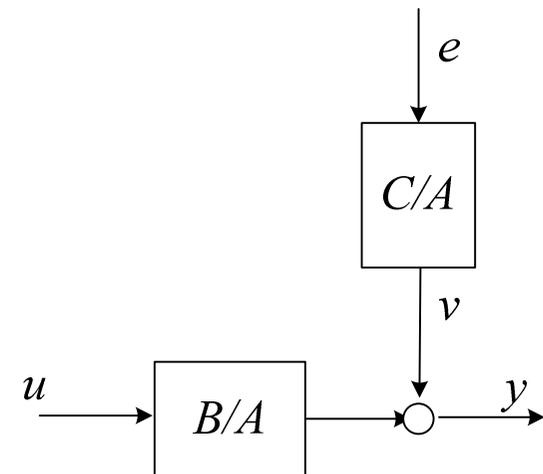
$$\theta = [a_1 \quad \dots \quad a_{n_a} \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n_b} \quad c_1 \quad \dots \quad c_{n_c}]$$

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a}$$

$$B(q) = b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b}$$

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c}$$

para o modelo  $y = Gu + He \rightarrow G = \frac{B}{A}, \quad H = \frac{C}{A}$





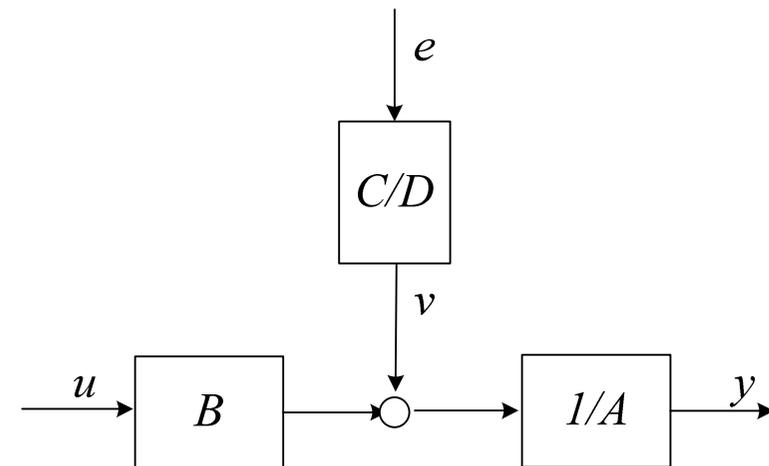
# Estrutura equação de erro

- *Modelo Equação de Erro (erro como média móvel) ou ARARX*

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + \frac{1}{D(q)}e(t)$$

- *ARARMAX*

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t)$$





# Modelo OE – Erro de saída

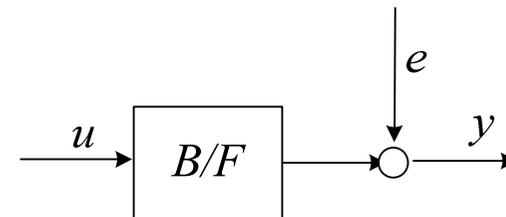
- *Modelo OE*

$$y(t) = \frac{B}{F}u + e(t)$$

$$\theta = [b_1 \quad \dots \quad b_{n_b} \quad f_1 \quad \dots \quad f_{n_f}]$$

- *Preditor de um passo*  $\hat{y}(t|\theta) = \frac{B}{F}u$

$$G = \frac{B}{F}, \quad H = 1$$





# Preditor OE

- *Modelo OE*

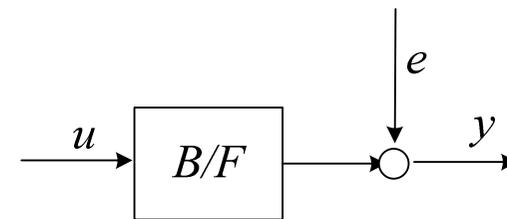
$$y(t) = \frac{B}{F}u + e(t) = w(t) + e(t)$$

$$\hat{y}(t|\theta) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) = w(t, \theta)$$

$$\phi(t, \theta) = [u(t-1) \quad \dots \quad u(t-n_b) \quad -w(t-1, \theta) \quad \dots \quad -w(t-n_f, \theta)]^T$$

- *Preditor*  $\hat{y}(t|\theta) = \phi^T(t, \theta)\theta$

*na realidade*  $w(t-k, \theta) = \hat{y}(t-k|\theta)$



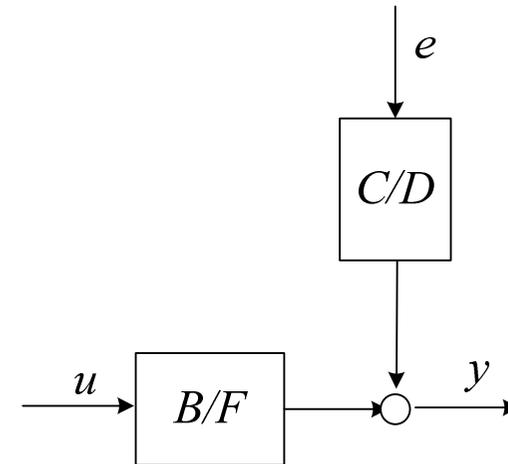


# Estrutura Box-Jenkins

- *Box – Jenkins ou ARMA*

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t)$$

$$\hat{y}(t|\theta) = \frac{D(q)B(q)}{C(q)F(q)}u(t) + \frac{C(q) - D(q)}{C(q)}y(t)$$



*Mais genérico ainda...*

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \dots$$



# Estrutura Espaço de Estados

$$x(t+1) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) + \omega(t)$$

$$y(t) = C(\theta)x(t) + v(t)$$

$$A(\theta) \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad C(\theta) \in \mathfrak{R}^{p \times n}$$

*Duas componentes de ruído (geralmente assumidos brancos)*

$$\begin{cases} \omega(t) \rightarrow \text{perturbação} \\ v(t) \rightarrow \text{ruído de saída} \end{cases}$$

$$E\omega\omega^T = R_1(\theta)$$

$$Evv^T = R_2(\theta)$$

$$E\omega v^T = R_{12}(\theta)$$



# Projeto do sinal de entrada

---

- Sinais mais utilizados:
  - Degrau
  - Sequência Binária Pseudo-Randômica (PRBS)
  - Processo ARMA
  - Sinais periódicos: soma de senóides
- Condições para “excitação suficiente”
- Degeneração do projeto do sinal de entrada
- Relação entre PRBS & ruído branco
- Propriedades no domínio da frequência destes sinais



# Exemplos de sinal de entrada

- Entrada degrau

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

- Sequência binária pseudo-randômica
  - sinal periódico
  - chaveamento entre dois níveis, segundo um certo padrão
  - níveis  $\pm a$ , período =  $M$



# III – ALGORITMOS



# III.a ALGORITMOS

—

# MÉTODOS DETERMINÍSTICOS



---

# MÉTODOS NÃO PARAMÉTRICOS



# Métodos não paramétricos

---

- Métodos no domínio do tempo
  - Resposta ao impulso
  - Resposta ao degrau
  - Análise da correlação / tempo
- Métodos no domínio da frequência
  - Teste da senóide
  - Análise da correlação / frequência
  - Análise de Fourier
  - Análise Espectral



# Definição do problema

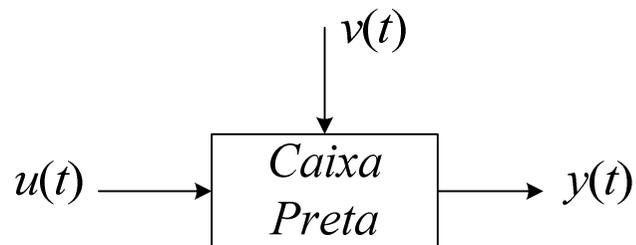
*Sistema é estável, linear e invariante no tempo*

$$y(t) = G_0(q)u(t) + v(t)$$

$$y(t) = g_0 * u(t) + v(t)$$

*para  $u(t)$  pulso de amplitude  $\alpha$  em  $t = 0$*

$$y(t) = \alpha g_0(t) + v(t)$$



Métodos no domínio do tempo

→ estimam  $g_0$

Métodos no domínio da frequência

→ estimam  $G_0(e^{i\omega})$



# Critérios

$$a) \left| G_0(e^{i\omega}) - \hat{G}(e^{i\omega}) \right| \forall \omega, 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$$

$$b) \left| g_0(t) - \hat{g}(t) \right| \forall t \geq 0$$

$$c) \sum_{t=0}^{\infty} \left| g_0(t) - \hat{g}(t) \right|$$

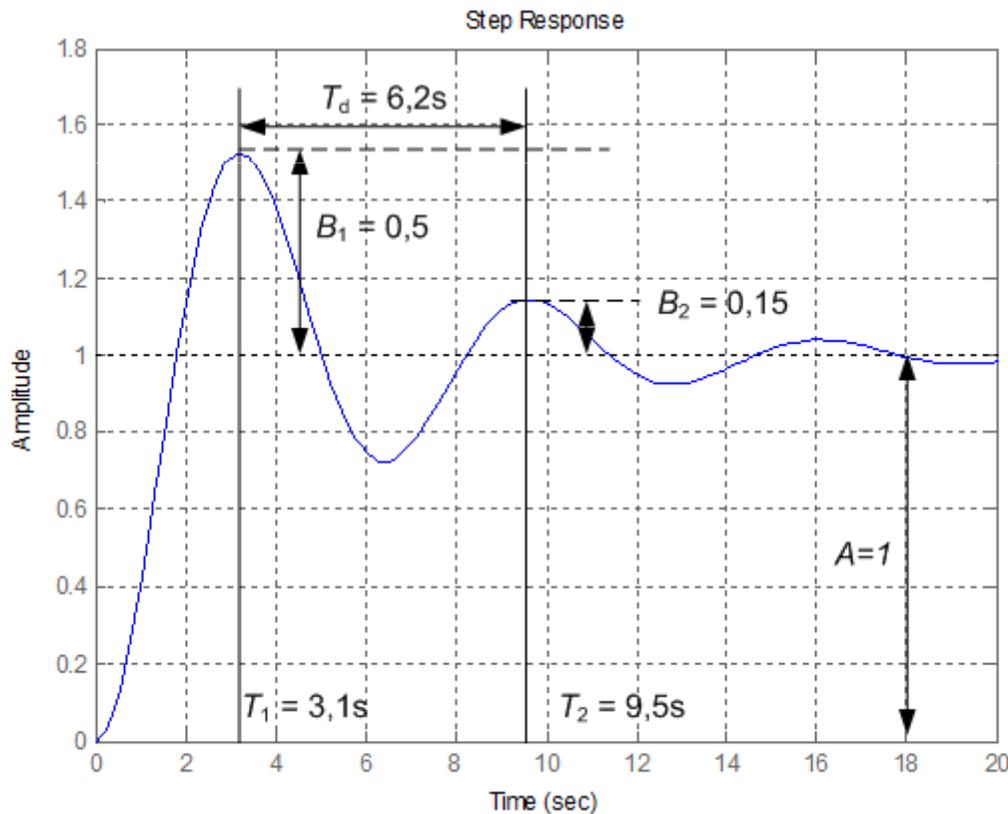
$$d) \sup_{\omega} \left| G_0(e^{i\omega}) - \hat{G}(e^{i\omega}) \right|$$



# Ex. Processo de 2ª Ordem

Não há tratamento específico ao ruído  
 → Relação Sinal/Ruído deve ser alta!

$$Ex: G(s) = \frac{1}{s^2 + 0,4s + 1}$$



A partir da resposta ao degrau

$$Modelo: \hat{G}(s) = \frac{A\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}(\omega_d t - \phi)$$

$$A; \quad \sigma = \zeta\omega_n;$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = 2\pi / T_d$$

$$B_2 = B_1 e^{-\sigma(T_2 - T_1)}$$



# Ex. Processo de 2ª Ordem

$$\text{Ex: } G(s) = \frac{1}{s^2 + 0,4s + 1} \Rightarrow \hat{G}(s) = \frac{1,062}{s^2 + 0,3762s + 1,062}$$

A partir da resposta ao degrau

$$\text{Modelo: } \hat{G}(s) = \frac{A\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen}(\omega_d t - \phi)$$

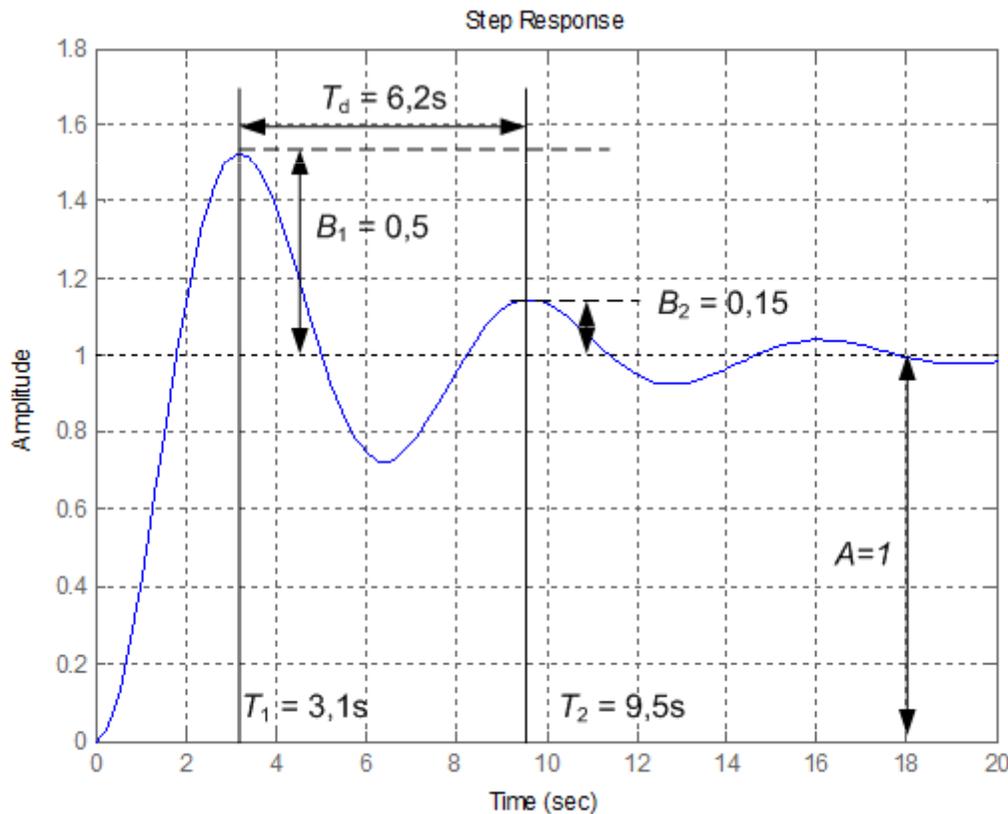
$$A; \quad \sigma = \zeta\omega_n;$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = 2\pi / T_d$$

$$B_2 = B_1 e^{-\sigma(T_2 - T_1)}$$

do gráfico :

$$\omega_n = 1,03; \quad \zeta = 0,1825; \quad A = 1$$

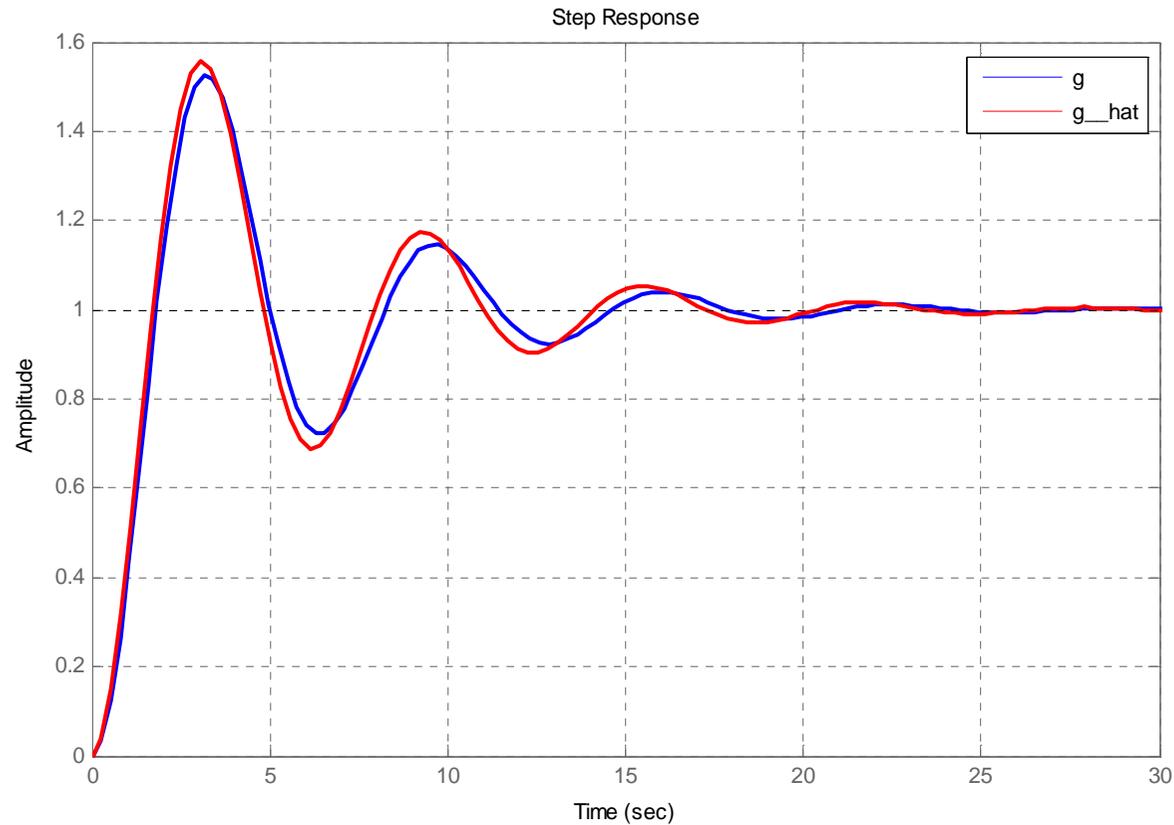




# Ex. Processo de 2ª Ordem

$$Ex : G(s) = \frac{1}{s^2 + 0,4s + 1}$$

$$\Rightarrow \hat{G}(s) = \frac{1,062}{s^2 + 0,3762s + 1,062}$$





# III.b ALGORITMOS – O ESTIMADOR DE MÍNIMOS QUADRADOS



# O Estimador de Mínimos Quadrados

- Sistema de equações sobredeterminado

$$\mathbf{y} = X\boldsymbol{\theta}$$

$$X^T \mathbf{y} = X^T X \boldsymbol{\theta}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \underbrace{[X^T X]^{-1}}_{\text{Matriz pseudo-inversa}} X^T \mathbf{y}$$

Matriz pseudo-inversa



# Modelos ARX e o método dos Mínimos Quadrados

“Um problema Arquétipo”

Modelo: 
$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_1 u(t-1) + \dots + b_m u(t-m)$$

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - \dots - a_n y(t-n) + b_1 u(t-1) + \dots + b_m u(t-m)$$

Vetores: 
$$\theta = [a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad \dots \quad b_m]^T$$
$$\varphi(t) = [-y(t-1) \quad \dots \quad -y(t-n) \quad u(t-1) \quad \dots \quad u(t-m)]^T$$

Notação Compacta:

$$y(t) = \varphi^T \theta$$
$$\hat{y}(t | \theta) = \varphi^T(t) \theta$$





# O Estimador de Mínimos Quadrados

Dados do Processo:

$$Z^N = \{u(1) \quad y(1) \quad \cdots \quad u(N) \quad y(N)\}$$

$$\min_{\theta} V_N(\theta, Z^N)$$

Função de custo de erro quadrado:

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y(t) - \hat{y}(t | \theta))^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y(t) - \varphi^T(t)\theta)^2$$

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta} V_N(\theta, Z^N)$$

$$\frac{d}{d\theta} V_N(\theta, Z^N) = 0$$

MMQ:

$$\hat{\theta}_N = \left[ \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi^T(t) \right]^{-1} \sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t)$$



## Ex.: Equação a diferenças de 1ª ordem

$$y(t) + ay(t-1) = bu(t-1)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_N \\ \hat{b}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y^2(t-1) & -\sum y(t-1)u(t-1) \\ -\sum y(t-1)u(t-1) & \sum u^2(t-1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\sum y(t)u(t-1) \\ \sum y(t)u(t-1) \end{bmatrix}$$



# Ex.: Equação a diferenças de 1ª ordem

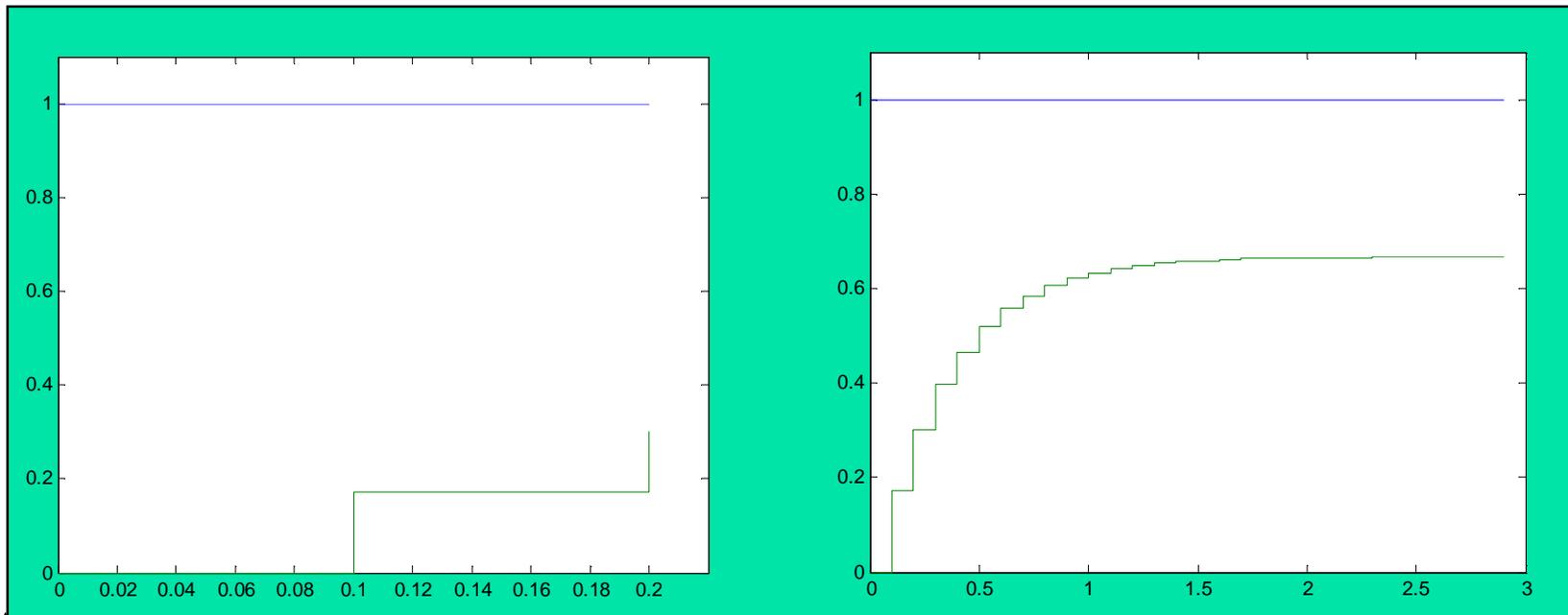
$$g_C(s) = \frac{2}{s+3} \xrightarrow{T=0.1} g(z) = \frac{0.1728}{z-0.7408}$$

$$N = 3$$

$$\hat{g}(z) = \frac{0.1728}{z-0.7408}$$

$$N = 30$$

$$\hat{g}(z) = \frac{0.1728}{z-0.7408}$$





# Ex.: Equação a diferenças de 1ª ordem

$$y = y + 0.1 \text{rand}()$$

$$g_c(s) = \frac{2}{s+3} \xrightarrow{T=0.1} g(z) = \frac{0.1728}{z-0.7408}$$

$$N = 3$$

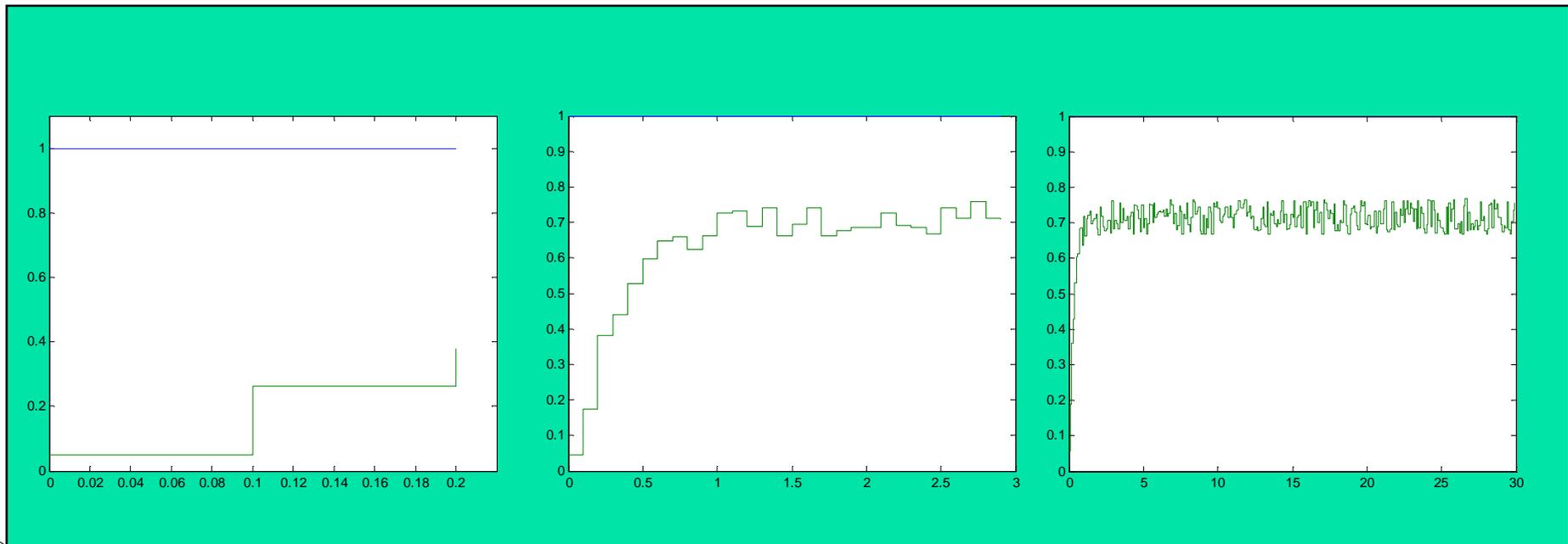
$$g_3(z) = \frac{0.2357}{z-0.5395}$$

$$N = 30$$

$$\hat{g}_{30}(z) = \frac{0.2031}{z-0.7123}$$

$$N = 300$$

$$\hat{g}_{300}(z) = \frac{0.2854}{z-0.5996}$$





## Ex.: Equação a diferenças de 1ª ordem

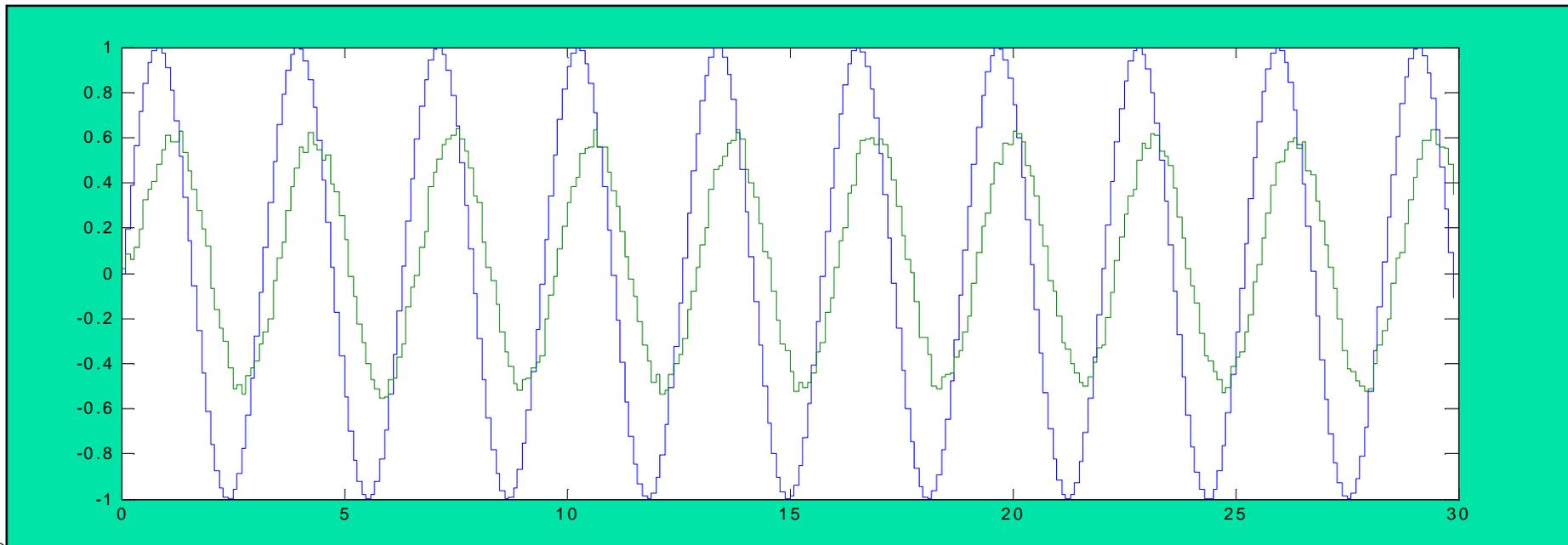
$$g_c(s) = \frac{2}{s+3} \xrightarrow{T=0.1} g(z) = \frac{0.1728}{z-0.7408}$$

$$u = \sin(2t)$$

$$y = y + 0.1\text{rand}()$$

$$N = 300$$

$$\hat{g}_{300}(z) = \frac{0.1718}{z-0.7428}$$





# Regressão Linear

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - \dots - a_n y(t-n) + b_1 u(t-1) + \dots + b_m u(t-m)$$

$$\theta = [a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_1 \quad \dots \quad b_m]^T$$

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \quad \dots \quad -y(t-n) \quad u(t-1) \quad \dots \quad u(t-m)]^T$$

$$\hat{y}(t | \theta) = \varphi^T(t) \theta$$

## **Regressão Linear:**

Calcular  $\hat{y}$  utilizando os valores passados contidos em  $\varphi$

$\hat{y}$  é função linear dos parâmetros em  $\theta$

## **Modelo ARX:**

**Auto-Regressivo** –  $\hat{y}$  depende de valores passados de  $y$   
**X** – entrada eXterna ( $u$ ), variável eXógena



# Polarização do Estimador MQ

$$\hat{\theta} = A\mathbf{y}, \quad A = [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T \quad y(k) = y^i(k) + e(k) \quad \text{Variáveis aleatórias}$$

Polarização (bias)  $b = E[\hat{\theta}] - \theta$

Modelo:

$$y(k) = \psi^T(k-1)\theta + e(k)$$

$$\mathbf{y} = \Psi \theta + \mathbf{e}$$

$$\hat{\theta} = A\mathbf{y}, \quad A \text{ é uma matriz que depende dos regressores } \Psi$$

$$b = E[A\mathbf{y}] - \theta$$

$$= E[A(\Psi \theta + \mathbf{e})] - \theta$$

$$= E[A(\Psi - I)\theta] + E[A\mathbf{e}]$$

$$= E[\underbrace{A\Psi - I}_{=0}]\theta + E[\underbrace{A\mathbf{e}}_{=0}]$$

$$b=0 \rightarrow$$



# Estimadores Não Polarizados

---

- EMQ - Estimador estendendo de mínimos quadrados
- GMQ – Estimador de mínimos quadrados generalizado
- VI – Estimador das variáveis instrumentais



# MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS



# Princípios subjacentes de métodos de estimação de parâmetros

$\mathcal{M}(\theta)$  – modelos parametrizados

$\theta \in D_{\mathcal{M}} \subset \mathfrak{R}^d$  – vetor de parâmetros

$\mathcal{M}^* = \{\mathcal{M}(\theta) \mid \theta \in D_{\mathcal{M}}\}$  – conjunto de modelos

*Cada modelo  $\rightarrow$  uma maneira de prever as saídas futuras.*

*Filtro linear como preditor:*

$$\mathcal{M}(\theta) : \hat{y}(t \mid \theta) = W_y(q, \theta) + W_u(q, \theta)$$

*Para o preditor de um passo adiante:*

$$y(t) = G(q, \theta)u(t) + H(q, \theta)e(t)$$

*com:*

$$W_y(q, \theta) = [1 - H^{-1}(q, \theta)], \quad W_u(q, \theta) = H^{-1}(q, \theta)G(q, \theta)$$



# Princípios subjacentes de métodos de estimação de parâmetros

$Z^N = [y(1), u(1), y(2), u(2), \dots, y(N), u(N)]$  –vetor de dados

*O mapeamento*

$Z^N \rightarrow \hat{\theta}_N \in D_{\mathcal{M}}$

*é um método de estimação de parâmetros.*

*Avaliação de um modelo candidato :*

$\varepsilon(t, \theta_*) = y(t) - \hat{y}(t | \theta_*)$  → erro de predição

*Para  $Z^N$  conhecido → erro pode ser calculado para  $t = 1, 2, \dots, N$*



# Minimização do erro de predição

$$\varepsilon(t, \theta_*) = y(t) - \hat{y}(t | \theta_*), \quad t = 1, 2, \dots, N \quad \rightarrow \text{vetor de erro em } \mathfrak{R}^N$$

Avaliado por qualquer norma em  $\mathfrak{R}^N$ , quadrática ou não.

Quão "grande" é o erro de predição?

$$\text{Filtragem linear estável: } \varepsilon_F(t, \theta) = L(q)\varepsilon(t, \theta), \quad t = 1, 2, \dots, N$$

Norma:

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \ell(\varepsilon_F(t, \theta))$$

onde  $\ell(\cdot)$  é uma função escalar, tipicamente positiva.

Estimador de parâmetros:

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_N(Z^N) = \arg \min_{\theta} V_N(\theta, Z^N)$$

PEM  
Prediction-error  
Identification Methods

e.g.: LS, ML



## III.d Estimadores Recursivos

---

- Estimação em batelada
- Estimação seqüencial
- Estimação recursiva
  
- Estimação off-line
- Estimação on-line
- Estimação em tempo real



## III. Estimadores Recursivos

Seja o sistema

$$y(k) = \psi^T \theta + e(k), \text{ com } E[e(k)] = 0, \text{ cov}[e(k)] = R$$

Algoritmo recursivo

$$y(k) = \psi_k^T (k-1) \hat{\theta}_k + \xi$$

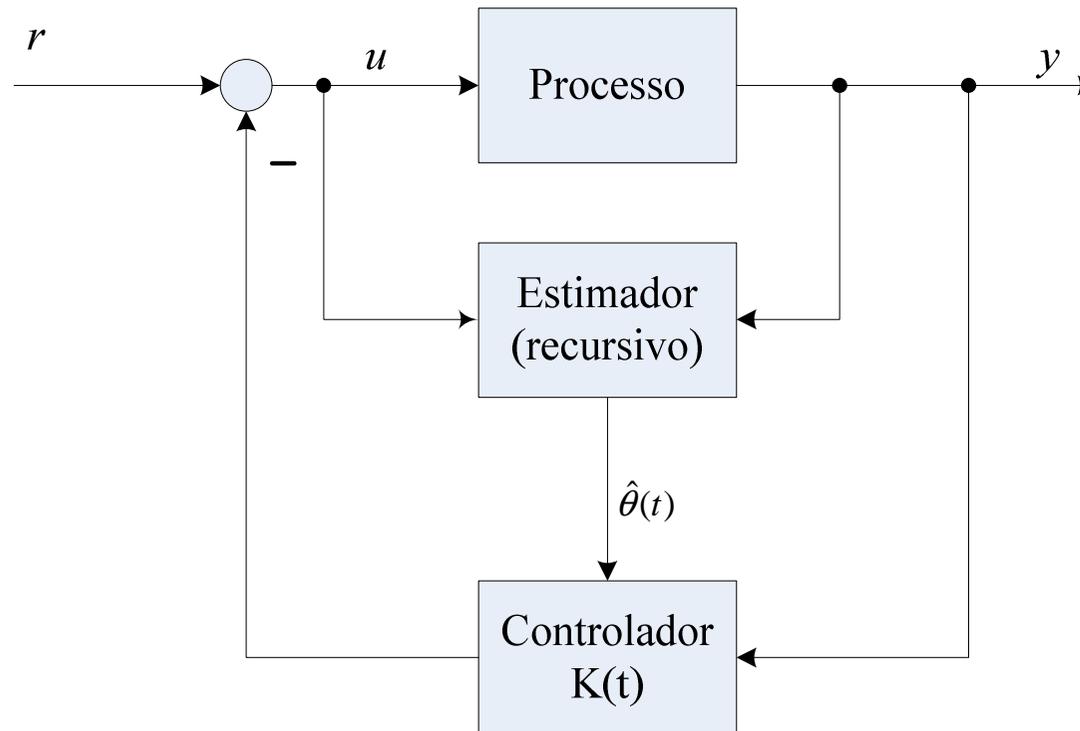
⋮

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_k \underbrace{(y(k) - \psi_k^T \hat{\theta}_{k-1})}_{\text{Inovação}}$$

Inovação



# Aplicação: Controle Adaptativo



*O controlador  $K(t)$  é um sistema estável variante no tempo.*



# PARTE IV

## IDENTIFICAÇÃO NA PRÁTICA

- a) Processo Térmico
- b) Nível de Líquido 2<sup>a</sup> Ordem
- c) Nível de Líquido 4<sup>a</sup> Ordem



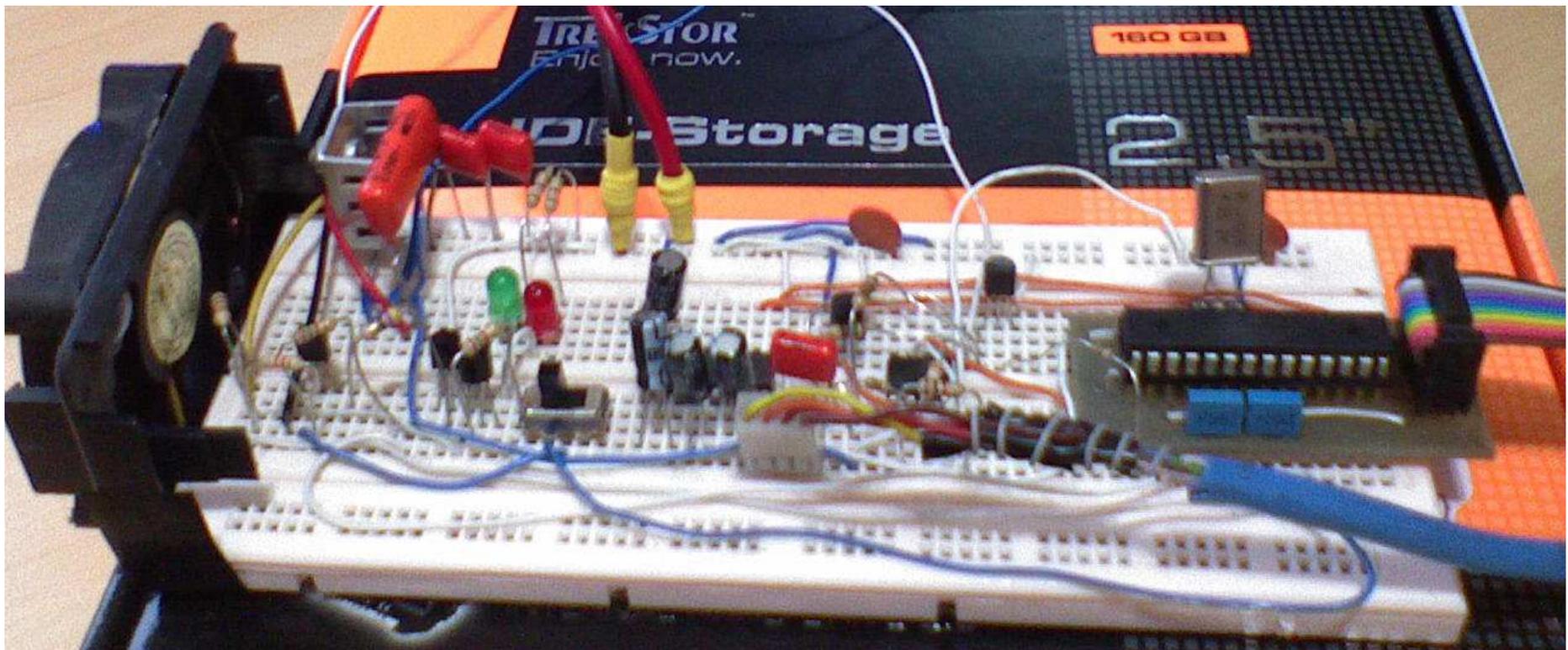
# PARTE IV

## a) PROCESSO TÉRMICO



# Processo Térmico

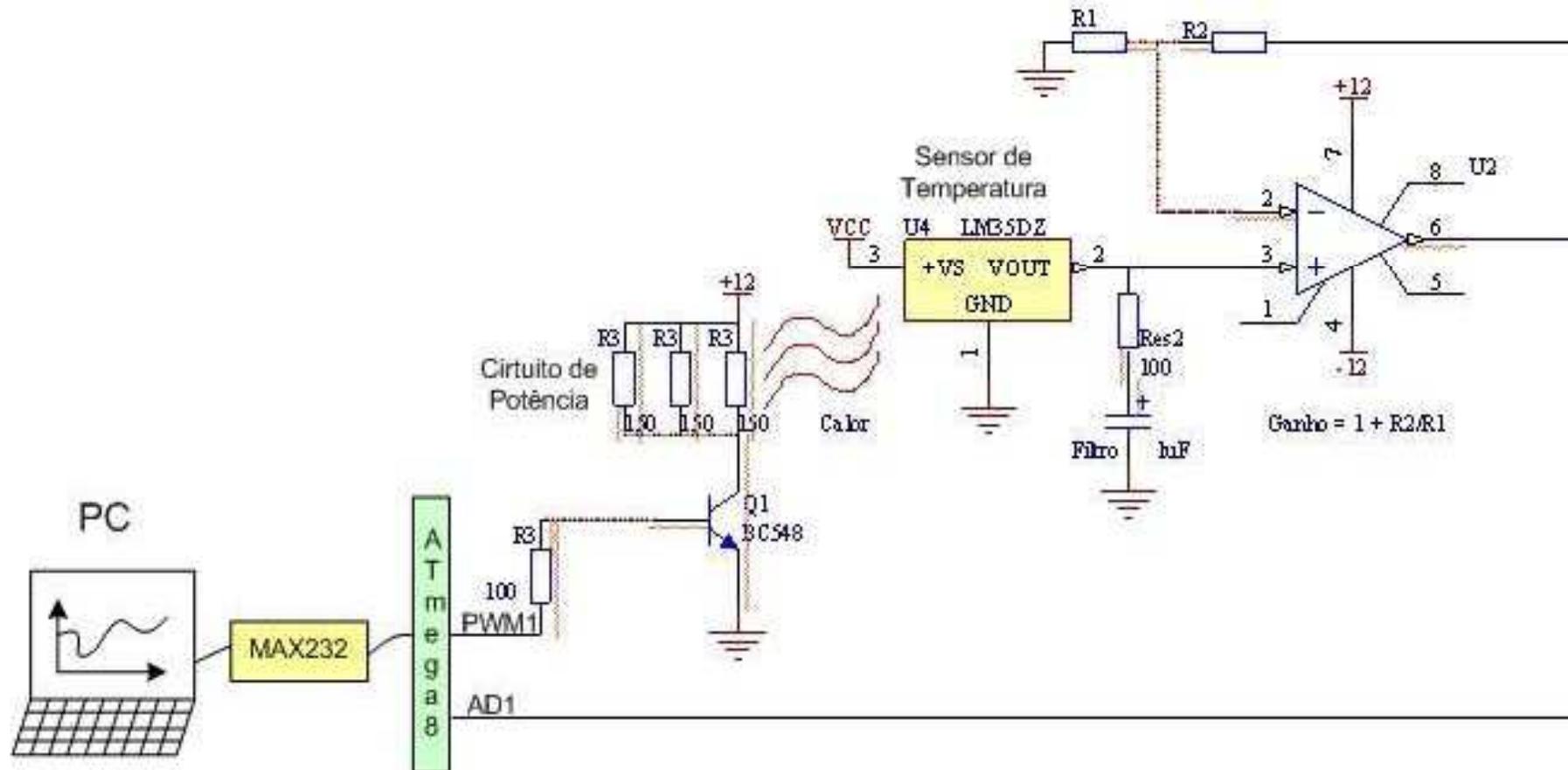
## Experimento de Controle de Digital





# Processo Térmico

## Visão Esquemática





# Processo Térmico

---

## Identificação – Process Model

1. ident
2. Carregar os sinais de  $u, y$
3. Remover a média
4. Selecionar faixas: [identificação, validação]
5. Process Models
6. Estimate: P1D, P1, P2, P2D, P2DZ,...
7. Model Output



# Processo Térmico

## Modelo de Processo

$$P1(s) = \frac{K_p}{1 + T_{p1}s}$$

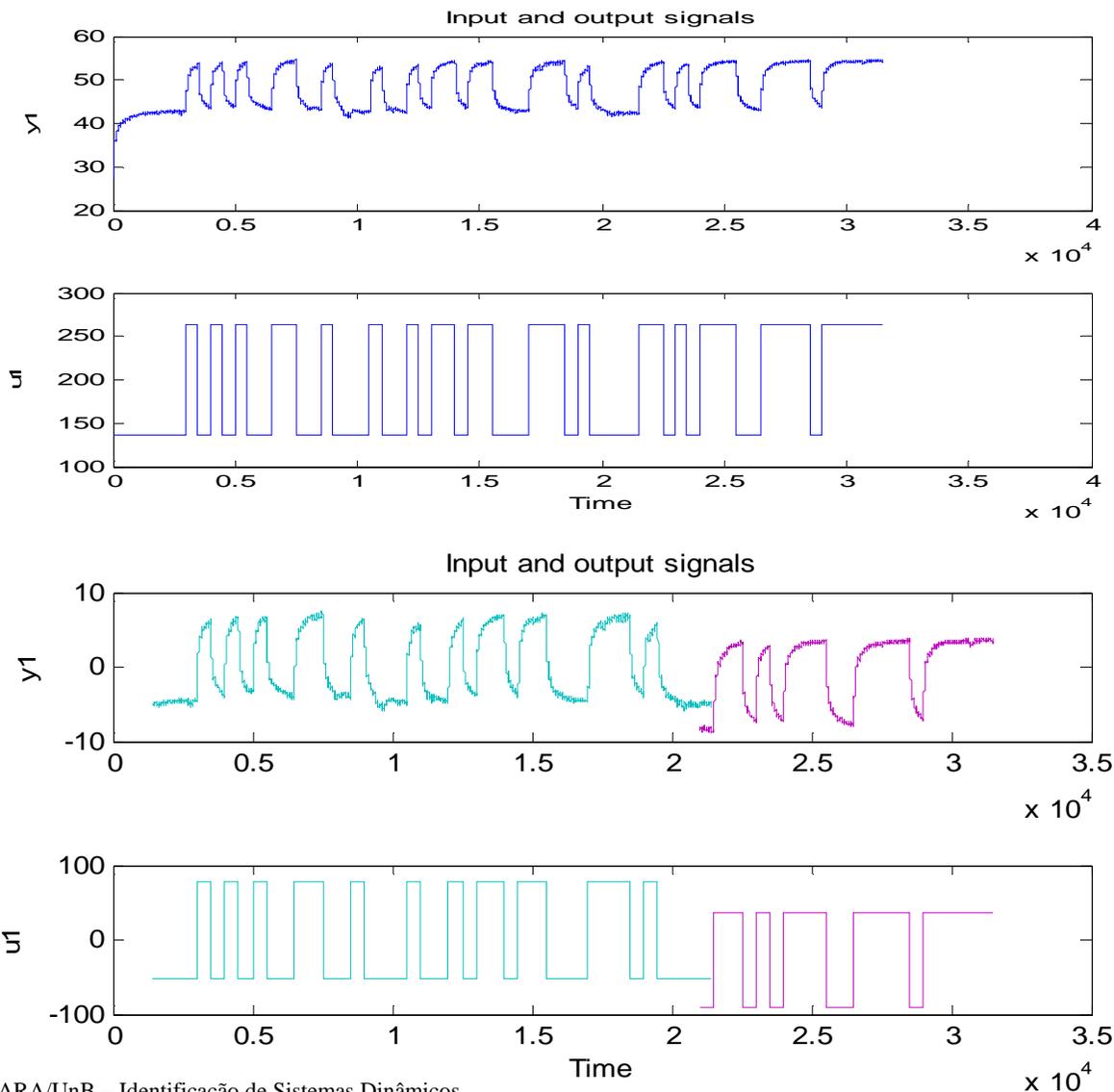
$$P2D(s) = \frac{K_p e^{-T_d s}}{(1 + T_{p1}s)(1 + T_{p2}s)}$$

$$P2DZ(s) = \frac{K_p (1 + T_z s) e^{-T_d s}}{(1 + T_{p1}s)(1 + T_{p2}s)}$$

...



# Identificação do Processo Térmico



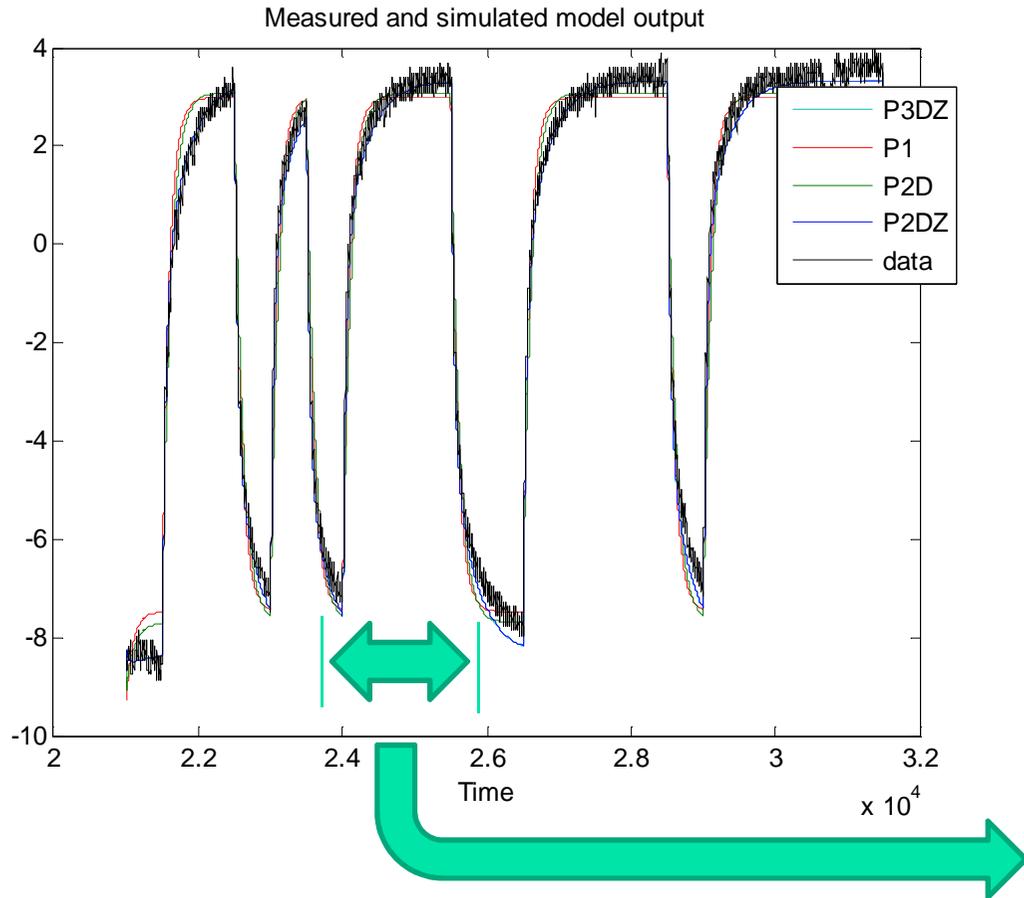
Sinais medidos  
~9h30

Procedimento:

- Excluir transição p/ P.O.
- Conjunto de Identificação
- Conjunto de Validação
- Subtrair média



# Identificação do Processo Térmico



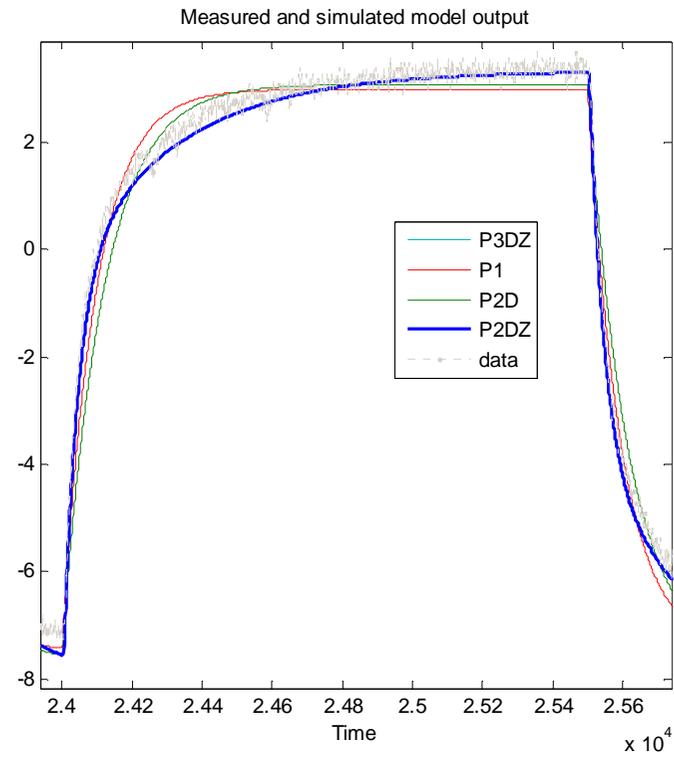
Fit:

P2DZ: 93.43

P3DZ: 93.42

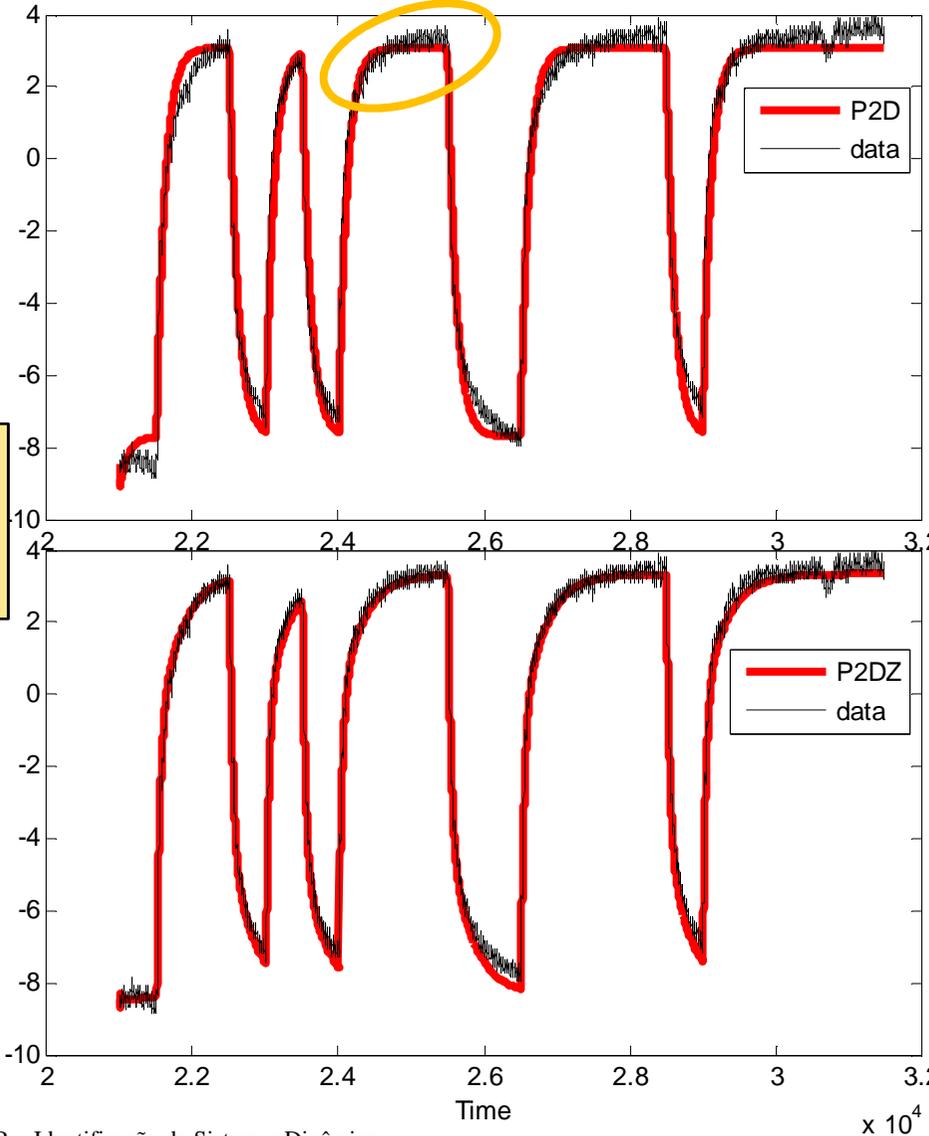
P1: 87.66

P2D: 86.9



# Identificação do Processo Térmico

Measured and simulated model output



Fit:  
 P2D: 86.9  
 P2DZ: 93.43

$$P2D(s) = \frac{K_p e^{-T_d s}}{(1 + T_{p1} s)(1 + T_{p2} s)}$$

$$P2DZ(s) = \frac{K_p (1 + T_z s) e^{-T_d s}}{(1 + T_{p1} s)(1 + T_{p2} s)}$$

P2D

$$K_p = 0.084231$$

$$T_{p1} = 116.15$$

$$T_{p2} = 0.001$$

$$T_d = 0$$

P2DZ

$$K_p = 0.091263$$

$$T_{p1} = 308.19$$

$$T_{p2} = 41.164$$

$$T_d = 4.8147$$

$$T_z = 200.4$$



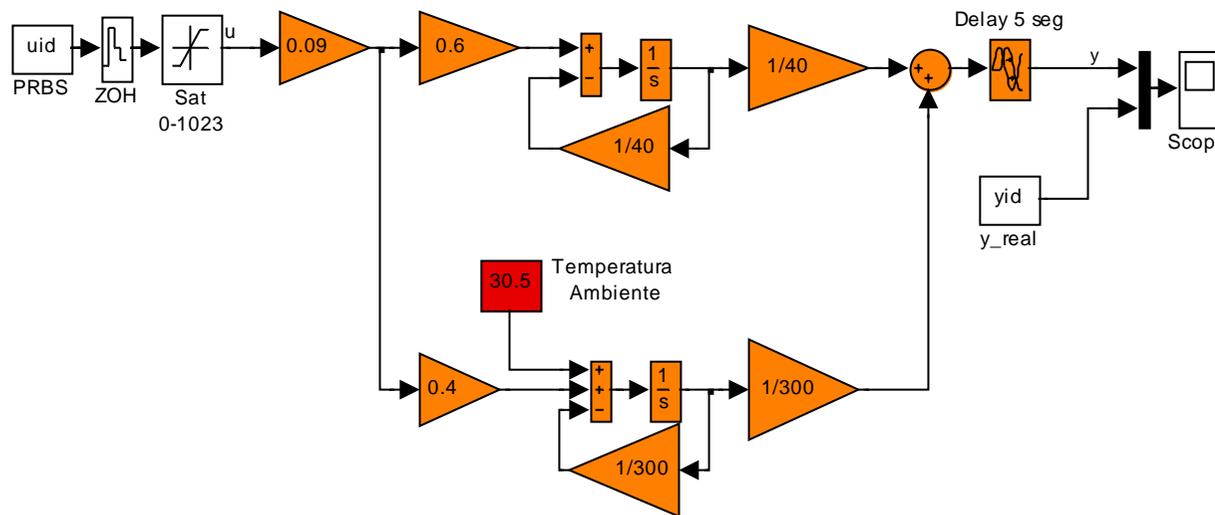
P1 !!

$$\frac{K_p}{(1 + T_{p1} s)}$$



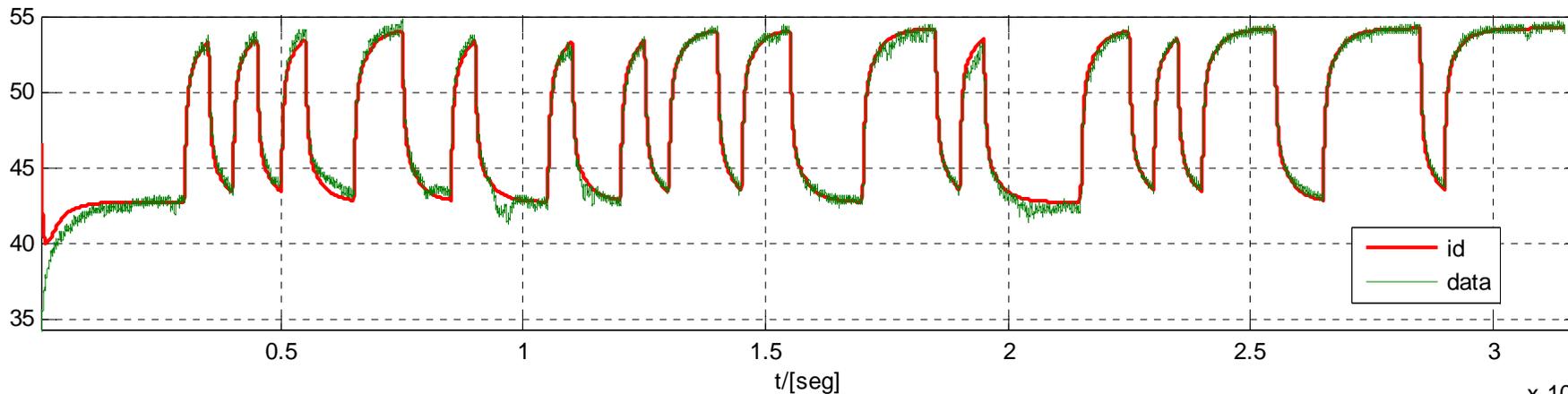
# Identificação do Processo Térmico

Zero ? Influência do meio ambiente !



$$P2DZ(s) = \frac{K_p (1 + T_z s) e^{-T_d s}}{(1 + T_{p1} s)(1 + T_{p2} s)}$$

$K_p = 0.091263$   
 $T_{p1} = 308.19$   
 $T_{p2} = 41.164$   
 $T_d = 4.8147$   
 $T_z = 200.4$





---

# PARTE IV

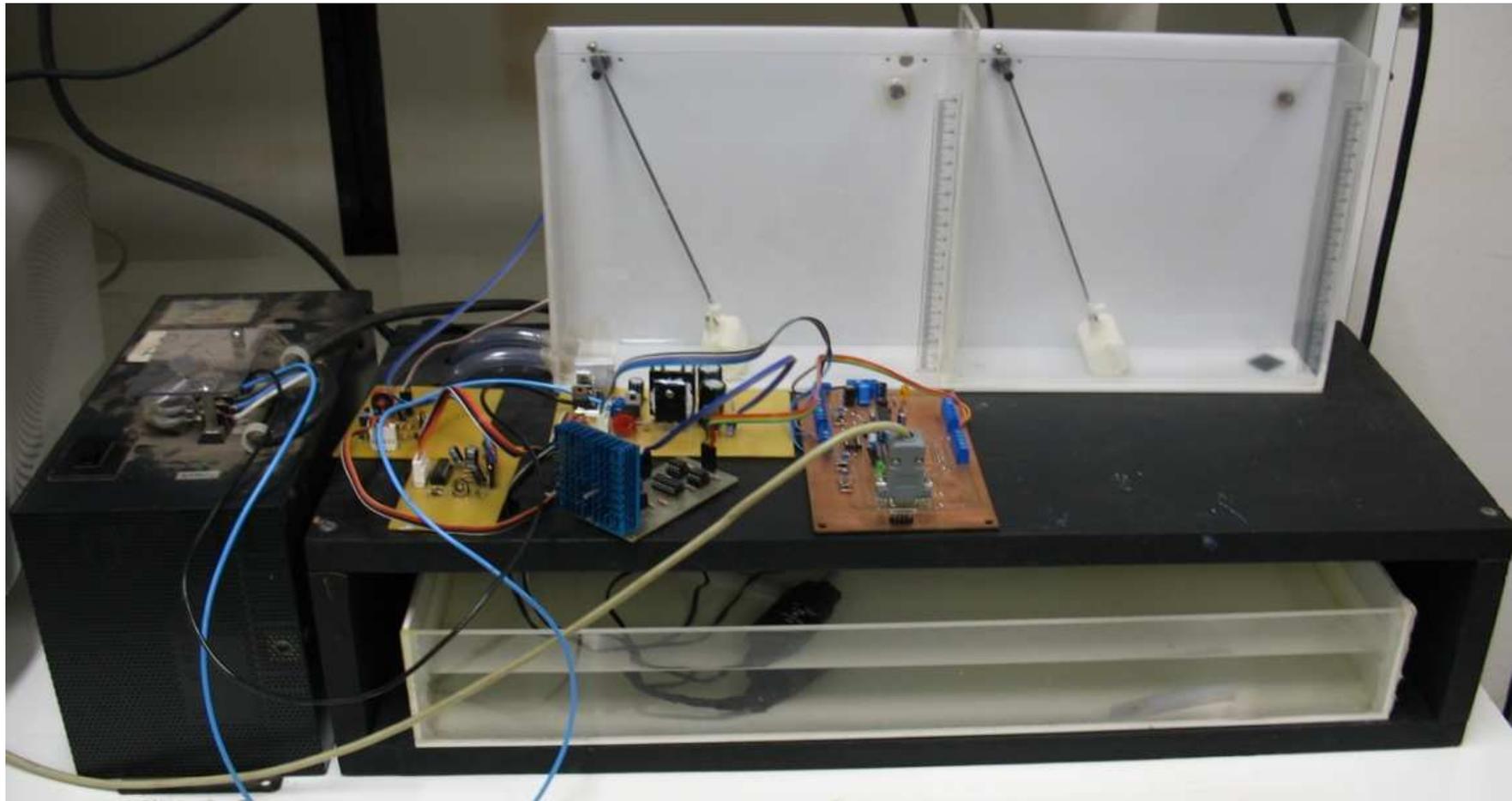
## b) NÍVEL DE LÍQUIDO

### 2ª ORDEM



# Identificação em Malha Fechada

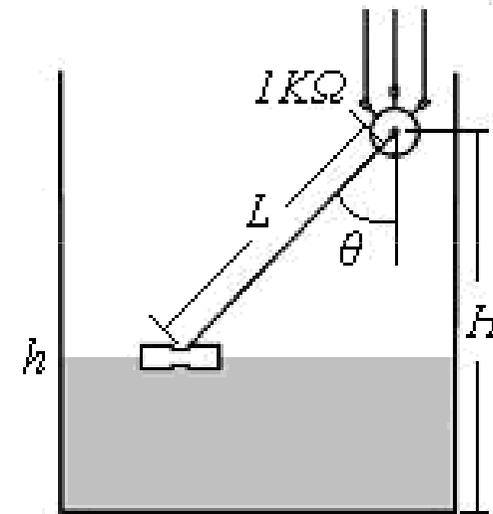
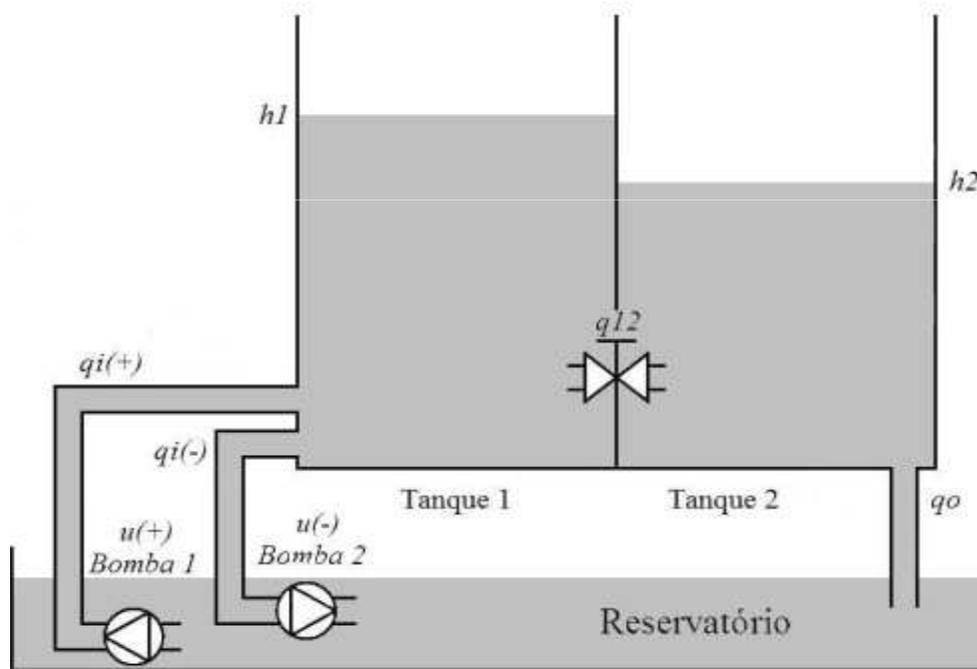
## Processo de Nível – 2ª Ordem





# Identificação em Malha Fechada

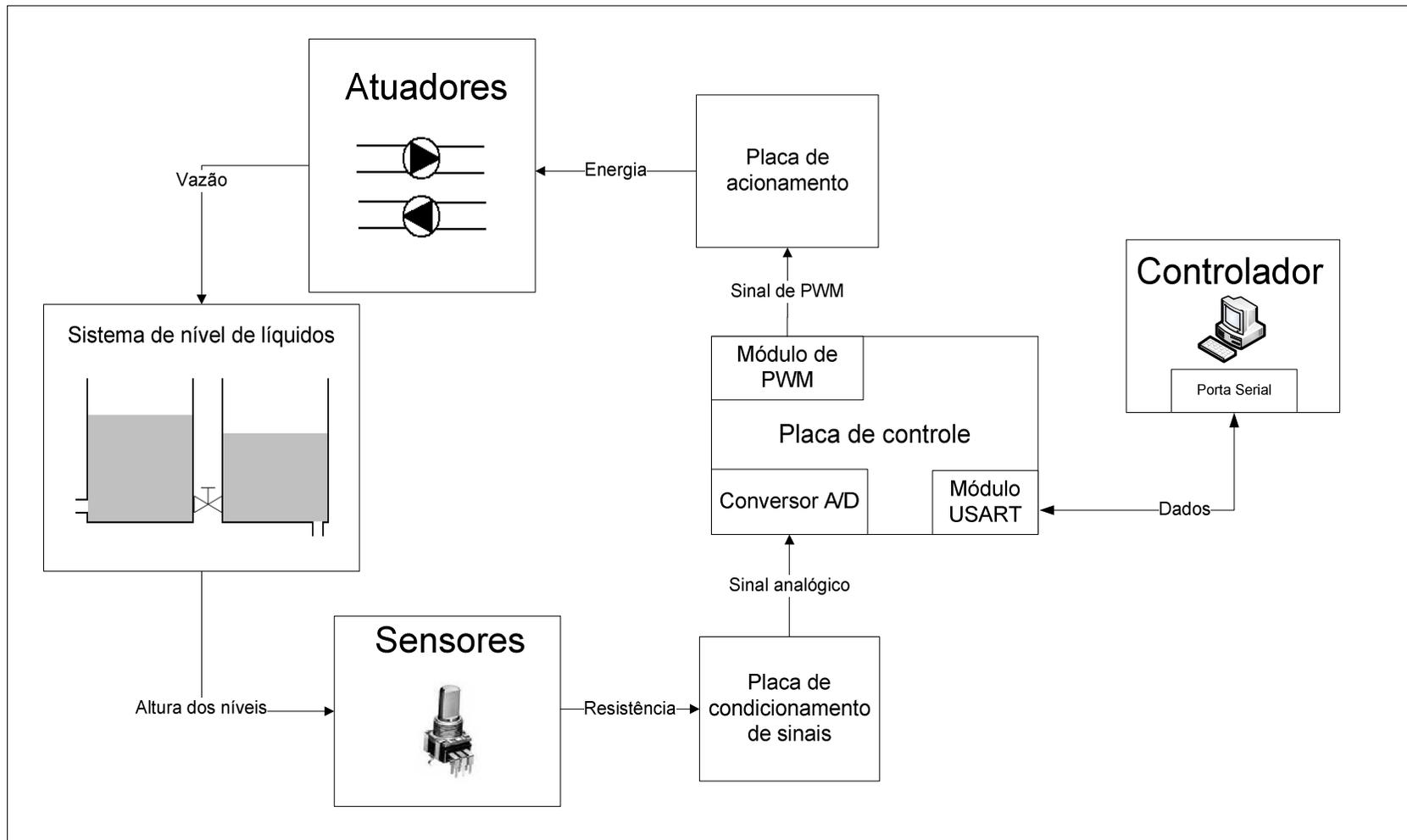
## Processo de Nível – 2ª Ordem





# Identificação em Malha Fechada

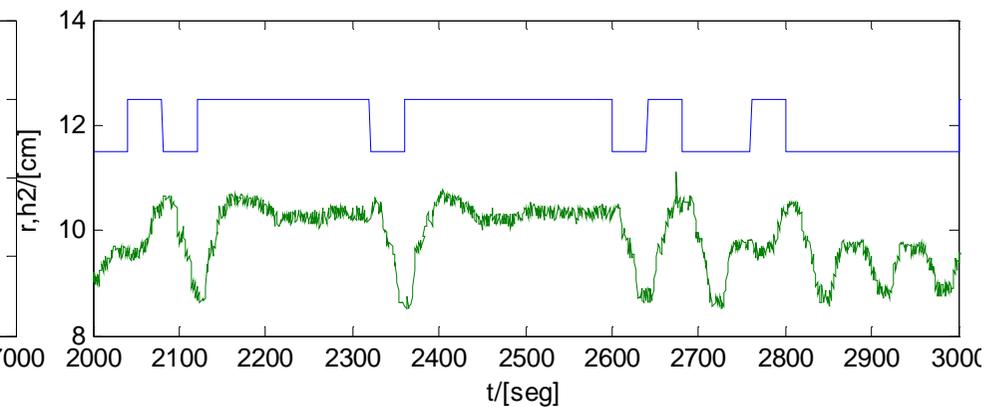
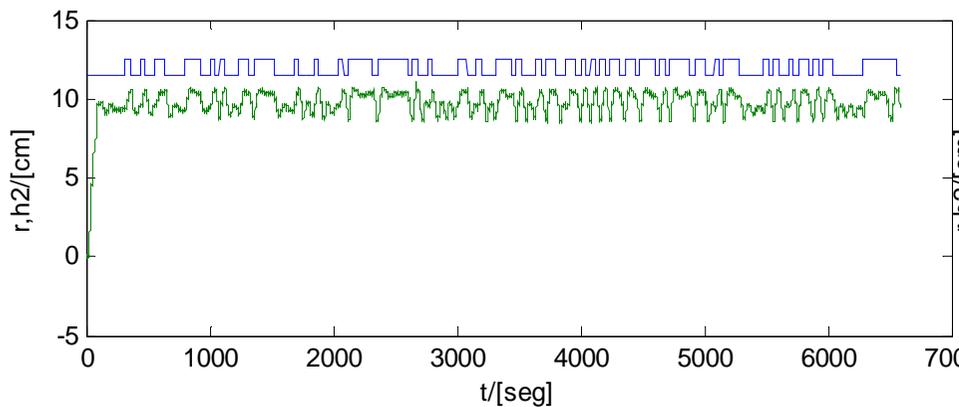
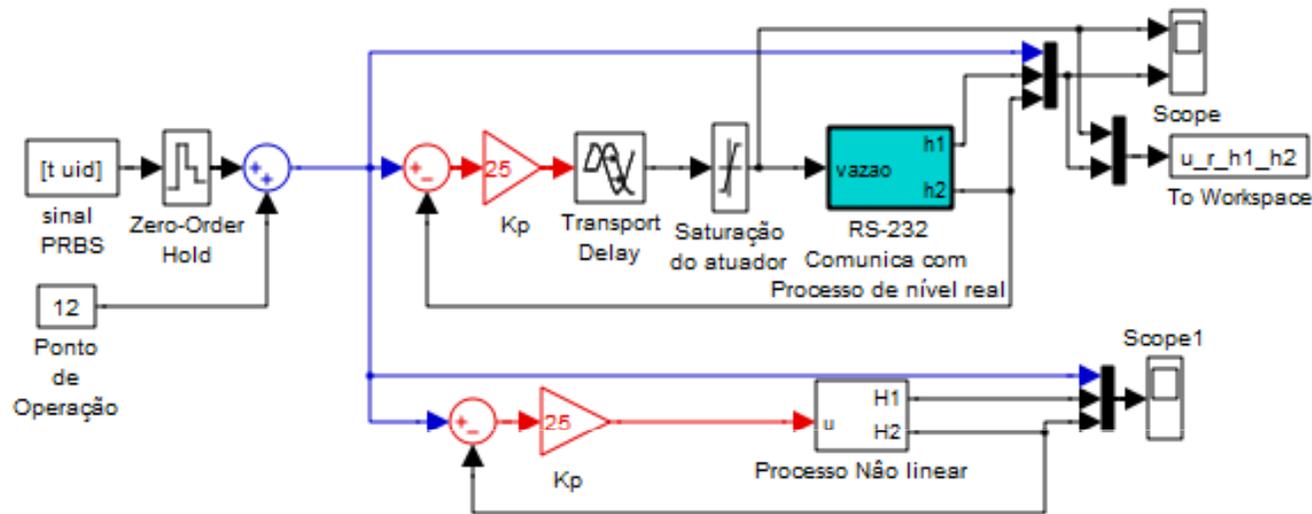
## Processo de Nível – 2ª Ordem





# Identificação em Malha Fechada

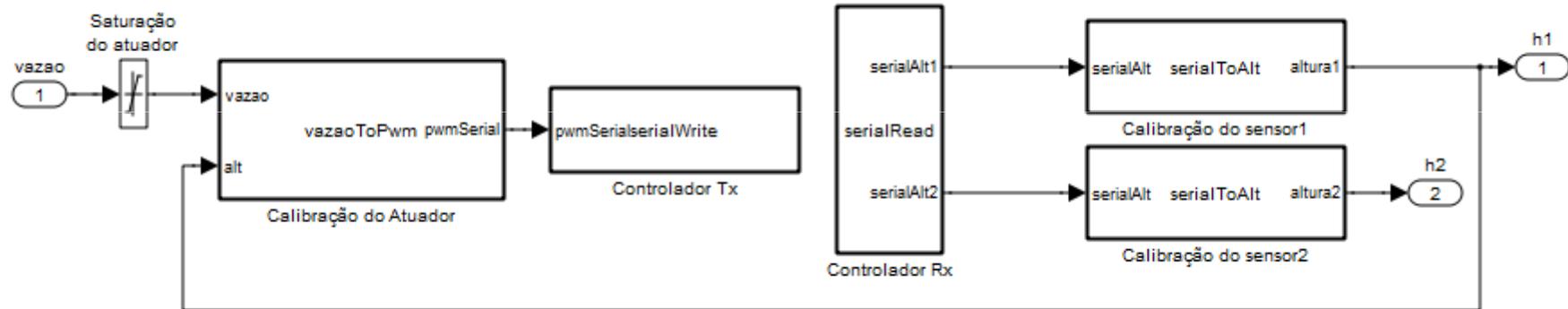
## Processo de Nível – 2ª Ordem





# Identificação em Malha Fechada

## Processo de Nível – 2ª Ordem



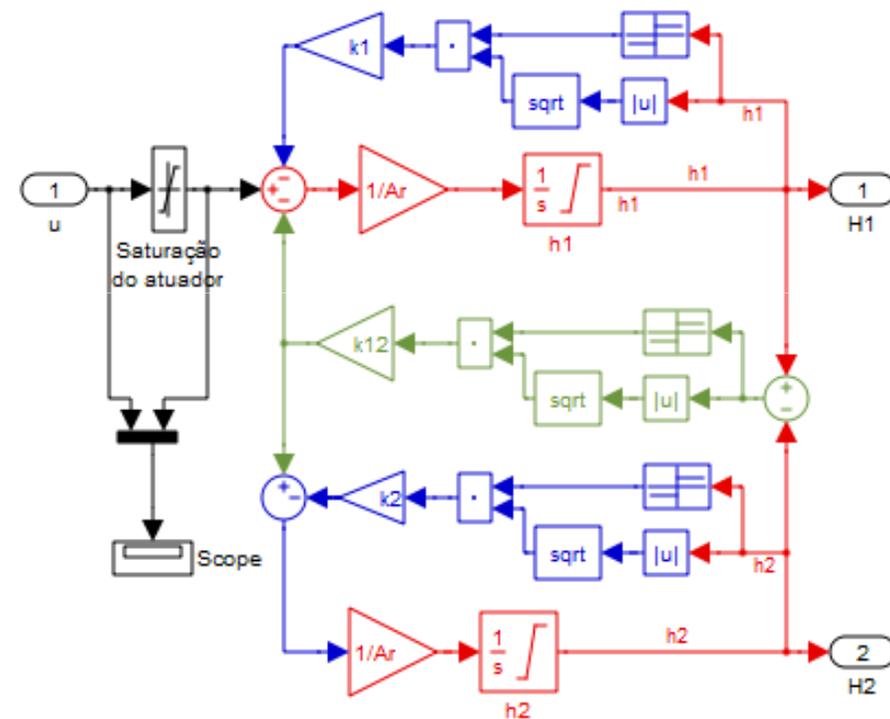


# Identificação em Malha Fechada

## Processo de Nível – 2ª Ordem

$$A_r \frac{dh_1}{dt} = q_i - \text{sign}(h_1 - h_2) k_{12} \sqrt{|h_1 - h_2|}$$

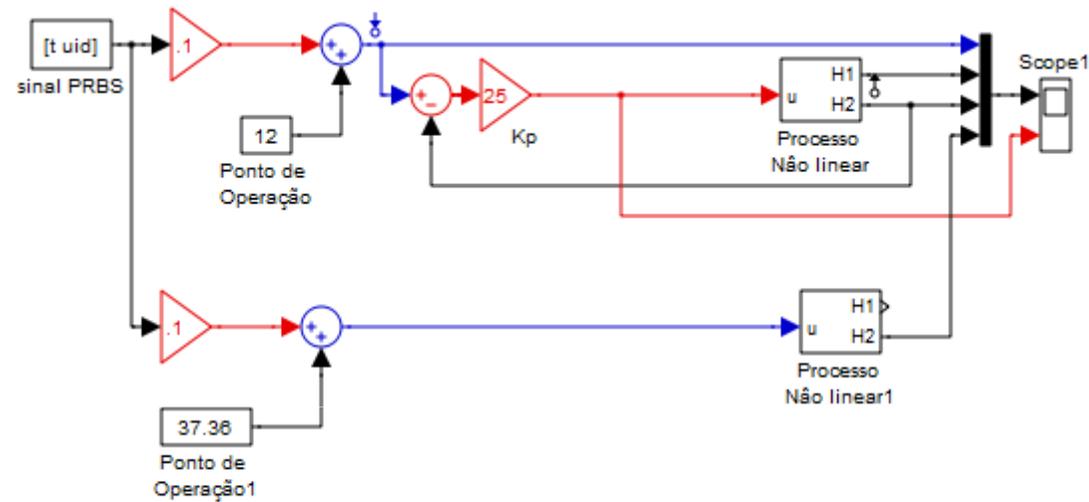
$$A_r \frac{dh_2}{dt} = \text{sign}(h_1 - h_2) k_{12} \sqrt{|h_1 - h_2|} - k_2 \sqrt{h_2}$$





# Identificação

## Malha Aberta x Malha Fechada?



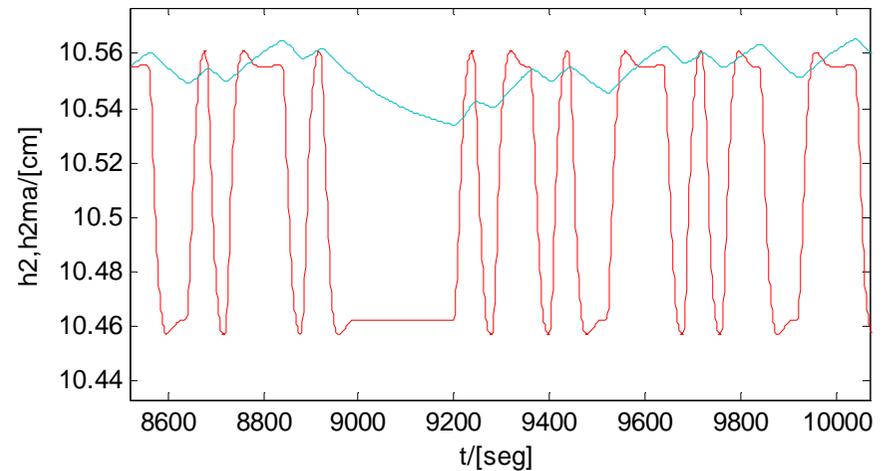
Experimento de 3h30:

Malha fechada OK

```
uid=idinput(12600,'PRBS',[0 0.025],[-.5 .5]);
```

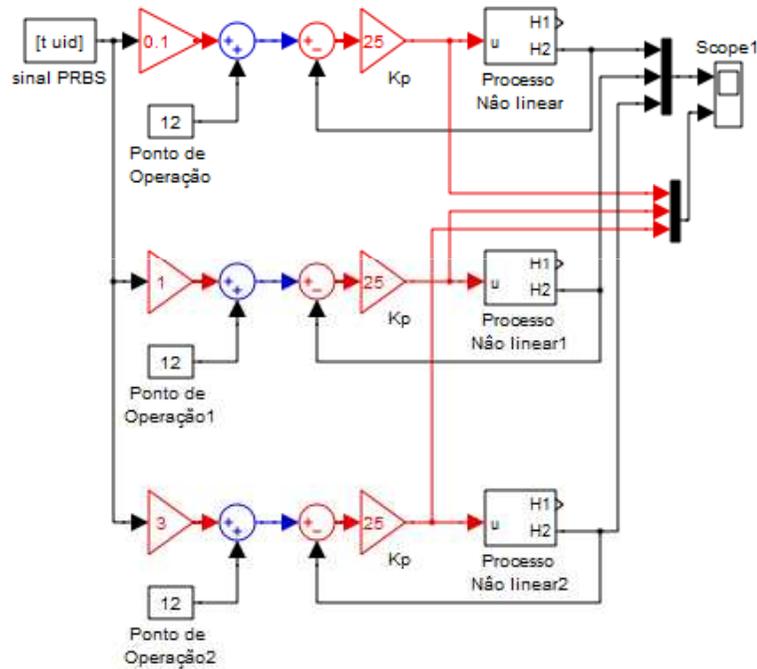
Malha aberta ->

seria necessário aumentar muito o tempo do experimento!!

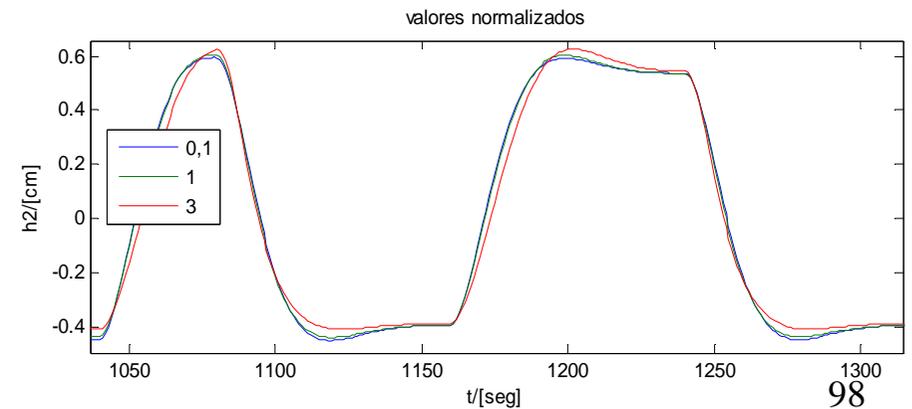
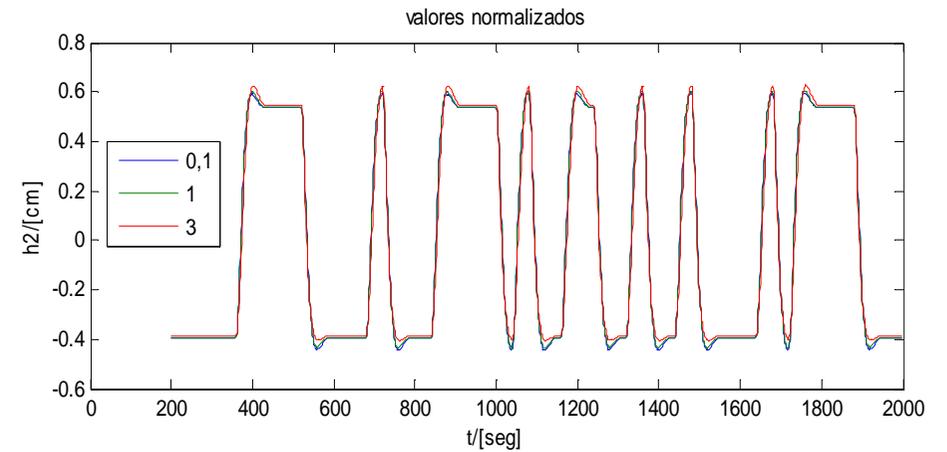
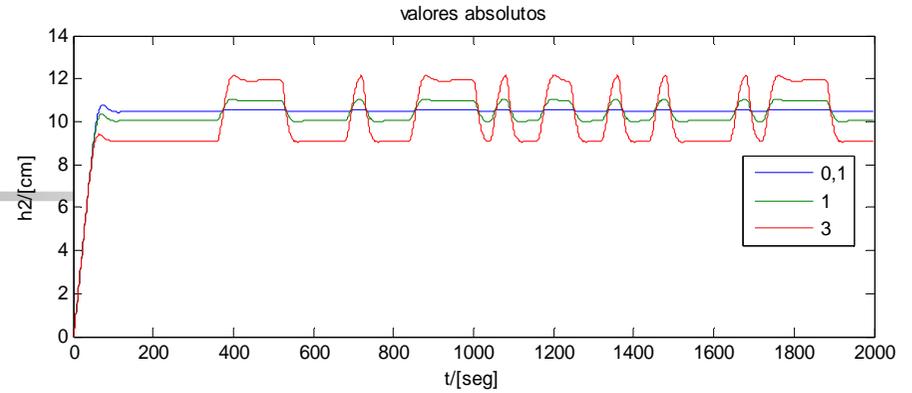




# Identificação Pequenos Sinais?



`uid=idinput(12600,'PRBS',[0 0.025],[-.5 .5]);`





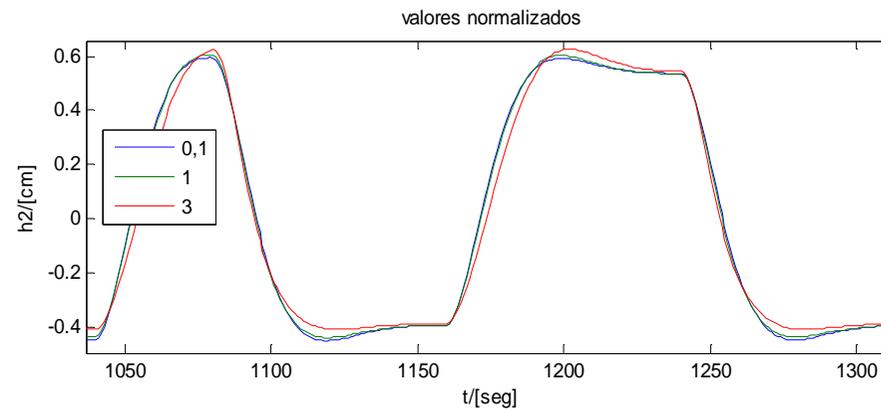
# Taxa de Amostragem

Teorema de Nyquist

REGRA: 5 a 8 amostras durante o tempo de subida.

Em geral é melhor realizar o experimento numa taxa mais alta e posteriormente decimar o sinal.

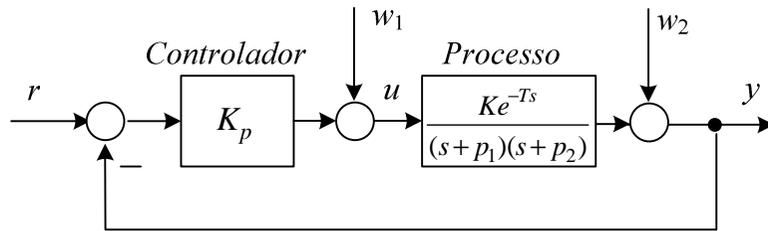
Considerar a operação em malha fechada.



```
uid=idinput(12600,'PRBS',[0 0.025],[-.5 .5]);
```



# Identificação em Malha Fechada



Malha Aberta:  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ts}}{s^2 + (p_1 + p_2)s + p_1p_2}$

- Processo muito lento
- Ponto de Operação?

## Identificação em Malha Fechada:

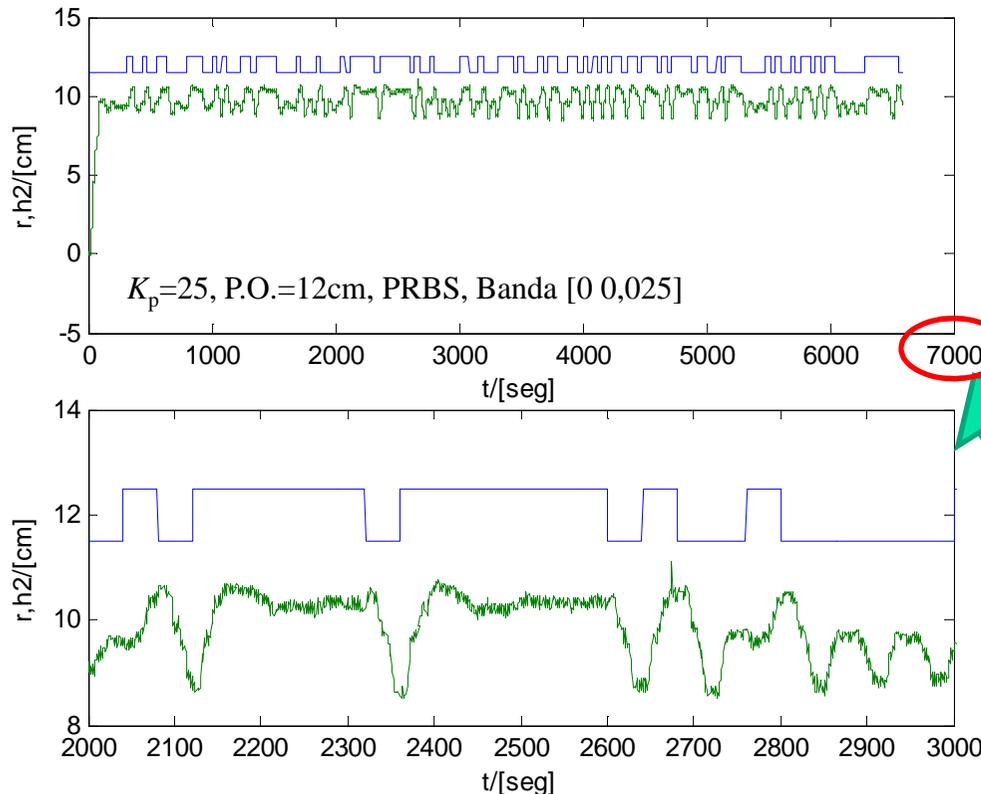
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p K e^{-Ts}}{s^2 + (p_1 + p_2)s + p_1p_2 + K_p K}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{0,0073637e^{-4,7s}}{s^2 + 0,05741s + 0,007676}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0,0002945e^{-4,7s}}{s^2 + 0,05741s + 0,0003123}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0,0002945e^{-4,7s}}{(s + 0,0513)(s + 0,0061)}$$

$$T_1 = 19,48seg; T_2 = 164,35seg$$



~2h  
em M.F.!



# PARTE IV

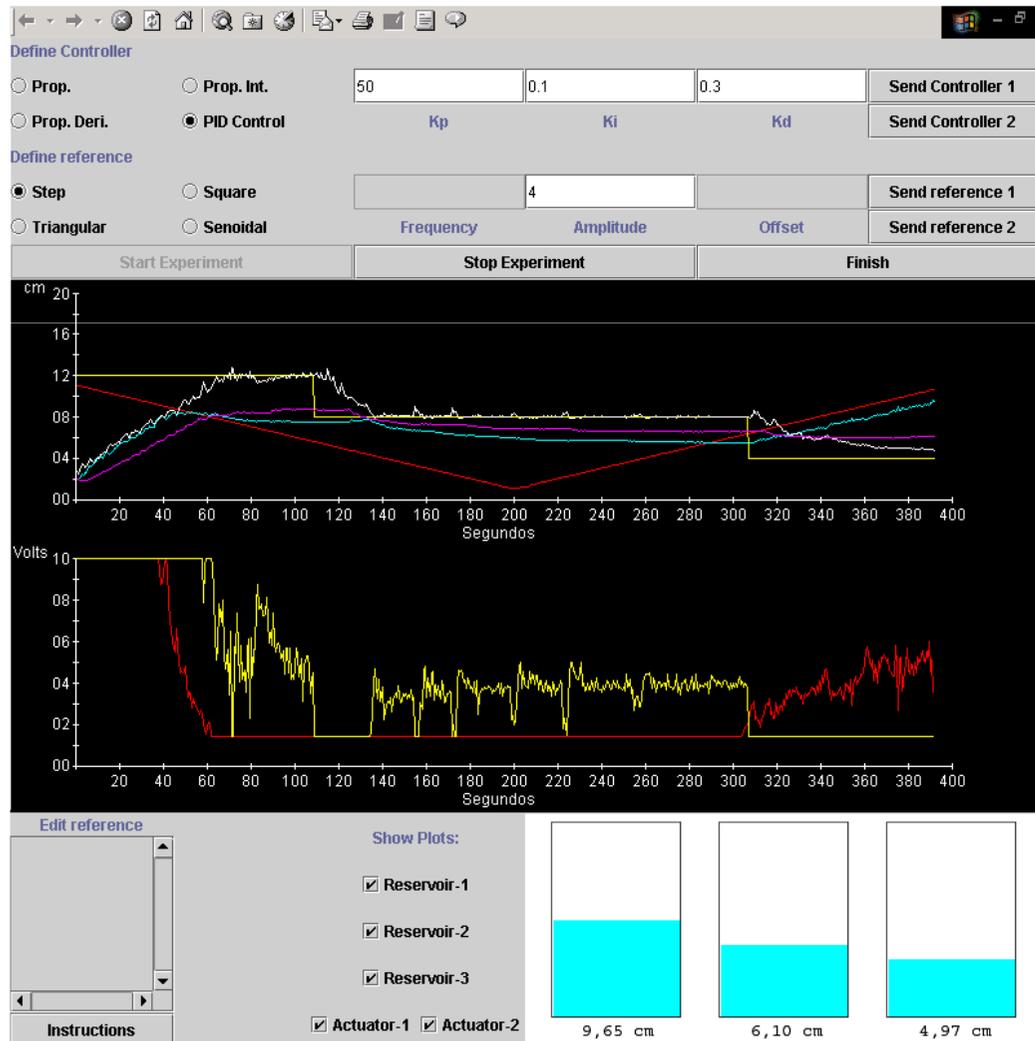
## c) NÍVEL DE LÍQUIDO

### 4<sup>a</sup> ORDEM



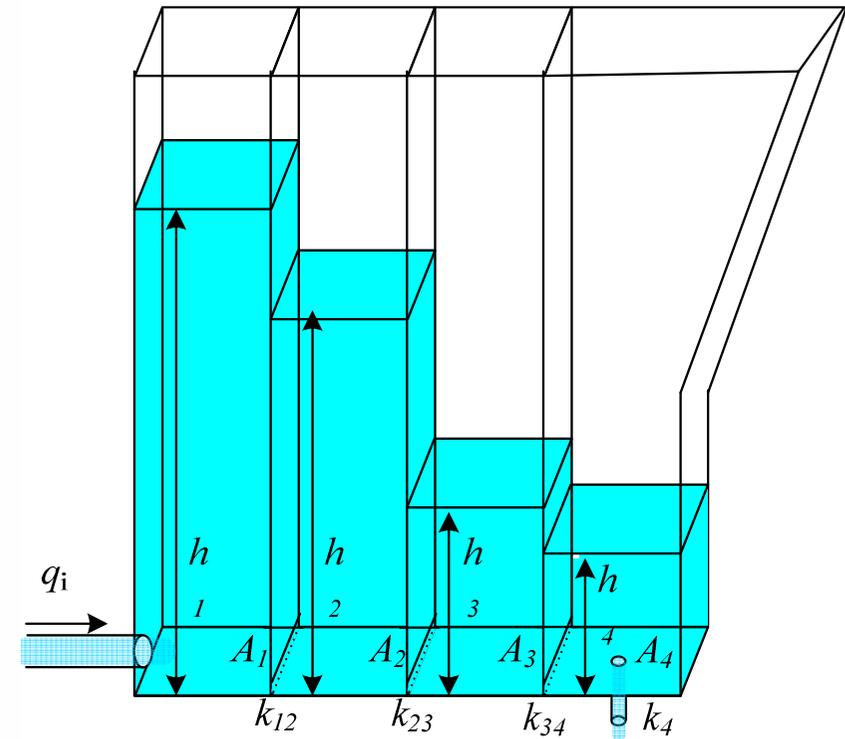
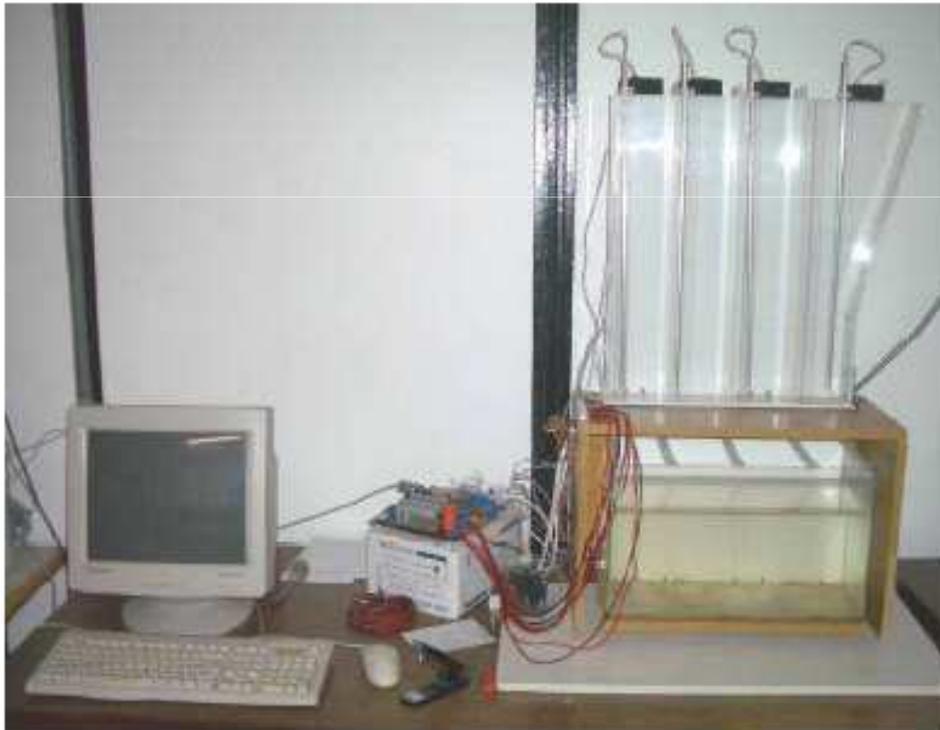
# LEARn

## Laboratorio de Ensino de Automação Remoto da UnB





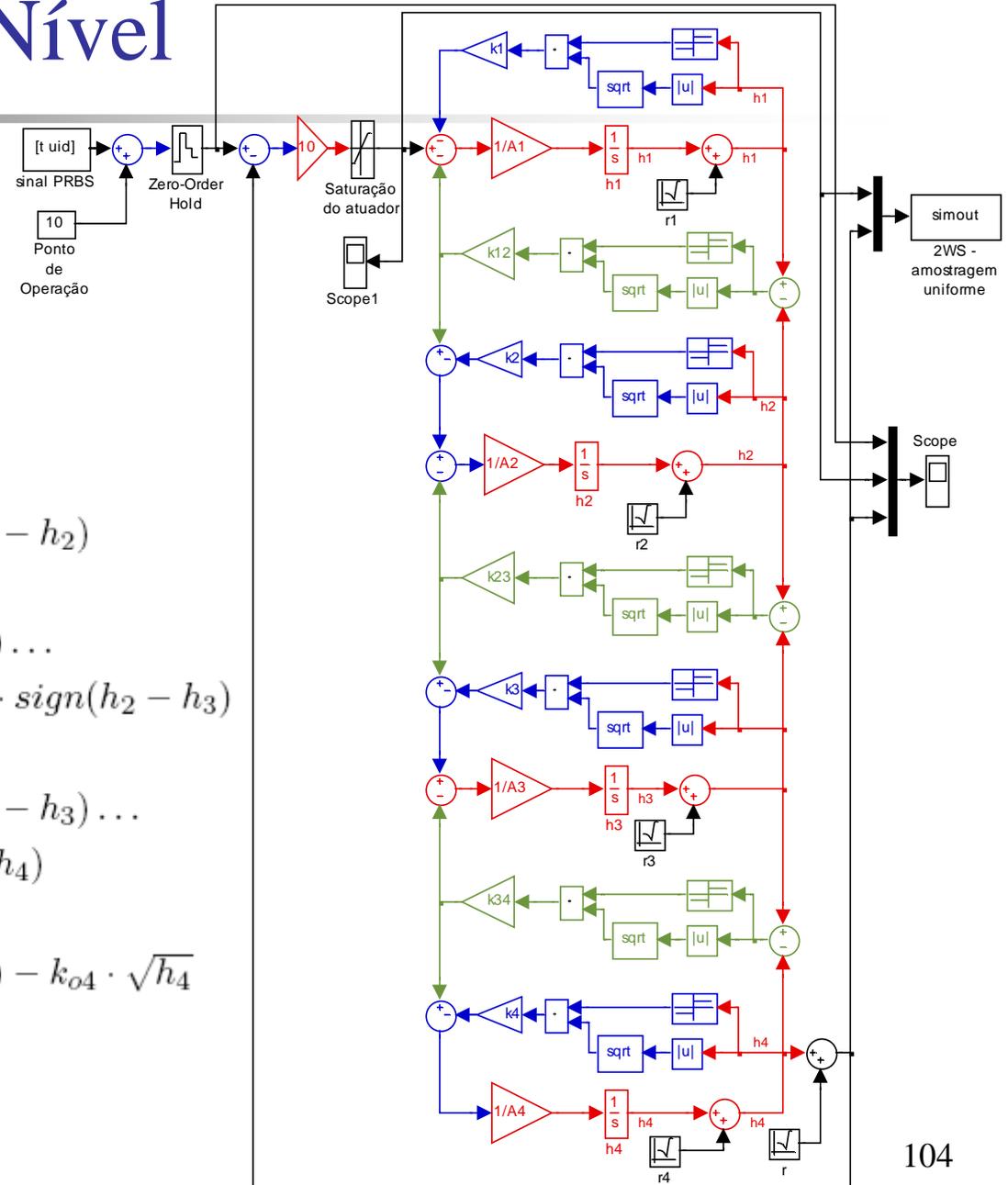
# Processo de Nível de Líquido 4ª Ordem





# Processo de Nível

$$\begin{cases}
 A_1 \cdot h_1 &= q_{i1} - k_{12} \cdot \sqrt{|h_1 - h_2|} \cdot \text{sign}(h_1 - h_2) \\
 A_2 \cdot h_2 &= k_{12} \cdot \sqrt{|h_1 - h_2|} \cdot \text{sign}(h_1 - h_2) \dots \\
 &\quad -k_{o2} \cdot \sqrt{h_2} - k_{23} \cdot \sqrt{|h_2 - h_3|} \cdot \text{sign}(h_2 - h_3) \\
 A_3 \cdot h_3 &= q_{i2} + k_{23} \cdot \sqrt{|h_2 - h_3|} \cdot \text{sign}(h_2 - h_3) \dots \\
 &\quad -k_{34} \cdot \sqrt{|h_3 - h_4|} \cdot \text{sign}(h_3 - h_4) \\
 A_4 \cdot h_4 &= k_{34} \cdot \sqrt{|h_3 - h_4|} \cdot \text{sign}(h_3 - h_4) - k_{o4} \cdot \sqrt{h_4}
 \end{cases}$$



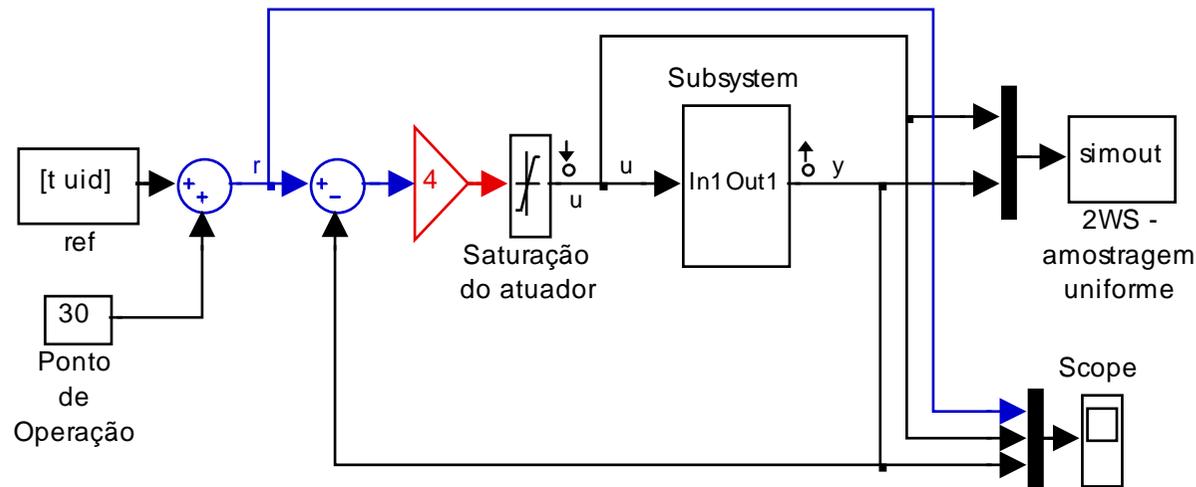


# Processo de Nível de Líquido

## Linearização em Ponto de Operação (u, y)

P1:  $r = 10$ ;  $h_1=19,1$ ;  $h_2=11,7$ ;  $h_3=7,31$ ;  $h_4=3,87$

P2:  $r = 30$ ;  $h_1=84,3$ ;  $h_2=51,9$ ;  $h_3=32,3$ ;  $h_4=17,1$





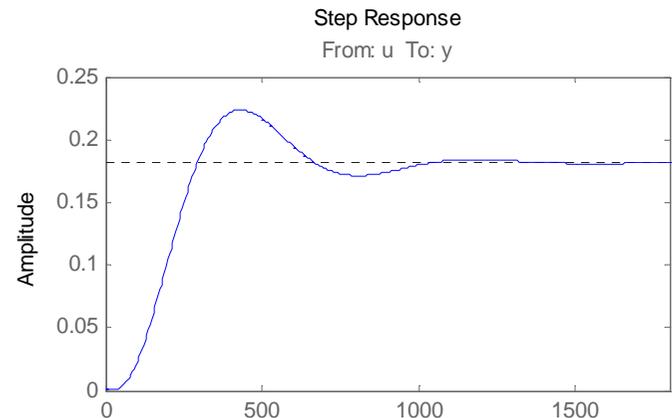
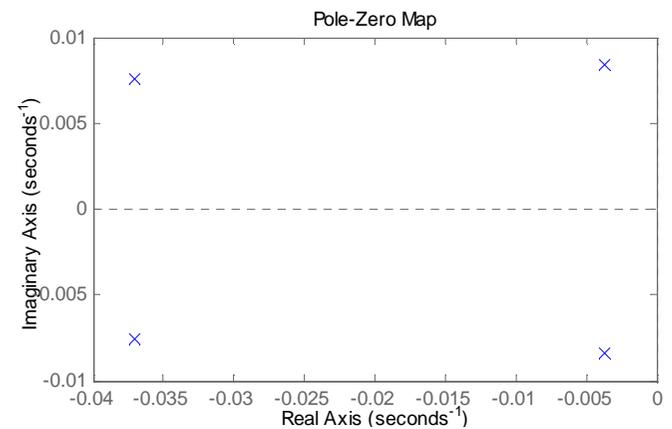
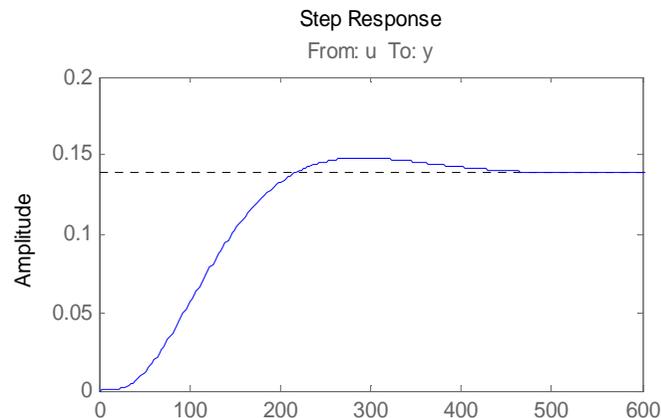
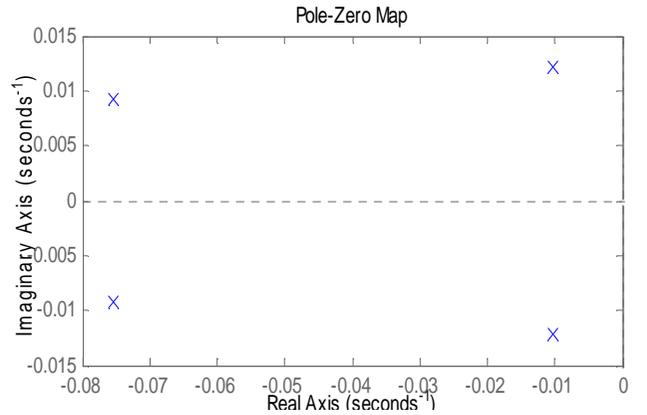
# Linearização em Ponto de Operação (u, y)

P1: r = 10; h1=19,1; h2=11,7; h3=7,31; h4=3,87

P2: r = 30; h1=84,3; h2=51,9; h3=32,3; h4=17,1

$$P1: \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2.0446e-007}{(s^2 + 0.151s + 0.005785)(s^2 + 0.02073s + 0.0002536)}$$

$$P2: \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2.1978e-008}{(s^2 + 0.07416s + 0.001432)(s^2 + 0.007496s + 8.453e-005)}$$





# Linearização Analítica em P.O.

P1:  $r = 10$ ;  $h_1=19,1$ ;  $h_2=11,7$ ;  $h_3=7,31$ ;  $h_4=3,87$

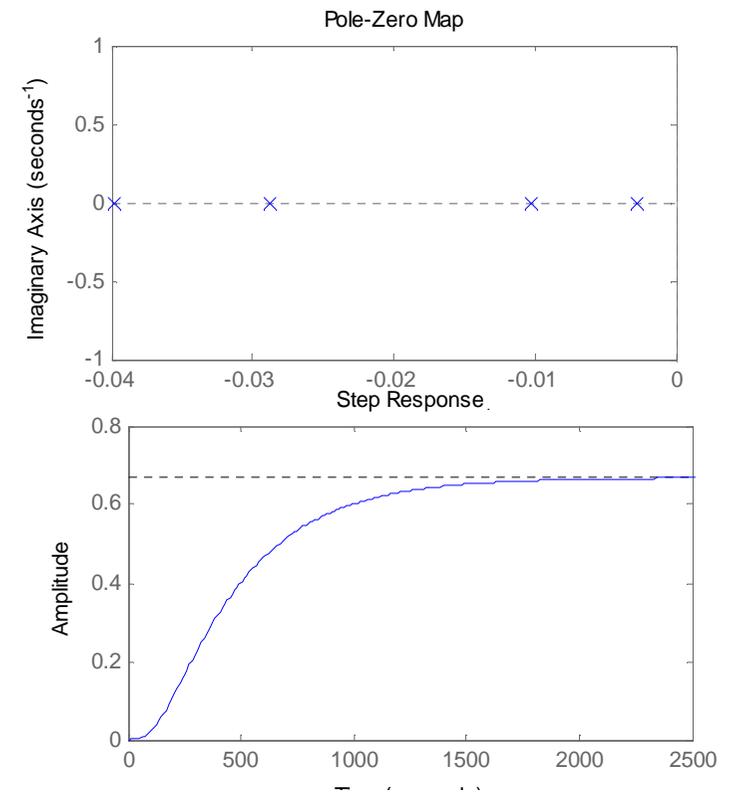
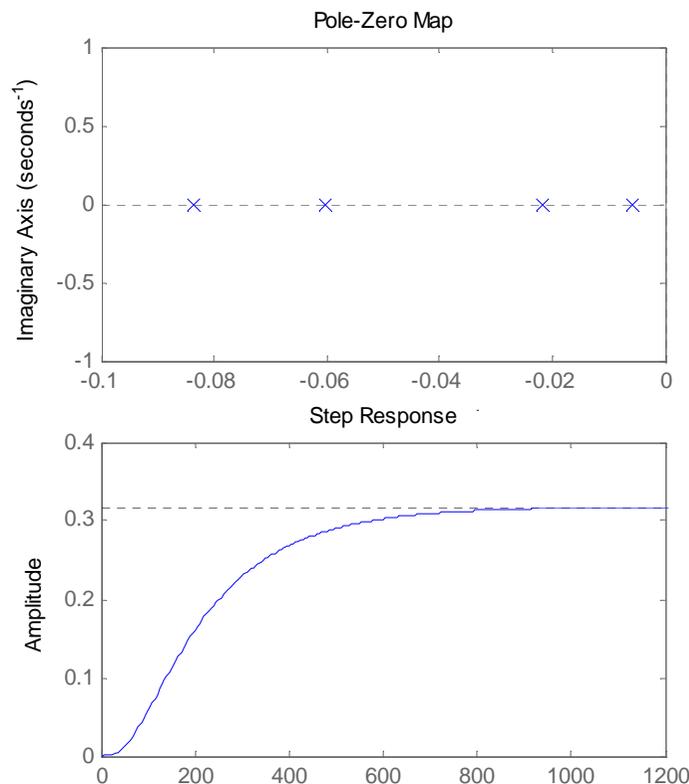
P2:  $r = 30$ ;  $h_1=84,3$ ;  $h_2=51,9$ ;  $h_3=32,3$ ;  $h_4=17,1$

$2.0448e-007$

$(s + 0.08362)(s + 0.06036)(s + 0.02168)(s + 0.00588)$

$2.1982e-008$

$(s + 0.03976)(s + 0.0287)(s + 0.01031)(s + 0.002796)$





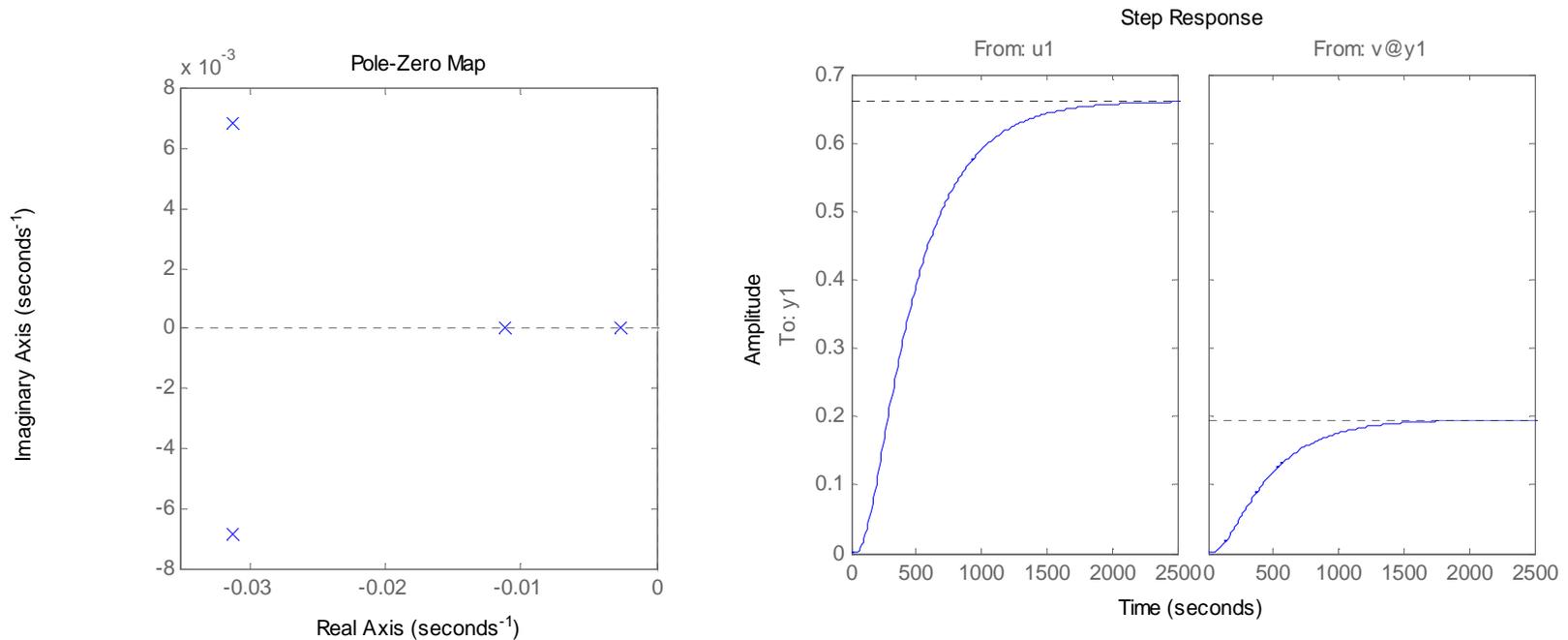
# Identificação em P.O. (em Malha Fechada)

uid=idinput(10000,'PRBS',[0 0.05],[-1 1])

P2: r = 30; h1=84,3; h2=51,9; h3=32,3; h4=17,1

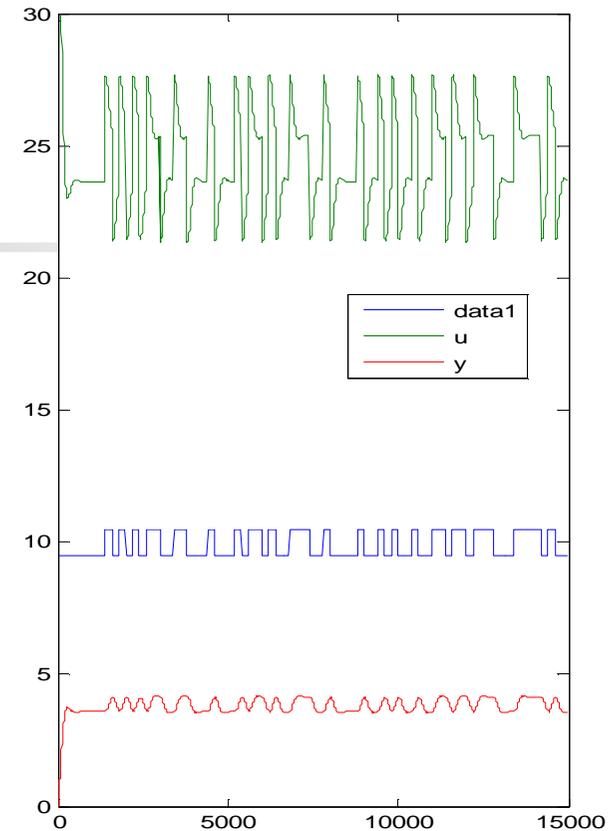
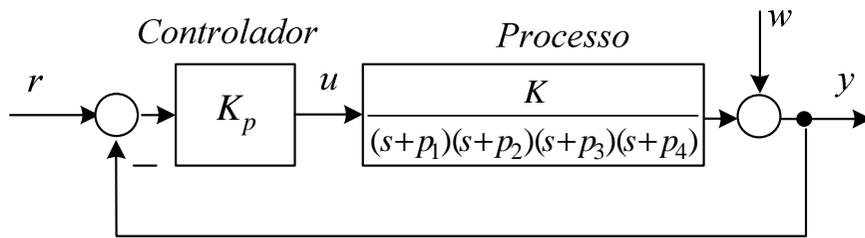
n4s4 – Best Fit = 97,62

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3.6002e-007 (s + 0.2757) (s^2 - 0.5737s + 0.2038)}{(s + 0.01119) (s + 0.002666) (s^2 + 0.06255s + 0.001025)}$$





# Identificação em MF

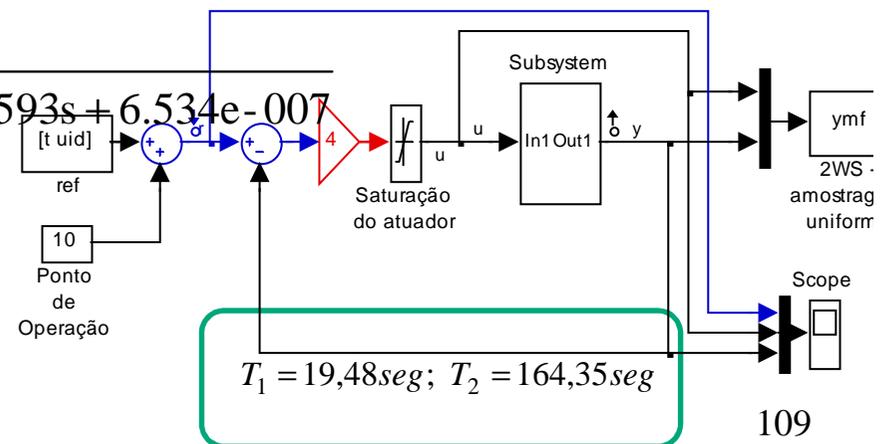


Malha Aberta: 
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

Malha Fechada: 
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p K}{s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 + K_p K}$$

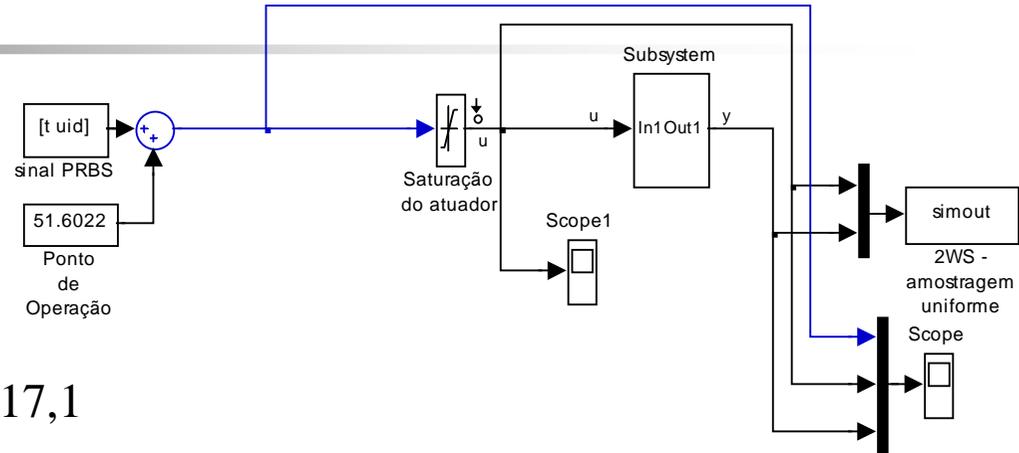
$\bar{r} = 10; \bar{u} = 24,443, \bar{y} = 3,8367,$

analítico: 
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2.068e-007}{s^4 + 0.1722s^3 + 0.009214s^2 + 0.0001593s + 6.534e-007}$$





# Identificação em P.O. - Malha Aberta

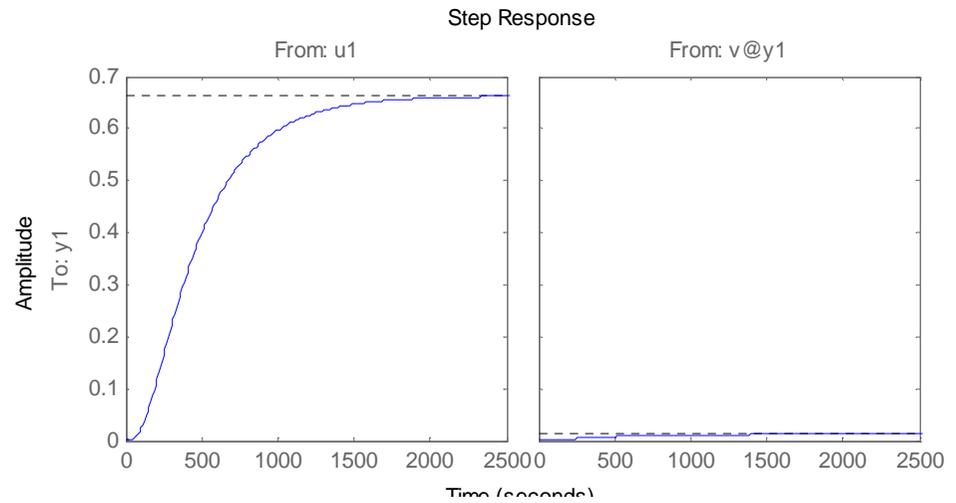
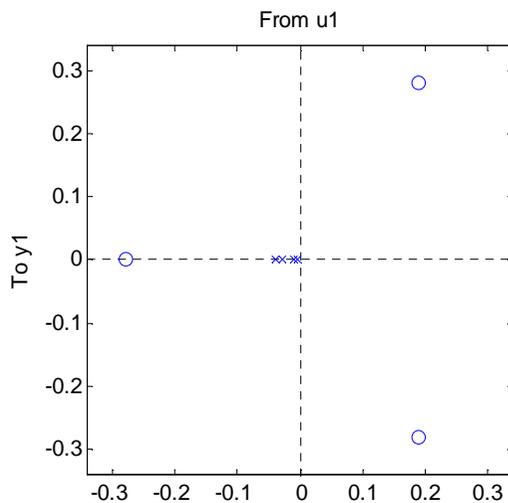


`uid=idinput(10000,'PRBS',[0 0.05],[-1 1])`

P2:  $r = 30$ ;  $h1=84,3$ ;  $h2=51,9$ ;  $h3=32,3$ ;  $h4=17,1$

n4s4 – Best Fit = 95,63

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6.7775e-007 (s + 0.2777) (s^2 - 0.3814s + 0.1151)}{(s + 0.03914) (s + 0.02876) (s + 0.01034) (s + 0.002808)}$$





# Identificação P.O.

## – Control Design – Linear Analysis

P2:  $u = 51.6$ ;  $h1=84,3$ ;  $h2=51,9$ ;  $h3=32,3$ ;  $h4=17,1$

`zpk(Model_sys2)`

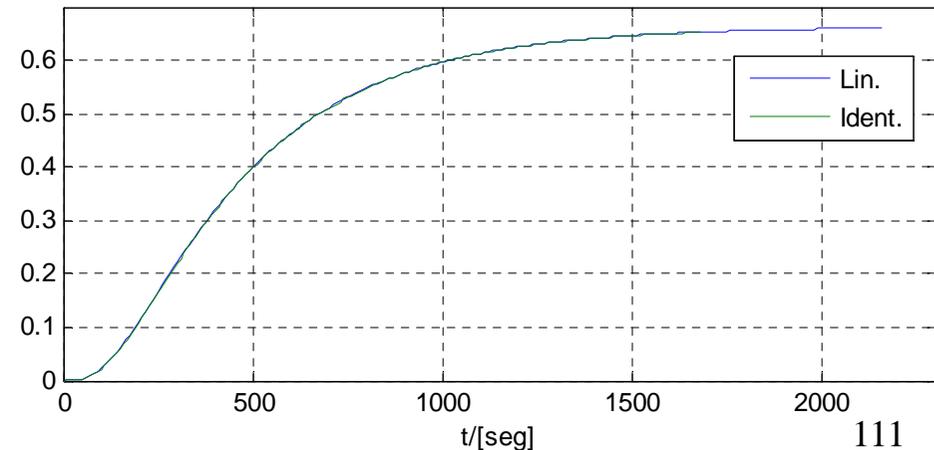
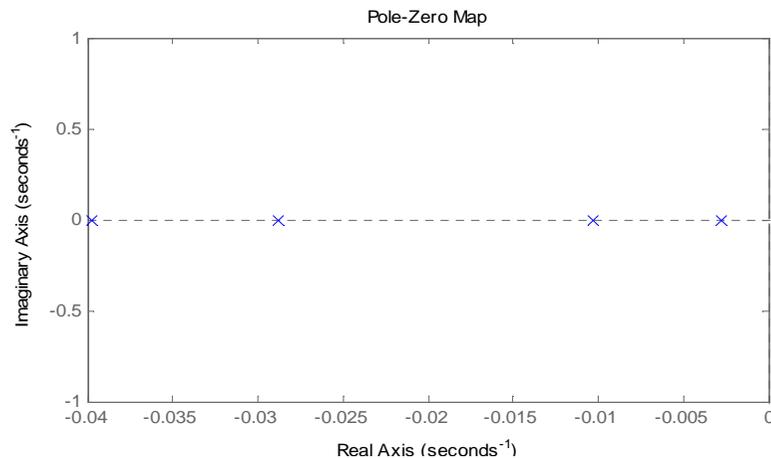
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2.198e-008}{(s + 0.03972)(s + 0.02881)(s + 0.01032)(s + 0.002809)}$$

Modelo Analítico:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2.1982e-008}{(s + 0.03976)(s + 0.0287)(s + 0.01031)(s + 0.002796)}$$

`uid=idinput(10000,'PRBS',[0 0.01],[-1 1]):`  
`n4s4: Fit 98.55 zpk(d2c(n4s4))`

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3.6168e-008 (s + 0.7369) (s^2 - 1.054s + 0.8185)}{(s + 0.03846)(s + 0.002816)(s + 0.01025)(s + 0.02969)}$$





# V Conclusões

---

- Teoria já bem estabelecida
- Dificuldades Práticas
- Principal Ferramenta: MMQ e variantes
- “Arte” na escolha de:
  - ✓ estrutura, taxa de amostragem, algoritmos etc
- Algoritmos Recursivos
- Sistemas não-lineares



# Referências

- 1) **Aguirre**, L.A. (2007): Introdução à Identificação de Sistemas, 3a ed, Editora UFMG
- 2) Lennart **Ljung** (1999): System Identification - Theory For the User, 2nd ed, PTR Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J.
- 3) **Landau**, I.D; Zito, G. (2006): Digital Control Systems; Design, Identification and Implementation, Springer.
- 4) **Haykin**, S. (2001): Redes Neurais – Princípios e Prática, 2ª Ed., Ed. Bookman
- 5) **Rossiter**, J. A. (2003): Model-based predictive control: a practical approach, CRC press.
- 6) **MatLab** - Control System Toolbox, System Identification Toolbox, Model Predictive Control Toolbox
- 7) [www.periodicos.capes.gov.br](http://www.periodicos.capes.gov.br)



FIM

**Contato:**

Prof. Adolfo Bauchspiess

Tel. +55 61 3107 5571

adolfo AT lara unb br

<http://lara.unb.br/~adolfo>

**Endereço:**

Sala B1-34/18 (Caixa Postal 04386)

Departamento de Engenharia Elétrica - ENE/FT/UnB

Campus Universitário Darcy Ribeiro - Asa Norte

70904-970 Brasília-DF BRASIL

Página da Disciplina – Identificação de Sistemas Dinâmicos:

[http://lara.unb.br/~bauchspiess/index.php?option=com\\_content&view=article&id=69&Itemid=68](http://lara.unb.br/~bauchspiess/index.php?option=com_content&view=article&id=69&Itemid=68)