Departamento de Engenharia Elétrica
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília

ENE/FT/UnB

Prof. Adolfo Bauchspiess
Identificação de Sistemas Dinâmicos - 1°/2011
(Tópicos em Controle e Automação)

Quarta-Feira,29/06/2011, 16:00-18:00

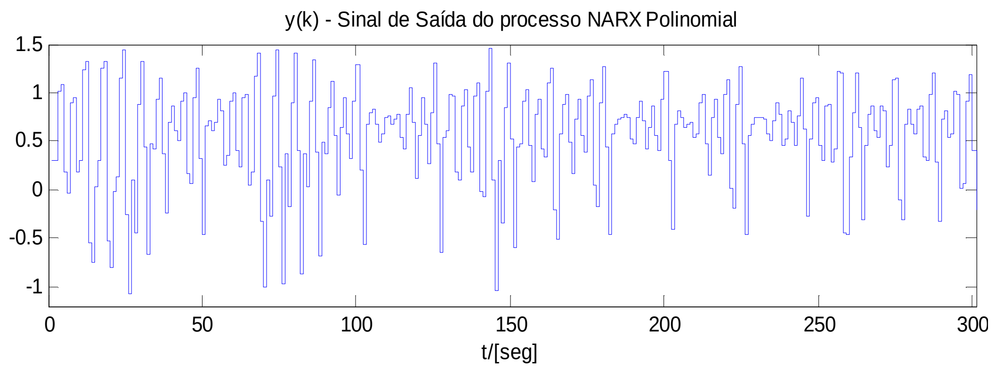
Nome:____Matrícula:_______________

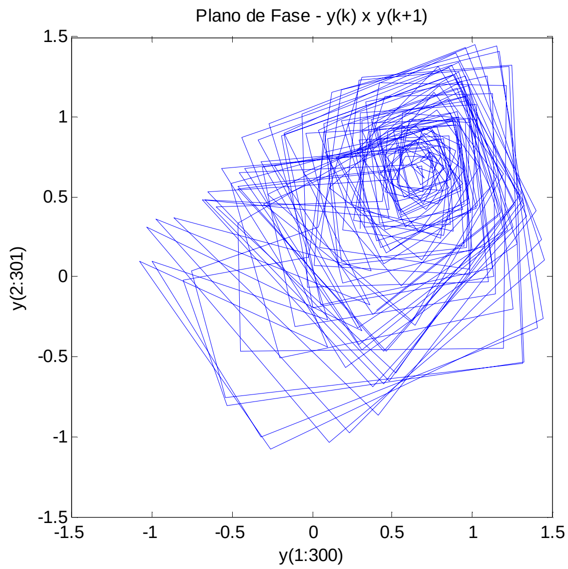
2ª PROVA ISD

1ª Questão: Considerando o seguinte sistema NARX polinomial

$$y(k)=1+0{,}4y(k-1)+0{,}1y(k-2)+u(k-1)-0{,}5u(k-2)-0{,}2y(k-1)\wedge 2-0{,}1y(k-2)\wedge 2-0{,}2y(k-1)y(k-2)$$
$$+0{,}2*u(k-1)*u(k-2)+0{,}6u(k-1)*y(u-1)-0{,}7*u(k-1)*y(k-2)+0{,}1*u(k-2)*y(k-1)$$

Para T_s = 1 seg, y(-1) = y(-2) = 0,3 e u = 0,5*sen(k) obtêm-se:





a) (1,0) Obtenha o polinômio característico do modelo autônomo

$$\Sigma_{y^l} y^l + \ldots + \Sigma_{y^2} y^2 + (\Sigma_y - 1)y + \Sigma_0 = 0.$$

b) (1,0) Calcule os pontos fixos correspondentes.

---

a)

l = 2, u = 0;

$$\Sigma_{y^2} y^2 + (\Sigma_y - 1)y + \Sigma_0 = 0.$$

$$-0{,}5y^2 - 0{,}5y + 1 = 0$$

b)

$$y_{1,2} = 1; -2$$

2ª Questão: Considere a seguinte nomenclatura utilizada por Aguirre, 2007, Identificação de Sistemas Dinâmicos, 3º Ed., para o Filtro de Kalman discreto. Onde **w** e **v** são variáveis aleatórias independentes.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \Gamma_k \mathbf{u}_k + \gamma_k \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k = H_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{cases}$$

$i)\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ + \Gamma_k \mathbf{u}_k$

$ii)\ P_{k+1}^- = \Phi_k P_k^+ \Phi_k^T + \gamma_k Q_k \gamma_k^T$

$iii)\ K_{k+1} = P_{k+1}^- H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1}^- H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1}$

$iv)\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + K_{k+1}[\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-]$

$v)\ P_{k+1}^+ = P_{k+1}^- - K_{k+1} H_{k+1} P_{k+1}^-$

a) (1,0) Apresente o significado das variáveis que aparecem nas equações acima:

$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+$	Vetor de estados estimados, corrigido pela inovação, no instante k+1.
$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-$	Vetor de estados estimados, predito pelo modelo para o instante k+1.
$\hat{\mathbf{x}}_k^+$	Vetor de estados estimados, corrigido pela inovação, no instante k.
$\mathbf{y}_{k+1}$	Vetor de medida (saída do processo), no instante k + 1.
$\mathbf{u}_k$	Vetor de entrada no instante k.
Φ_k	Matriz de Sistema ou Matriz de Transição de Estados.
Γ_k	Matriz de Entrada, descreve a atuação das entradas sobre as variáveis de estado.
γ_k	Matriz de Entrada de Perturbação, descreve a atuação das perturbações sobre as variáveis de estado.
H_{k+1}	Matriz de Saída.
P_{k+1}^+	Matriz de covariância do vetor de estados estimados corrigidos (igual à matriz de covariância dos erros de estimação para o caso não polarizado).
P_{k+1}^-	Matriz de covariância do vetor de estados estimados preditos.
P_k^+	Matriz de covariância do vetor de estados estimados corrigidos, no instante k.
Q_k	Matriz de covariância do ruído de processo
R_{k+1}	Matriz de covariância do ruído de medida (ruído de observação).
K_{k+1}	Ganho do filtro de Kalman (pondera a atualização entre modelo e medida).

b) (1,0) Comente sobre a contribuição das equações *i*) a *v*) para a estimação ótima das variáveis de estado.

---

i) Modelo de predição para o vetos de estados.
ii) Calcula a Matriz de covariância do vetor de estados estimados, ponderando-se o ruído de processo.
iii) Atualiza o ganho do filtro de Kalman.
iv) Correção das variáveis de estado estimadas utilizando a inovação (y - H x).
v) Correção da matriz de covariância do vetor de estados estimados.

c) (1,5) Considerando que o erro de estimação na etapa de predição é $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- - \mathbf{x}_{k+1}^-$ e que a matriz covariância do erro de estimação é $P_{k+1}^- = E[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^- (\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^-)^T]$, obtêm-se na etapa de correção do filtro de Kalman

$$P^+ = (I - KH)P^-(I - KH)^T + KRK^T. \qquad (1)$$

Como critério de otimização adota-se

$$\frac{\partial Tr(P^+)}{\partial K} = -2(I - KH)P^- H^T + 2KR = 0. \qquad (2)$$

Partindo das equações (1) e (2) deduza a equação *v*) do filtro de Kalman. (Obs: para clareza, subscritos omitidos).

Da eq. (2): $KR = (I - KH)P^- H^T$,

Substituindo na eq. (1):

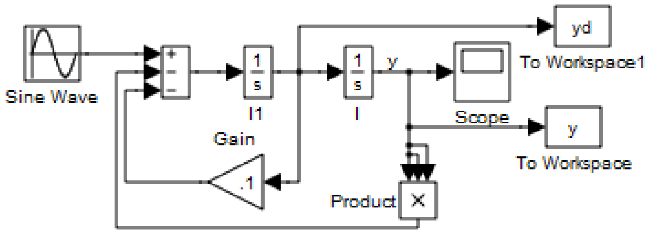
$P^+ = (I - KH)P^-(I - KH)^T + (I - KH)P^- H^T K^T$,

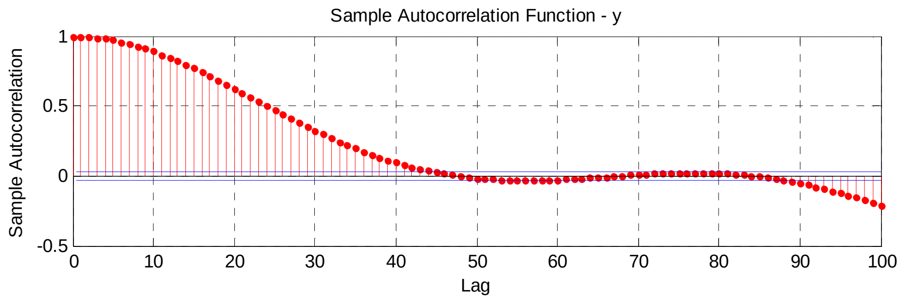
expandindo o primeiro termo,

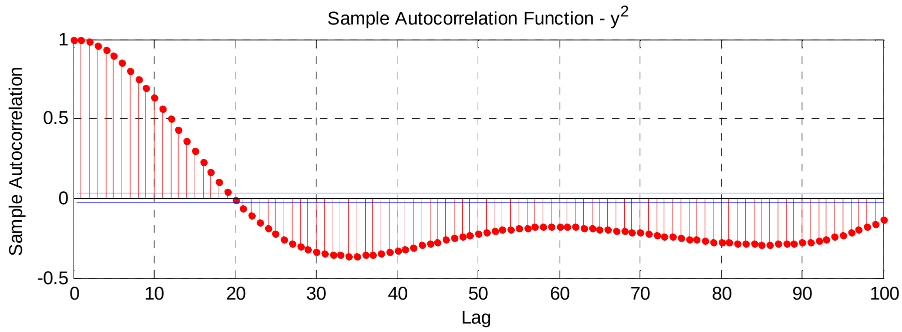
$P^+ = (I - KH)P^- - (I - KH)P^-(KH)^T + (I - KH)P^- H^T K^T$.

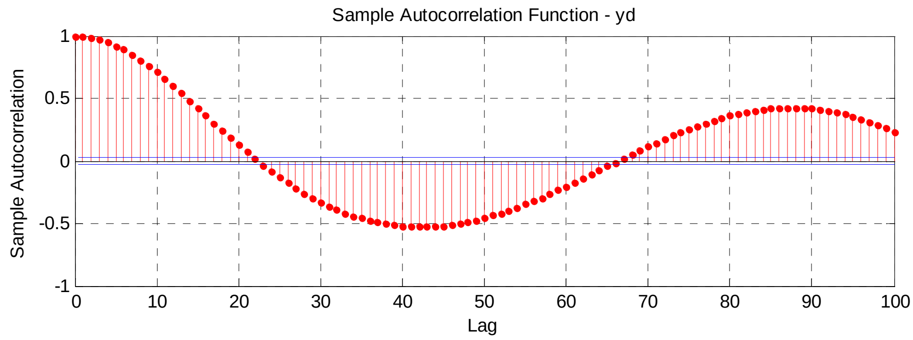
$P^+ = (I - KH)P^- - (I - KH)P^- H^T K^T + (I - KH)P^- H^T K^T = P^- - KHP^-$. c.q.d.

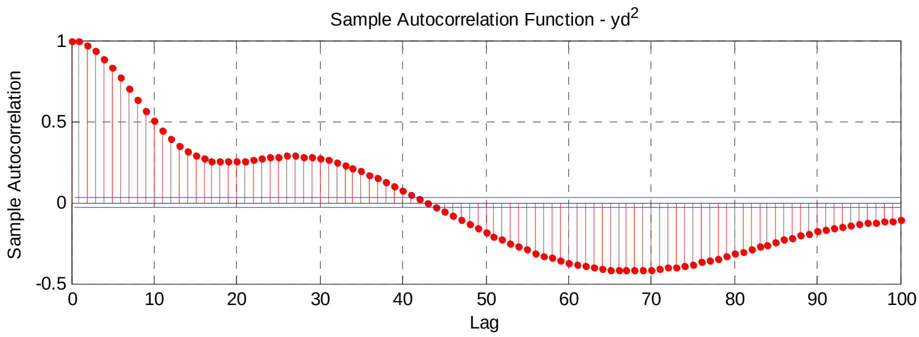
3ª Questão: (1,0) O seguinte sistema não linear foi amostrado a uma taxa de 25 ms (sinais *y* e *yd*). O objetivo desta questão e encontrar uma taxa de amostragem adequada. Qual o fator de decimação a ser utilizado para que τ_m=5 atrasos? Obs: A taxa de amostragem será $T_s = \tau_m/5$, onde τ_m é um dos mínimos das funções de autocorrelação apresentadas a seguir.











Das funções de correlações apresentadas y^2 é a mais crítica: 20 atrasos até o primeiro mínimo.
Fator de decimação Δ = 20/5 = 4.
Nova taxa de amostragem = 4*25 ms = 100 ms.

Obs. Autocorrelação negativa → correlação inversa.
Assim o "mínimo" do critério de seleção da taxa de amostragem considera o primeiro valor nulo da função de autocorrelação.

4ª Questão: As seguintes afirmativas são verdadeiras ou falsas? Comente cada resposta de forma crítica.

a) (0,5) O fator de esquecimento λ tem por finalidade esquecer o passado remoto, mantendo assim a “plasticidade” dos algoritmos de identificação recursiva. O valor de λ afeta a velocidade de convergência mas não tem influência direta sobre a estabilidade do algoritmo.

b) (0,5) O comportamento caótico é apenas uma “curiosidade científica” de equações diferenciais com características particulares. Na engenharia do “mundo real” um comportamento caótico nunca ocorre.

c) (0,5) A escolha da estrutura para se identificar um sistema que apresenta caos é um procedimento puramente empírico (tentativa e erro).

d) (0,5) As matrizes de covariância do ruído que atuam sobre as variáveis de estado de um processo dinâmico são facilmente determinadas pelo filtro de Kalman estendido.

e) (0,5) O sistema de Duffing-Ueda ($\ddot{y} + a\dot{y} + y^3 = A\cos\omega t$), de acordo como o teorema de Shannon, deveria ter uma frequência de amostragem de no mínimo 2*ω. Para garantir que não se perca as nuances deste sistema uma taxa de amostragem de 5*ω deveria ser utilizada.

f) (0,5) Um modelo não-linear deve ser identificado com entradas que sejam pseudo-aleatórias tanto no tempo como na amplitude. Isto garante que os modelos obtidos sejam válidos em grandes sinais.

g) (0,5) O mínimo Critério do "Erro Final de Predição", $FPE(n_\theta) = N\ln\left[\sigma^2_{erro}(n_\theta)\right] + N\ln\left[\frac{N+n_\theta}{N-n_\theta}\right]$, pode ser utilizado na seleção de modelos em identificação, pois utiliza um termo que favorece a redução do erro e outro que penaliza o aumento do número de parâmetros n_θ. Onde N é o número de dados, $\sigma^2_{erro}(n_\theta)$ é a variância do erro de modelagem e n_θ é o número de parâmetros do modelo.

---

a) Falso. Um fator de esquecimento inadequado torna o algoritmo instável.

b) Falso. Fenômenos de transporte de calor e massa e tipicamente processos climáticos podem apresentar caos.

c) Falso. Vários métodos (Taxa de redução de Erro, AIC, FEP, coeficientes de agrupamento de modelos polinomiais) podem auxiliar na seleção da estrutura para a identificação de modelos que apresentam caos.

d) Falso. O filtro de Kalman estendido se aplica a sistemas não-lineares que podem ser linearizados em cada ponto de operação. As matrizes de covariância do ruído de processo são parâmetros de entrada tanto do Filtro de Kalman como do filtro de Kalman estendido e precisam ser estimadas de outra forma (procedimento complexo).

e) Falso. Sistemas não lineares introduzem novos harmônicos ao sistema. Qualquer procedimento de seleção de taxa de amostragem deveria considerar estes harmônicos e não a harmônica fundamental. 5*ω em vez de 2*ω, isto é 2,5 vezes a frequência de Nyquist não atende (ver a questão 3, que é exatamente sobre a amostragem do sistema Duffing-Ueda !!).

f) Falso. O modelo só é válido para a faixa de valores para a qual foi identificado.

g) Verdadeiro. O primeiro termo da FPE diminui (pode inclusive ser negativo) com $\sigma^2_{erro}(n_\theta)$. Por outro lado $N\ln\left[\frac{N+n_\theta}{N-n_\theta}\right]$ sempre é positivo e cresce com n_θ. Assume-se N > n_θ.