



Nome: _____ Matrícula: _____

RESOLUÇÃO - 2ª PROVA ISD

1ª Questão (2,0): O filtro de *Kalman* visa minimizar o somatório dos quadrados dos erros de estimação. Considerando $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1}$ e $P_{k+1}^+ = E[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^+ (\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^+)^T]$ obtêm-se $P_{k+1}^+ = (I - KH)P^- (I - KH)^T + KRK^T$ (em que os índices $k+1$ do lado direito desta equação foram omitidos para maior clareza). Utilizando o ganho de Kalman (iii) mostre que a atualização da estimativa da matriz de correlação é dada por (v): $P_{k+1}^+ = P_{k+1}^- - K_{k+1}H_{k+1}P_{k+1}^-$.

Equações do Filtro de Kalman

$$i) \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ + \Gamma_k \mathbf{u}_k$$

$$ii) P_{k+1}^- = \Phi_k P_k^+ \Phi_k^T + \gamma_k Q_k \gamma_k^T$$

$$iii) K_{k+1} = P_{k+1}^- H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1}^- H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1}$$

$$iv) \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + K_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-]$$

$$v) P_{k+1}^+ = P_{k+1}^- - K_{k+1} H_{k+1} P_{k+1}^-$$

$$P_{k+1}^+ = (I - KH)P^- (I - KH)^T + KRK^T$$

$$P_{k+1}^+ = (P^- - KHP^-)(I - H^T K^T) + KRK^T$$

$$P_{k+1}^+ = P^- - P^- H^T K^T - KHP^- + KHP^- H^T K^T + KRK^T$$

$$P_{k+1}^+ = P^- - P^- H^T K^T - KHP^- + K(HP^- H^T + R)K^T$$

$$P_{k+1}^+ = P^- - P^- H^T K^T - KHP^- + P^- H^T [HP^- H^T + R]^{-1} (HP^- H^T + R)K^T$$

$$P_{k+1}^+ = P^- - P^- H^T K^T - KHP^- + P^- H^T K^T$$

$$P_{k+1}^+ = P^- - KHP^-$$

2ª Questão: Considere dois modelos dinâmicos discretos não-lineares, as funções logísticas par i) e ímpar ii):

$$i) y(k) = \lambda y(k-1) - \lambda y(k-1)^2$$

$$ii) y(k) = \lambda y(k-1) - \lambda y(k-1)^3$$

a) (1,2) Calcule os pontos fixos de i) e de ii).

b) (1,8) Considere as simulações a seguir das funções logísticas para três combinações de λ e $y(0)$. Para cada gráfico tente relacionar os pontos fixos calculados em a) com o comportamento observado.

a) Os pontos fixos são as raízes de

$$i) (\lambda - 1)y - \lambda y^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 1 - \frac{1}{\lambda}; (2/3; 1,5; 4/3)$$

$$ii) (\lambda - 1)y - \lambda y^3 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_{2,3} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda}} = \pm (0,8165 \quad 1,2247 \quad 1,1547)$$

b)

Logística par, $\lambda = 3$, $y(0) = 0,5 \rightarrow$ ocorre uma oscilação convergente em torno do ponto fixo $1-1/3 = 0,67$

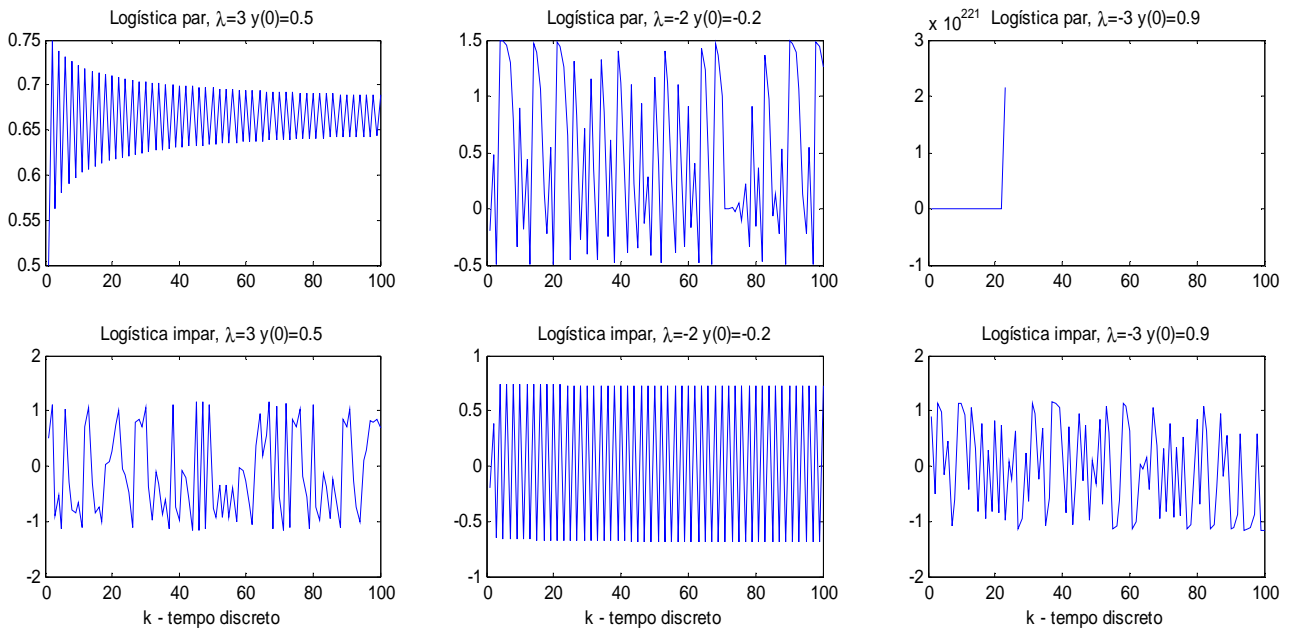
Logística par, $\lambda = -2$, $y(0) = -0,2 \rightarrow$ ocorre uma oscilação caótica em torno dos dois pontos fixos (0 e 1,5)

Logística par, $\lambda = -3$, $y(0) = 0,9 \rightarrow$ o ponto fixo $1-1/3 = 1,333$ é instável

Logística ímpar, $\lambda = 3$, $y(0) = 0,5 \rightarrow$ ocorre uma oscilação caótica em torno dos pontos fixos (0,8165 e -0,8165)

Logística ímpar, $\lambda = -2$, $y(0) = -0,2 \rightarrow$ ocorre uma oscilação em torno do ponto fixo 0

Logística ímpar, $\lambda = -3$, $y(0) = 0,9 \rightarrow$ ocorre uma oscilação caótica em torno dos pontos fixos (0; 1,1547 e -1,1547)



Obs1: Polinômio característico de um modelo autônomo $\sum_{y^l} y^l + \dots + \sum_{y^2} y^2 + (\sum_y - 1)y + \sum_0 = 0$.

3ª Questão (2,0): Considere os modelos de Hammerstein (NL→Lin) e Wiener (Lin→NL) para os quais a não-linearidade estática seja $f(x) = x^3$. O bloco dinâmico linear é descrito por:

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2).$$

Desenvolva analiticamente a equação dos modelos de Hammerstein e de Wiener e mostre que tipo de regressores são utilizados nos modelos finais.

(0,8) Hammerstein:

Não linearidade antes do modelo dinâmico → Entrada do modelo dinâmico: $u^3(k)$

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u^3(k-1) + b_2 u^3(k-2) \rightarrow \text{regressores: } [y(k-1) \ y(k-2) \ u^3(k-1) \ u^3(k-2)]$$

(1,2) Wiener:

Não linearidade depois do modelo dinâmico → Saída depois do bloco não-linear: $y' = y^3(k)$

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2)$$

$$y'(k) = (a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2))^3$$

Modelo NARX $F^3 \ l=3, n_y=2, n_u=2$

$$\begin{aligned} y'(k) = & \sum_{n_1}^{n_y} c_{3,0}(n_1) y^3(k-n_1) + \sum_{n_1}^{n_u} c_{0,3}(n_1) u^3(k-n_1) \\ & + \sum_{n_1}^{n_y} \sum_{n_2}^{n_y-n_1} c_{3,0}(n_1, n_2) y^2(k-n_1) y(k-n_2) + \sum_{n_1}^{n_u} \sum_{n_2}^{n_u-n_1} c_{0,3}(n_1, n_2) u^2(k-n_1) u(k-n_2) \\ & + \sum_{n_1}^{n_y} \sum_{n_2}^{n_y-n_1} c_{2,1}(n_1, n_2) y^2(k-n_1) u(k-n_2) + \sum_{n_1}^{n_u} \sum_{n_2}^{n_y-n_1} c_{1,2}(n_1, n_2) y(k-n_2) u^2(k-n_1) \\ & + \sum_{n_2}^{n_u} c_{2,1}(2,1, n_2) y(k-1) y(k-2) u(k-n_2) + \sum_{n_2}^{n_y} c_{1,2}(n_2, 1) y(k-n_2) u(k-1) u(k-2) \end{aligned}$$

→ regressores (20):

$$\begin{aligned} & [y^3(k-1) \ y^3(k-2) \ u^3(k-1) \ u^3(k-2) \\ & y^2(k-1)y(k-2) \ y(k-1)y^2(k-2) \ u^2(k-1)u(k-2) \ u(k-1)u^2(k-2) \\ & y^2(k-1)u(k-1) \ y^2(k-2)u(k-1) \ y^2(k-1)u(k-2) \ y^2(k-2)u(k-2) \\ & y(k-1)u^2(k-1) \ y(k-2)u^2(k-1) \ y(k-1)u^2(k-2) \ y(k-2)u^2(k-2) \\ & y(k-1)y(k-2)u(k-1) \ y(k-1)y(k-2)u(k-2) \ y(k-1)u(k-1)u(k-2) \ y(k-2)u(k-1)u(k-2)] \end{aligned}$$

4ª Questão: As seguintes afirmativas são verdadeiras ou falsas (0,2)? Comente cada resposta de forma crítica (0,3).

- a) (0,5) O circuito de Chua permite demonstrar caos utilizando apenas alguns componentes elétricos simples e um diodo não-linear. Há 3 variáveis de estado e 3 regiões de operação do diodo não-linear criam três pontos fixos (atratores). A energia que mantém este circuito em operação (orbitando entre atratores) vem de uma fonte DC.
- b) (0,5) O método dos mínimos quadrados não pode ser aplicado diretamente para a identificação de sistemas não-lineares polinomiais. A triangularização da matriz de regressores pelo método Modificado de Gram-Schmidt torna a identificação desta classe de sistemas possível pela mudança de base para uma base ortonormal.
- c) (0,5) Devido à “praga da dimensionalidade” é virtualmente impossível explorar de forma adequada todas as regiões de operação, em frequência e em amplitude, de um sistema dinâmico não-linear. A consequência prática é a realização de várias iterações do ciclo de projeto: experimento, identificação, projeto de controlador e validação. O teorema da aproximação universal garante que uma solução adequada será encontrada.
- d) (0,5) Um algoritmo recursivo tem, no aspecto local, sempre resultados melhores que uma identificação em batelada, porém no aspecto global a identificação do conjunto completo de dados sempre será melhor.
- e) (0,5) A utilização de modelos não-lineares não tem como motivação principal a redução do erro de aproximação. A utilização de regressores não-lineares explica fenômenos que ocorrem no mundo real e que não podem ser modelados pela teoria de sistemas lineares.
- f) (0,5) O princípio que norteia a seleção da taxa de amostragem considera que os fenômenos (regressores) mais rápidos devem utilizar pelo menos 5 a 25 amostras para descrever trechos de sinais correlacionados. É importante que a correlação de todos os regressores utilizados em todas as faixas de operação do processo sejam verificados.

- a) F - O circuito de Chua tem 3 variáveis de estado (2 capacitores e 1 indutor). Um diodo não-linear fornece energia quando operando como dispositivo ativo. Não há fonte DC na forma clássica do circuito de Chua.
V – Se considerarmos que o diodo de Chua é implementado por um amplificador operacional e dois diodos (LEDs), então a alimentação do amplificador é uma fonte DC que fornece energia para o circuito.
- b) F – A representação não-linear polinomial, uma vez que é linear nos parâmetros, pode ser resolvida pelo método dos MQ. A aplicação do MGS visa melhorar o condicionamento numérico, além de propiciar a redução de ordem pela representação numa base ortogonal (não ortonormal!).
- c) F - O teorema da aproximação universal postula que há uma solução adequada aos limites de erro estabelecidos, não que esta será encontrada após um certo número de ciclos de projeto.
- d) F – Se tivermos o problema da identificação em torno de um ponto de operação e este for variável, ou se o sistema for variante no tempo a solução pelo método recursivo será melhor.
- e) V – A possibilidade de se representar fenômenos não-lineares permitem o estudo de novas classes de sistemas dinâmicos (como p.ex., caos e bifurcação). A precisão de modelos de sistemas linearizados em torno de pontos de operação pode ser melhorada pela escolha adequada da estrutura, do número de regressores, taxa de amostragem e sinal de excitação conveniente. Normalmente a precisão da identificação deve apenas ser suficiente para permitir o projeto adequado de controladores em malha fechada.
- f) F – Não é necessário testar “todos os regressores em todas as faixas de operação”. Como já realçado no item c), é impossível abranger todas as faixas (amplitude e frequência) de operação. Consideram-se para efeitos práticos, a auto-correlação de alguns poucos regressores lineares e não-lineares.