Nome:____Matrícula:_____________

2ª PROVA ISD

Obs1: A notação adotada nesta prova segue Aguirre, 2007.

Obs2: Polinômio característico de um modelo autônomo $\Sigma_{y^l} y^l + \ldots + \Sigma_{y^2} y^2 + (\Sigma_y - 1)y + \Sigma_0 = 0$.

1ª Questão: As seguintes afirmativas são verdadeiras ou falsas (0,2)? Comente cada resposta de forma crítica (0,3).

a) (0,5) A triangularização da matriz de regressores pelo método Modificado de Gram-Schmidt melhora as características numéricas da identificação pela mudança de base para uma base ortonormal. A taxa de redução de erro (ERR, em inglês), derivada deste procedimento, é utilizada na escolha dos regressores que compõe um modelo. Infelizmente este procedimento não é o mais adequado quando há baixa relação sinal ruído. Neste caso critérios baseados na teoria da informação (e.g., AIC – Akaike Information Criterion) são mais robustos.

b) (0,5) A seleção da taxa de amostragem, para sistemas lineares leva em conta algumas heurísticas, tais como "cinco a oito amostras em t_r" ou "X vezes a Banda Passante". Para sistemas não lineares uma técnica para selecionar a taxa de amostragem é utilizar a auto-correlação de um regressor linear e de um regressor quadrático (Aguirre, 2007). Esta abordagem garante que nenhuma característica relevante do processo será perdida na identificação.

--

a) Falso – a ERR fornece melhores resultados para a redução de ordem no caso de baixa SNR. Segundo Aguirre, Fig. 12.9, para SNR=0,74, apenas o método baseado nos coeficientes de agrupamento indica o resultado correto.

b) Falso – a abordagem proposta é uma orientação prática. Não garante a identificação completa para qualquer sistema.

2ª Questão: (2,0) Considere as equações do Filtro de Kalman:

$$i)\ \hat{\mathbf{x}}^-_{k+1} = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}^+_k + \Gamma_k \mathbf{u}_k$$

$$ii)\ P^-_{k+1} = \Phi_k P^+_k \Phi^T_k + \gamma_k Q_k \gamma^T_k$$

$$iii)\ K_{k+1} = P^-_{k+1} H^T_{k+1} [H_{k+1} P^-_{k+1} H^T_{k+1} + R_{k+1}]^{-1}$$

$$iv)\ \hat{\mathbf{x}}^+_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}^-_{k+1} + K_{k+1}[\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1}\hat{\mathbf{x}}^-_{k+1}]$$

$$v)\ P^+_{k+1} = P^-_{k+1} - K_{k+1} H_{k+1} P^-_{k+1}$$

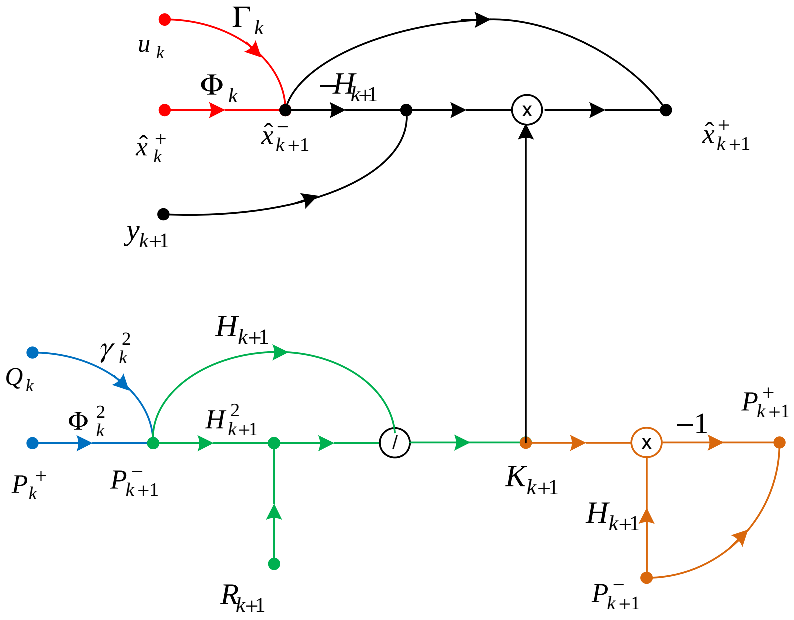
a) (0,5) Qual a diferença entre um observador de estados e um filtro de Kalman.

b) (1,5) Apresente as equações do filtro de Kalman para um sistema de 1ª ordem e trace um diagrama do fluxo de sinal correspondente.

--

a) O observador e o filtro de Kalman reconstroem as variáveis de estado de um processo utilizando um modelo do processo. No entanto, o observador não leva em conta as características (variantes no tempo) do ruído, enquanto o filtro de Kalman é ótimo no sentido de minimizar a covariância da estimativa. O ruído de medida, R, e o ruído dinâmico, Q, são considerados. É feita uma fusão entre valores lidos dos sensores e os estimados pelo modelo na etapa de predição. A inovação é ponderada pelo ganho de Kalman.

b) Para um sistema de primeira ordem as matrizes são reduzidas a escalares.



i) $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ + \Gamma_k \mathbf{u}_k$

ii) $P_{k+1}^- = \Phi_k P_k^+ \Phi_k^T + \gamma_k Q_k \gamma_k^T$

iii) $K_{k+1} = P_{k+1}^- H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1}^- H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1}$

iv) $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + K_{k+1}[\mathbf{y}_{k+1} - H_{k+1}\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-]$

v) $P_{k+1}^+ = P_{k+1}^- - K_{k+1} H_{k+1} P_{k+1}^-$

3ª Questão: (2,5) Considere a identificação recursiva com fator de esquecimento λ:

$$y(k) = \boldsymbol{\psi}_k^{\mathrm{T}}(k-1)\hat{\boldsymbol{\theta}}_k + \xi(k)$$

$$K_k = \frac{P_{k-1}\boldsymbol{\psi}_k}{\boldsymbol{\psi}_k^{\mathrm{T}} P_{k-1}\boldsymbol{\psi}_k + \lambda};$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + P_k\boldsymbol{\psi}_k\left[y(k) - \boldsymbol{\psi}_k^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}\right];$$

$$P_k = \frac{1}{\lambda}\left(P_{k-1} - \frac{P_{k-1}\boldsymbol{\psi}_k\boldsymbol{\psi}_k^{\mathrm{T}}P_{k-1}}{\boldsymbol{\psi}_k^{\mathrm{T}}P_{k-1}\boldsymbol{\psi}_k+\lambda}\right),$$

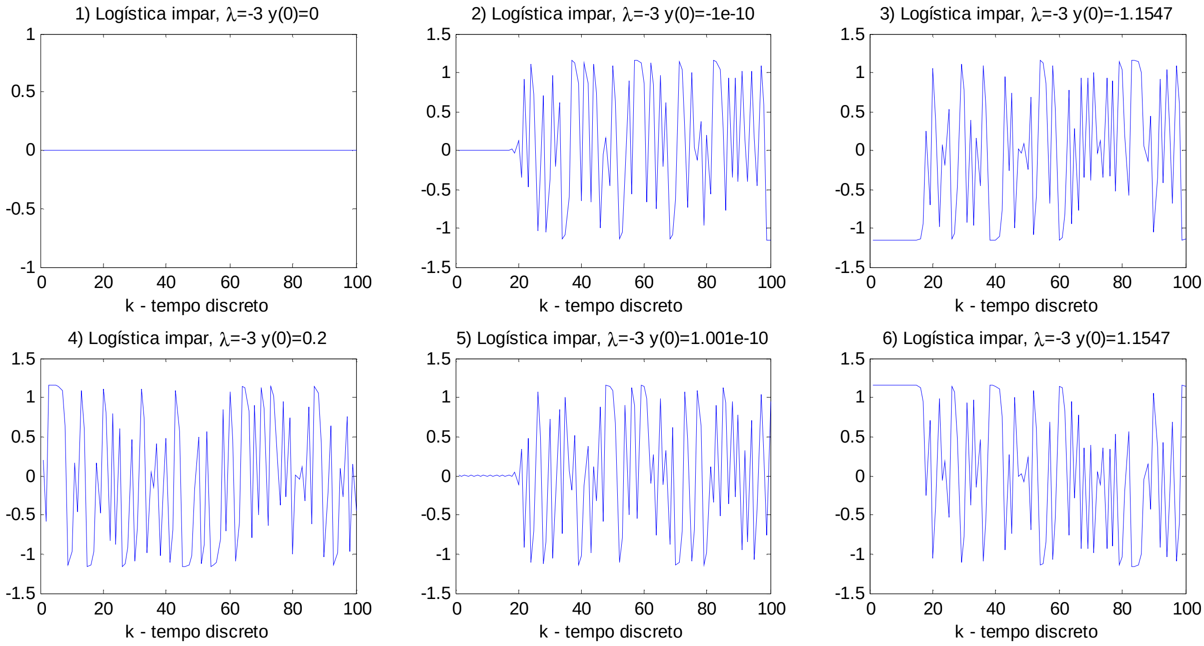
a) Qual é o compromisso que deve ser observado na escolha do fator de esquecimento λ? Em particular, como selecionar λ se o nível de ruído é alto? E qual a relação de λ com a taxa de amostragem?
b) Por que haveria vantagens em se reduzir o fator de esquecimento na fase inicial da identificação?
c) Por que seria necessário adaptar o fator de esquecimento ao longo de uma identificação?
d) Por que seria necessário manipular a matriz de covariância para seguir melhor a variação dos parâmetros?
e) O que acontece com os parâmetros estimados de um sistema variante no tempo se a excitação tende a zero?

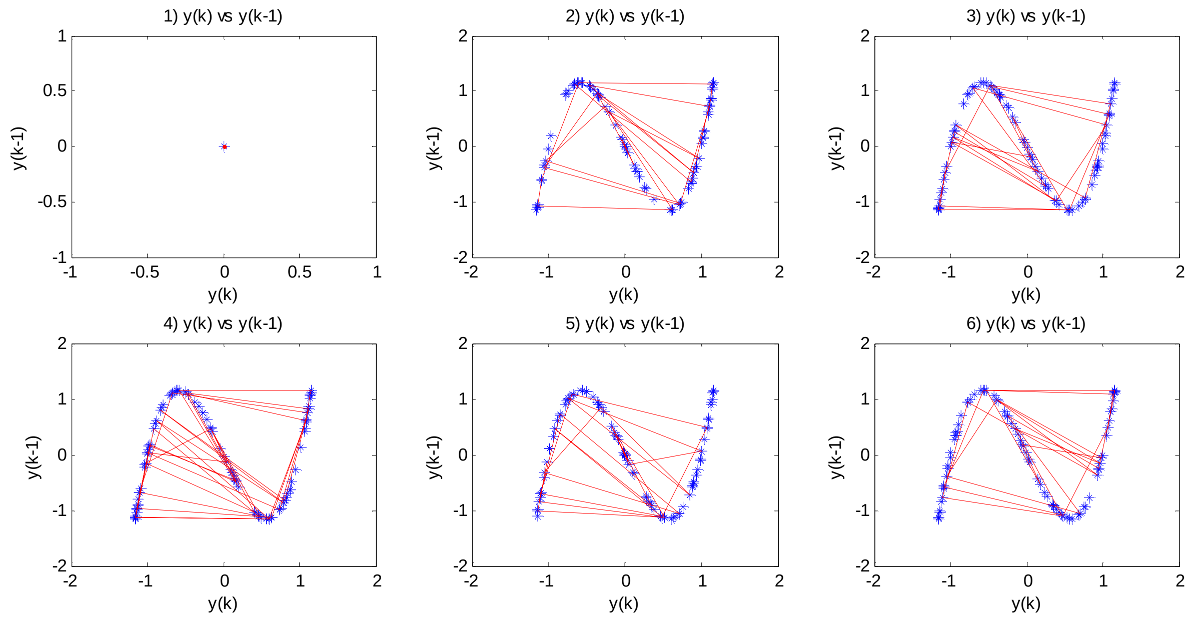
--

a) Compromisso estabilidade versus plasticiade.
λ muito pequeno causa instabilidade, e λ=1 produz uma estimação sem ponderação das amostras.
Se o sistema for variante no tempo é importante reduzir λ para que estas variações sejam seguidas pelo estimador (maior plasticidade).
Se houver muito ruído o fator de esquecimento deve ser próximo de 1 para que variações fortes do sinal não sejam interpretadas erroneamente.

b) Pois, como não há informação disponível é vantajoso aumentar a plasticidade (convergência mais rápida).
c) Quando o sistema apresenta fortes variações dos parâmetros.
d) Quando o sistema apresenta fortes variações do ruído.
e) Mantém-se os valores anteriores (ψ_k próxima de singular)

4ª Questão: (4,5) Considere, para λ = -3 e seis diferentes valores para as condições iniciais, y(0), a simulação do modelo dinâmico discreto da função logistíca impar, $y(k) = \lambda y(k-1) - \lambda y(k-1)^3$. O gráfico correspondente de y(k) vs y(k-1) é mostrado logo a seguir. Todos os pontos assumidos pela função nos experimentos (k=0:100) estão marcados por '*', enquanto os primeiros 40 valores estão conectados por linha contínua, indicando as primeiras transições.





a) (0,5) Calcule os pontos fixos da função logística impar para λ = -3.
b) (1,5) Calcule os autovalores, considerando a linearização em torno dos pontos fixos.
c) (1,0) Esboce um algoritmo de mínimos quadrados para identificar os parâmetros deste sistema polinomial.
d) (1,5) Relacione o comportamento observado nos gráficos aos pontos fixos calculados e aos autovalores calculados. Comente em particular:
   - Região de "Estabilidade" do ponto fixo "0" em relação aos demais pontos fixos. 1) vs 3) e 6).
   - Espelhamento entre as simulações 3) e 6) enquanto não há espelhamento entre 2) e 5).
   - Por que apenas transições sobre o "N" (asteriscos) ocorrem, independente das condições iniciais?

Pontos fixos: $\Sigma_{y^3} y^3 + (\Sigma_y - 1)y = 0 \qquad \rightarrow -\lambda y^3 + (\lambda - 1)y = 0 \rightarrow y(-\lambda y^2 + (\lambda - 1)) = 0$

a) $y(-\lambda y^2 + (\lambda - 1)) = 0 \rightarrow y = 0; y = \pm\sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda}} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \boxed{y = 0; y = \pm 1.1547}$

b) Autovalores: -3,-3,-3

c) $\theta = \left[\psi^T \psi\right]^{-1} \psi^T y$, onde $\psi = [y(k) \quad y(k)^3]$ e $\theta = [\theta_1 \quad \theta_2]^T$

d) – Todos os pontos fixos são instáveis, no entanto o ponto fixo 0 tem maior estabilidade numérica. Simulando
- Os pontos fixos -1.1547 e 1.15.472 são simétricos. Pequeníssimas diferenças iniciais anulam a simetria.
- O "N" se origina da lei de formação $y(k) = \lambda y(k-1) - \lambda y(k-1)^3$, daí o gráfico regular $y(k) = f(y(k-1))$.