



ENE/FT/UnB

Nome: \_\_\_\_\_ Matrícula: \_\_\_\_\_

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$U(s) = 1/s$$

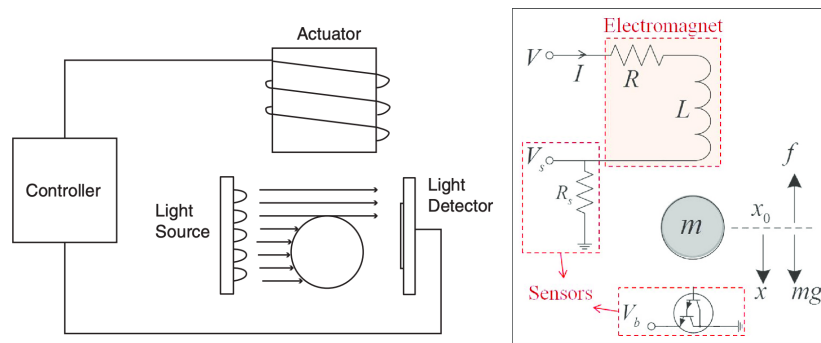
$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}; \sigma = \zeta\omega_n; \phi = \tan^{-1} \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$



## 1ª PROVA ISD - 2º/2019

**1ª Questão (6,0)** Considere o sistema de levitação magnética mostrado a seguir, com  $m\ddot{x} = mg - f$ ; A força magnética,  $f = ki^2/x^2$ , produzida pela bobina, contrapõem a força da gravidade.



### Modelagem caixa-branca

Obtenha, inicialmente, a função de transferência  $\delta X(s)/\delta I(s)$ , do modelo linearizado, que descreve a posição da esfera  $x$ , em função da corrente,  $i$ , em pequenos sinais.  $f(x, i) \approx L(x, i) = f(x_0, i_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, i_0} \delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial i} \right|_{x_0, i_0} \delta i$

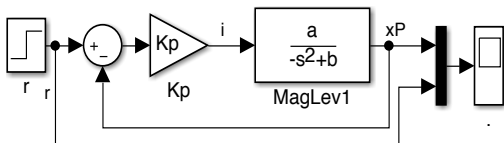
$$x(t) = x_0 + \delta x(t); \mathcal{L}\{\delta x(t)\} = \delta X(s); i(t) = i_0 + \delta i(t); \mathcal{L}\{\delta i(t)\} = \delta I(s);$$

- a) (0,5) Para uma corrente  $i_0$ , a esfera permanecerá em  $x_0$ . Calcule  $x_0$  em função de  $i_0$ . (Ponto de operação).  
 b) (1,0) Mostre que, em pequenos sinais,

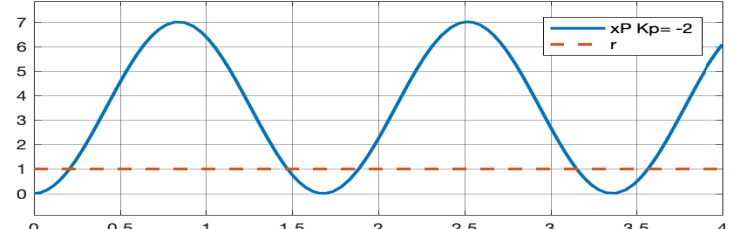
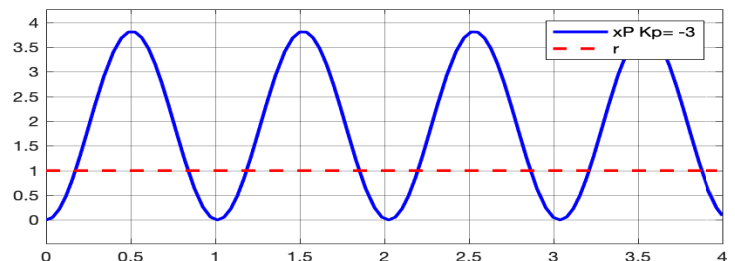
$$\frac{\delta X(s)}{\delta I(s)} = \frac{2ki_0/mx_0^2}{-s^2 + \frac{2ki_0^2}{mx_0^3}} = \frac{a}{-s^2 + b}$$

### Modelagem determinística

Para estabilizar o processo, é necessário, no mínimo, um controlador proporcional,  $K_p$ .

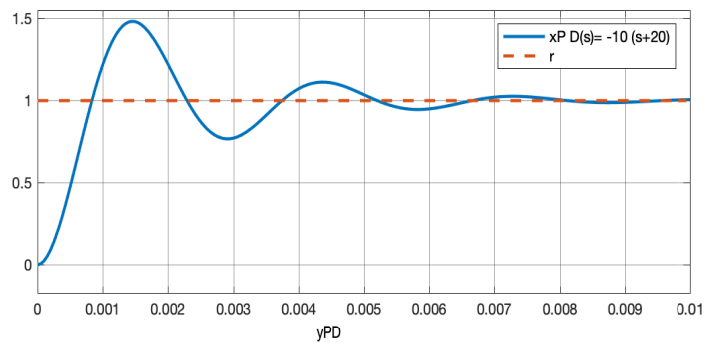


- c) (1,0) Com os valores de  $K_p$  indicados nos gráficos ao lado, calcule os parâmetros  $a$  e  $b$ .



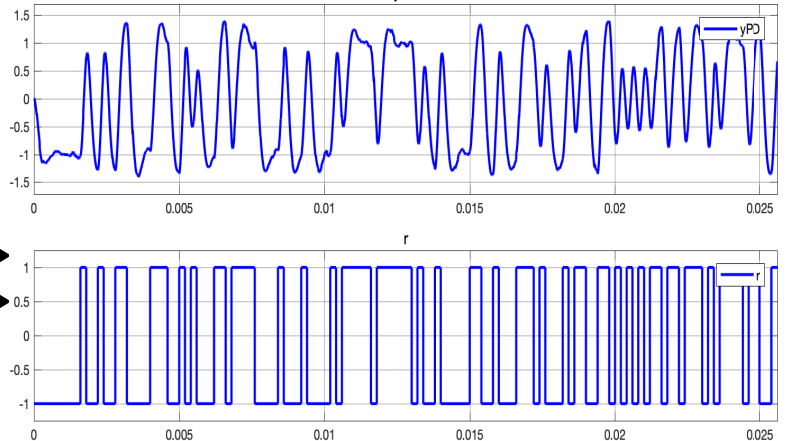
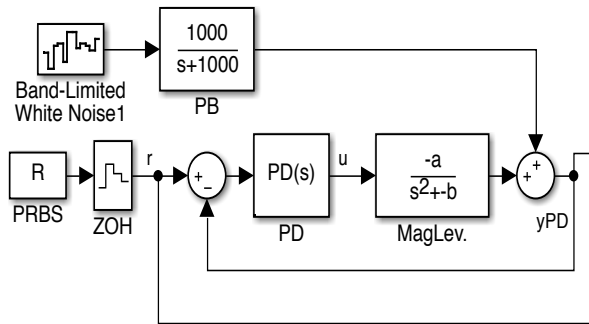
Considere agora, que é utilizado um controlador PD para estabilizar e seguir referências.

- d) (1,0) Considerando que se tenha  $\frac{\delta X(s)}{\delta I(s)} = \frac{b_1 s + b_1}{s^2 + a_1 s + a_0}$ , a partir do gráfico ao lado. Obtenha os parâmetros  $a$  e  $b$  do processo.



Modelagem caixa-preta

Processos reais estão sempre sujeitos a ruídos.



- e) Projete um sistema de identificação caixa-preta para a levitação magnética. Proponha, justificando (heurísticamente):
- (0,5) Identificação  $Y_{PD}(s)/U(s)$  versus  $Y_{PD}(s)/R(s)$ .
  - (0,5) Taxa de amostragem duração do experimento, banda de Nyquist do PRBS e Excursão do sinal.
  - (0,5) Modelo (Processo ident(), ARX, ARMAX, OE, Box-Jenkins, Espaço-de-Estados).
  - (0,5) Identificação não polarizada (Mínimos Quadrados (MQ), EMQ, GMQ, VI, MQ recursivo)\*.
  - (0,5) Ordens (compatíveis com o modelo):  $n_a, n_b, n_c, n_d, n_k$

\*Obs – Se EMQ – indicar os resíduos. Se GMQ – indicar a estrutura do filtro  $D'(q)$ . Se VI – indicar os instrumentos. Se MQ recursivo – indicar a taxa  $\lambda$ .

2ª Questão (2,0): Considerando a identificação que visa o projeto de controladores, assinale verdadeiro, V, ou falso, F. Caso considere um item falso, comente de forma crítica o(s) trecho(s) que tornam a sentença falsa.

- A equação de Wiener-Hopf,  $r_{uy}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)r_{uu}(k-i)$ , permite identificar sistemas de forma bem mais robusta que o uso da inversa obtida da convolução  $y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)u(k-i)$ , isto é  $y = U h$ , com  $u(k) = 0, \forall k \neq 0$ . Isto ocorre, pois cada termo da correlação leva em conta todos os valores de  $u$  e  $y$ .
- Um sinal PRBS não é de fato “branco” (possui energia similar em todo o espectro). Isto explica o fato de haver estimativas dos parâmetros com polarização no método da variável instrumental.
- Processos não lineares podem ter vários pontos de equilíbrio (estáveis e instáveis). O modelo linearizado, no entanto, tem sempre um único ponto de equilíbrio. Como um dos objetivos da identificação é projetar controladores, é necessário validar o projeto simulando o controlador com o modelo não linear no ponto de operação escolhido. O controlador pode, no entanto, alterar o ponto de operação de um sistema linear.
- A escolha da taxa de amostragem é um passo crítico na identificação de sistemas dinâmicos. Por um lado, deve ser rápida, para não se perder “algo importante”, por outro lado não se quer acompanhar o ruído. Neste caso um conhecimento caixa branca pode guiar o processo de escolha, pois os autovalores do processo de ruído, em malha aberta, amarram a taxa de amostragem. Em geral são os autovalores mais rápidos no processo todo.

3ª Questão (2,0): Considere um sistema SISO discreto P3DZ (3 polos, 1 zero e 1 atraso) com ruído MA de 2ª ordem. 512 amostras de um sinal de entrada  $u$ , PRBS, e as correspondentes saídas  $y$ , estão disponíveis.

- Esboce em pseudo-código (ou em .m) o algoritmo dos Mínimos Quadrados Estendido (matriz de regressores aumentada) para a identificação do processo. Especial atenção deve ser dada às dimensões de matrizes e vetores.
- Esboce em pseudo-código (ou em .m) o algoritmo das Variáveis Instrumentais para a identificação do mesmo processo. Indique, particular, as dimensões das matrizes, vetores e os instrumentos.

## GABARITO

## 1ª Questão (6,0)

- a) Em  $x_0$  (estático),  $mg = \frac{ki^2}{x^2}$ ;  $x_0 = i_0 \sqrt{k/mg}$
- b)  $f(x, i) \approx L(x, i) = \frac{ki_0^2}{x_0^2} - 2ki_0^2/x_0^3 \delta x + 2ki_0/x_0^2 \delta i$

$$m\ddot{x} = mg - \frac{ki_0^2}{x_0^2} + \frac{2ki_0^2}{x_0^3} \delta x - \frac{2ki_0}{x_0^2} \delta i; \quad ms^2 \delta X(s) - \frac{2ki_0^2}{x_0^3} \delta X(s) = -2ki_0/x_0^2 \delta I(s);$$

$$\frac{\delta X(s)}{\delta I(s)} = \frac{-2ki_0/x_0^2}{ms^2 - \frac{2ki_0^2}{x_0^3}} = \frac{-\frac{2ki_0}{mx_0^2}}{s^2 - \frac{2ki_0^2}{mx_0^3}} = \frac{a}{-s^2 + b}$$

c)  $\frac{X_p(s)}{R(s)} = \frac{K_p a}{-s^2 + b + K_p a}$

Do 1º gráfico:  $K_p = -3 \rightarrow \frac{3a}{s^2 + 3a - b}; \frac{A\omega^2}{s^2 + \omega^2}$   
 $A = \frac{3,8}{2} = 1,9; T = 1,03 \text{ s}; \omega = \frac{2\pi}{T} = 6,1$   
 $A\omega^2 = 70,7; a = 23,5663;$   
 $3a - b = 37,21; b = 33,49;$

Do 2º gráfico:  $K_p = -2 \rightarrow \frac{2a}{s^2 + 2a - b}; \frac{A\omega^2}{s^2 + \omega^2}$   
 $A = \frac{7}{2} = 3,5; T = \frac{3,35}{2} = 1,675; \omega = \frac{2\pi}{T} = 3,7512$   
 $A\omega^2 = 49,2491; a = 24,6245;$   
 $2a - b = 14,0715; b = 35,1775;$

(Valores utilizados na simulação:  $a = 24,525; b = 35,0534$ )

d)  $\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{K(s+z) \frac{a}{-s^2 + b}}{1 + K(s+z) \frac{a}{-s^2 + b}} = \frac{-K(s+z)a}{s^2 - b - K(s+z)a} = \frac{-Kas - Kza}{s^2 - Kas - b - Kza}$

$$\begin{cases} b_1 = -Ka \\ b_0 = -Kza \\ a_1 = -Ka \\ a_0 = -b - Kza \end{cases}$$

(Conhecendo-se  $\{K, z\}$ ,  $a$  pode ser obtido de 3 equações.  $b$ , apenas da última eq.)

- e)  $Y_{PD}(s)/U(s)$  tem sinais filtrados pela MF. Já  $Y_{PD}(s)/R(s)$  utiliza uma entrada PRBS, o que é melhor do ponto de vista da excitação do processo (PRBS não favorece uma certa faixa do espectro).

Taxa de amostragem: utilizar  $0,0014/8 = 1,75e-4$  (5 a 8 amostras até  $t_p$ )  
 Banda de Nyquist [0 05], amplitude [-1 1].

Modelo: ARMAX ou Box-Jenkins; 2 polos e um zero.

Id. Não polarizada: VI, Instrumentos:  $y_{\text{pred}} u(k)$  e  $u(k-1)$

Ordens:  $na=2; nb=2; nc=2, nd=1; nk=1;$

## 2ª Questão (2,0):

- a) F – quanto maior o *delay*, menos termos entram na equação da correlação.  
 b) F – se os instrumentos são adequados não há polarização no método VI.  
 c) V  
 d) F – os autovalores do processo (e não do ruído) estabelecem a taxa de amostragem.

3ª Questão (2,0): P3DZ (3 polos, 1 zero e 1 atraso) com ruído MA de 2ª ordem

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(b_1 z + b_0) z^{-1}}{z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

$$y(k+3) + a_2 y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_1 u(k) + b_0 u(k-1) + e(k+3)$$

$$y(k) = -a_2 y(k-1) - a_1 y(k-2) - a_0 y(k-3) + b_1 u(k-3) + b_0 u(k-4) + v(k) + cv(k-1)$$

a)

Primeira rodada MQ:

$$y(k) = \psi_i^T \Theta_i + e; \quad \Theta_i = [-a_2 \quad -a_1 \quad -a_0 \quad b_1 \quad b_0]^T; \quad \psi_i^T = [y(k-1) \quad y(k-2) \quad y(k-3) \quad u(k-3) \quad u(k-4)]$$

$$\Theta_i = (\psi_i^T \psi_i)^{-1} \psi_i^T y$$

Utilização do resíduo  $\xi$  como estimativa do ruído  $v$ .

$$\xi = y(k) - \psi^T \Theta;$$

$$\psi^T = [y(k-1) \quad y(k-2) \quad y(k-3) \quad u(k-3) \quad u(k-4) \quad \xi(k-1)]; \quad \Theta = [-a_2 \quad -a_1 \quad -a_0 \quad b_1 \quad b_0 \quad c]^T.$$

$$\Theta = (\psi^T \psi)^{-1} \psi^T y$$

Código:

MQE

`% estimacao inicial de parametros usando estimador MQ`

`Psi=[y(4:N-1) y(3:N-2) y(2:N-3) u(2:N-3) u(1:N-4)]; V=y(5:N);`

`teta=inv(Psi'*Psi)*Psi'*V;`

`xi=V-Psi*teta;`

`% estimador EMQ`

`xi2=[0; 0; 0; 0; 0; 0; xi(1:N-5)];`

`for k=1:10 % iteracoes para assegurar convergencia`

`PsiE=[Psi(1:N-4, :) xi2(4:N-1)];`

`tetaE=inv(PsiE'*PsiE)*PsiE'*V(1:N-4);`

`xi2=[0;0;0;0;0;0; V(1:N-4)-PsiE*tetaE];`

`end;`

b)

VI – Com ruído MA poderíamos utilizar instrumentos  $\hat{y}(k-i)$  ou  $u(k-i)$  no lugar dos regressores  $y(k-i)$ .  $\hat{y}(k-i)$  é o valor predito por  $\Theta$ , e não contaminado por ruído, como é o caso de  $y(k-i)$ .

$$y(k) = \psi^T \Theta + e; \quad \Theta = [-a_2 \quad -a_1 \quad -a_0 \quad b_1 \quad b_0]^T;$$

$$\psi^T = [y(k-1) \quad y(k-2) \quad y(k-3) \quad u(k-3) \quad u(k-4)]$$

Instrumentos:

$$Z_{\hat{y}}^T = [\hat{y}(k-1) \quad \hat{y}(k-2) \quad \hat{y}(k-3) \quad u(k-3) \quad u(k-4)]$$

$$Z_u^T = [u(k-5) \quad u(k-6) \quad u(k-7) \quad u(k-3) \quad u(k-4)]$$

Ou uma combinação destes.

$$\Theta_{VI} = (Z^T \psi)^{-1} Z^T y$$

Obs: se o ruído fosse AR só o instrumento  $Z_u^T$  poderia ser utilizado para evitar a polarização.