



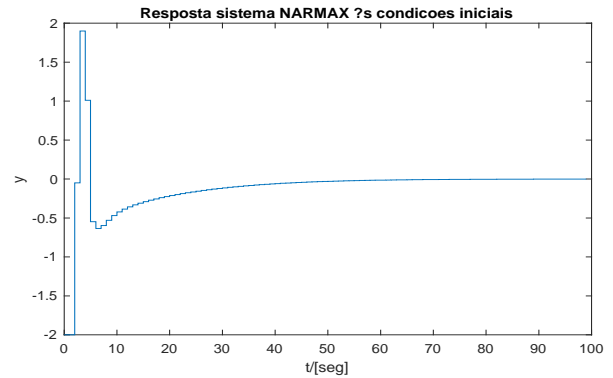
Nome: _____ Curso: _____ Matrícula: _____

RESOLUÇÃO - 2ª PROVA MIS/ISD - 2º/2016 (SEM CONSULTA, SEM CALCULADORA)

$$y = \psi \hat{\theta} + \xi \quad \hat{\theta} = [\psi^T \psi]^{-1} \psi^T y \quad n_y - \text{atrasos em } y; \quad n_u - \text{atrasos em } u; \quad l - \text{grau do polinômio}$$

1ª Questão: (2,0) Considere o seguinte sistema NARX polinomial

$$y(k) = -0,5 y(k-1)^2 y(k-2) + 0,4 y(k-2) * y(k-1)^2 - 0,2 y(k-2)^3 + 0,9 y(k-1) + 0,025 y(k-2) + u(k-1) - 0,5 u(k-2) - 0,2 y(k-1)^2 + 0,1 y(k-2)^2 - 0,05 y(k-1) * y(k-2) + 0,2 u(k-1) * u(k-2) + 0,6 * u(k-1) * y(k-1) - 0,7 u(k-1) * y(k-2) + 0,1 u(k-2) * y(k-1);$$



Para $T_s = 1$ seg, $y(-1) = y(-2) = 2$ e $u(k) = 0$, $k=0:100$.

a) (1,0) Obtenha o polinômio característico do modelo autônomo $\sum_{y^l} y^l + \dots + \sum_{y^2} y^2 + (\sum_y - 1)y + \sum_0 = 0$.

b) (1,0) Calcule os pontos fixos correspondentes.

$$\begin{aligned} \sum_0 &= 0 \\ \sum_{y^1} &= 0,9 + 0,025 = 0,925 \\ \sum_{y^2} &= -0,2 + 0,1 - 0,05 = -0,15 \\ \sum_{y^3} &= -0,5 + 0,4 - 0,2 = -0,3 \end{aligned} \quad \begin{aligned} -0,3y^3 - 0,15y^2 - 0,075y &= 0 & y(y^2 + 0,5y + 0,25) &= 0 \end{aligned}$$

b) Pontos Fixos: $y = 0, -0,25 \pm 0,433i \quad \left(0, \frac{-0,5 \pm \sqrt{0,5^2 - 4 * 0,25}}{2}\right)$

2ª Questão: (2,5) No método Clássico de Gram-Schmidt (CGS) obtêm-se os parâmetros \hat{g} do modelo no espaço ortogonal através de uma matriz A , triangular superior, tal que $\psi = QA$ e $Q^T Q = D$, sendo D uma matriz diagonal.

$$\begin{aligned} \psi^T \psi \hat{\theta} &= \psi^T y \\ A^T Q^T Q A \hat{\theta} &= A^T Q^T y \\ A^T D A \hat{\theta} &= A^T Q^T y \\ D A \hat{\theta} &= Q^T y \\ \hat{g} = A \hat{\theta} &= D^{-1} Q^T y \end{aligned} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \dots & \alpha_{1,n_\theta} \\ 0 & 1 & \alpha_{2,3} & \dots & \alpha_{2,n_\theta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \alpha_{n_\theta-1,n_\theta} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- a) (1,0) O método CGS poderia ser utilizado para identificar sistemas não lineares? Quais? Dê alguns exemplos.
- b) (1,5) Os parâmetros no espaço original podem ser obtidos via $\hat{\theta} = A^{-1} \hat{g}$. Este passo não seria desnecessário e, pouco eficiente, uma vez que o controlador pode ser projetado e atuar no espaço ortogonal.

- a) Sim. Sistemas lineares nos parâmetros.
Exemplos: $y(k) = \theta_1 u(k)^2;$
 $y(k) = \theta_0 + \theta_1 \sin(u(k))^2;$
 $y(t) = \theta_0 \exp\left(-\frac{\|u(t) - c_0\|^2}{2\sigma^2}\right) + \theta_1 \exp\left(-\frac{\|u(t) - c_1\|^2}{2\sigma^2}\right);$

- b) Os regressores são obtidos (medidos por sensores) no espaço original. Se o controlador for projetado no espaço ortogonal será necessário uma transformação. Temos duas alternativas:

- i) Calcular as variáveis de estado na forma natural
 $u(k-i) = f_i(w_1(k), w_1(k), \dots, w_{n_\theta}(k))$ e
 $y(k-j) = g_j(w_1(k), w_1(k), \dots, w_{n_\theta}(k))$
Daí temos a lei de controle $\Rightarrow u(k) = h(u(k-1), u(k-2), \dots, y(k), y(k-1), \dots)$ utilizando sinais medidos.

ii) ou obter a lei de controle $u(k)$ em função dos regressores ortogonais $w_1(k), w_1(k), \dots, w_{n_\theta}(k)$

3ª Questão: (2,5) Considerando um modelo paramétrico, $y(k) = \Psi^T(k-1)\hat{\theta} + \xi(k) = \sum_{i=1}^{n_\theta} \hat{\theta}_i \psi_i(k-1) + \xi(k)$, e o modelo auxiliar, $y(k) = \sum_{i=1}^{n_\theta} \hat{g}_i w_i(k-1) + \xi(k)$, em que os regressores, w_i , são ortogonais sobre os dados.

- a) (1,0) Mostre, utilizando $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ ou $\mathbf{y}^T \mathbf{y}$, que a soma dos valores quadráticos de $y(k)$ pode ser explicada como somatório dos valores quadráticos de cada regressor ortogonal multiplicado pelo respectivo parâmetro \hat{g}_i^2 .
- b) (1,5) Como a Taxa de Redução de Erro, $ERR_i = \frac{\hat{g}_i^2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}$, pode ser utilizada para escolher a estrutura do modelo?

a)

A soma dos valores quadráticos de $y(k)$ é $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ ou $\mathbf{y}^T \mathbf{y}$.
Portanto,

$$y(k)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n_\theta} \hat{g}_i w_i(k-1) + \xi(k) \right) \times \left(\sum_{i=1}^{n_\theta} \hat{g}_i w_i(k-1) + \xi(k) \right).$$

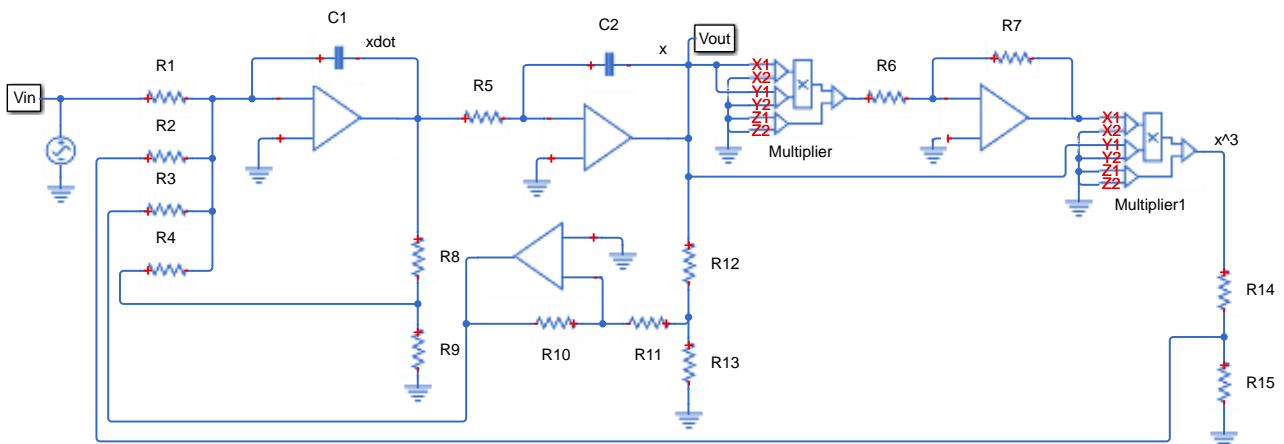
Tomando-se o valor médio de sobre os dados, tem-se

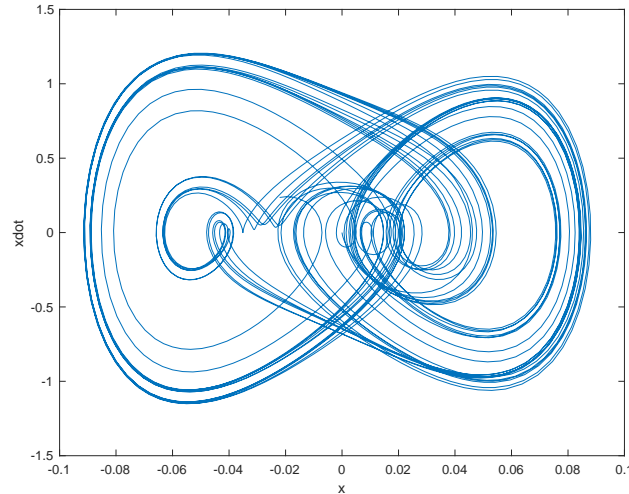
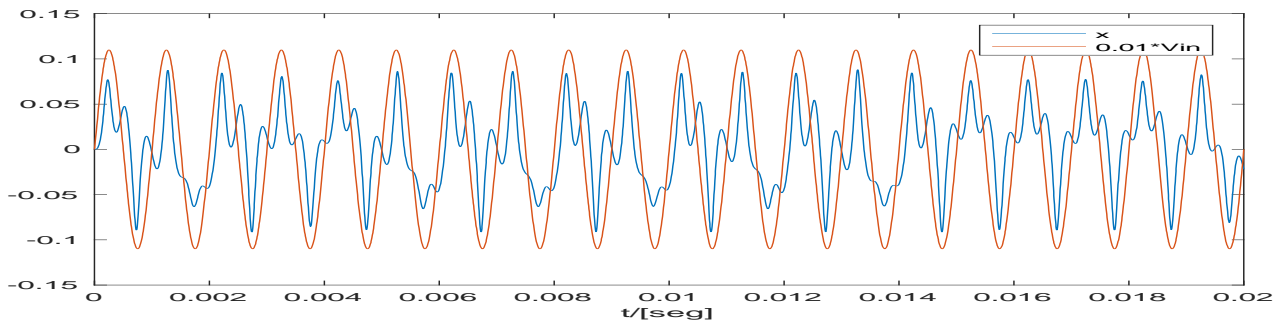
$$\begin{aligned} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle &= \sum_{i=1}^{n_\theta} \hat{g}_i^2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle + \sum_{i=1, j=1, \forall i \neq j}^{n_\theta} 2\hat{g}_i \hat{g}_j \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle + \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{n_\theta} \hat{g}_i \langle \mathbf{w}_i, \boldsymbol{\xi} \rangle + \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n_\theta} \hat{g}_i^2 \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle + \langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle. \end{aligned}$$

b) A taxa de redução de erro, ERR_i , permite explicar o sinal $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ em função de componentes ortogonais. Em geral os regressores não estão ordenados. O **ordenamento** por ERR_i permite selecionar a estrutura escolhendo-se \bar{n}_θ que forneça um erro satisfatório

$$\begin{aligned} y(k) &= \sum_{i=1}^{\bar{n}_\theta} \hat{g}_i w_i(k-1) + \sum_{i=\bar{n}_\theta+1}^{n_\theta} \hat{g}_i w_i(k-1) + \xi. && \text{Seleção via regressores ortogonais.} \\ \hat{y}_o(k) &= \sum_{i=1}^{\bar{n}_\theta} \hat{g}_i w_i(k-1) \Rightarrow \hat{y}(k) = \sum_{i=1}^{\bar{n}_\theta} \hat{\theta}_i \psi_i(k-1) && \text{Modelo reduzido – regressores originais!} \end{aligned}$$

4ª Questão: (3,0) Considere a identificação de um Circuito montado em *protoboard*, que implementa um Oscilador de Duffing, $\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = A \cos(\omega t)$. Assuma que a entrada é senoidal e que a não-linearidade é polinomial, limitando-se o grau, l , a 3.





- a) (1,0) Escolha um conjunto de regressores polinomiais típicos (n_y, n_u, l) que permitam identificar α, β e γ . Como escolher o Período de Amostragem, T_s ? Proponha um valor para T_s . Como escolher o número de amostras, N , que permita uma boa identificação? Proponha um valor para N . Considere que a estrutura do processo é desconhecida, apenas os sinais de entrada (V_{in}) e saída ($V_{out}=x$) estão disponíveis.
- b) (0,5) Proponha o uso, justificando, de um dos métodos derivados do MQ (EMQ, GMQ, IV, Gram-Schmidt Clássico, Gram-Schmidt Modificado ou Golub-Householder), adequado ao sistema em questão.
- c) (0,5) Proponha e explique uma metodologia que permita reduzir a ordem do modelo?
- d) (1,0) Se os valores dos resistores $R_1=R_3=R_4=R_5=R_6=100k\Omega$ forem conhecidos com precisão, como esta informação pode ser utilizada na identificação do sistema? Exemplifique, se possível. (Note que os divisores de tensão R_8/R_9 e R_{14}/R_{15} só permitem realimentação de fração de \dot{x} e x^3 , respectivamente. O integrador implementado via C_1 soma de forma ponderada ($1/R_1, 1/R_2, 1/R_3, 1/R_4$) os sinais nestes resistores).

- a) Considerando que a estrutura do processo é desconhecida: $n_u = 2, n_y = 2; l = 3$. A combinação de termos leva a 32 regressores possíveis:
 $u(k-1), u(k-2), y(k-1), y(k-2),$
 $u(k-1)^2, u(k-2)^2, y(k-1)^2, y(k-2)^2,$
 $u(k-1) * u(k-2), u(k-1) * y(k-1), u(k-2) * y(k-1), u(k-2) * y(k-2), y(k-1) * y(k-2),$
 $u(k-1)^3, u(k-2)^3, y(k-1)^3, y(k-2)^3,$
 $u(k-1)^2 * u(k-2), u(k-1)^2 * y(k-1), u(k-1)^2 * y(k-2),$
 $u(k-1) * u(k-2)^2, u(k-2)^2 * y(k-1), u(k-2)^2 * y(k-2),$
 $u(k-1) * y(k-1)^2, u(k-2) * y(k-1)^2, y(k-1)^2 * y(k-2),$
 $u(k-1) * y(k-2)^2, u(k-2) * y(k-2)^2, y(k-2)^2 * y(k-1),$
 $u(k-1) * u(k-2) * y(k-1), u(k-1) * u(k-2) * y(k-2), u(k-2) * y(k-1) * y(k-2)$
- b) Dentre os Métodos listados Golub-Householder é ortogonal e possui as melhores características numéricas
 $\Psi^* = Q\Psi = \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}, Q^T Q = I, J_{MQ}^* = J_{MQ} = (\mathbf{y} - \Psi\hat{\theta})^T (\mathbf{y} - \Psi\hat{\theta}),$ com V triangular superior.
- c) Pode ser utilizada ERR (já visto na questão 3) ou o critério de Akaike, $AIC(n_\theta) = N \ln[\sigma_{erro}^2(n_\theta)] + 2n_\theta$, em que o aumento do número de termos do modelo reduz a variância do erro. AIC estabelece um compromisso entre número de termos e variância do erro.

- d) Representando-se o sistema no espaço de estados, os valores dos resistores aparecem em determinadas posições da matriz de estados. Os valores conhecidos de resistores estabelecem um conjunto de restrições $c = S\theta$, que permitem aplicar MQR (Mínimos Quadrados com Restrições).

--- Realização computacional (ilustrativa, não faz parte da questão)

Ts = 1e-6; % Obs1: Ts=5e-6 não permite identificar o sistema!
 % Obs2: Mais do que 14 regressores, escolhidos “sem critério”, tornam o processo instável!

Ni=3; N=10001;

```
y=yD.signals.values(1:N,2);
u=yD.signals.values(1:N,3);
t=yD.time(1:N);
```

% Montar matriz de regressores

```
reg1=ones(N-Ni,1);           % constante
reg2=u(Ni:N-1);            % u(k-1)
reg3=y(Ni:N-1);            % y(k-1)
reg4=y(Ni-1:N-2);         % y(k-2)
reg5=reg4.^3;              % y(k-2)^3
reg6=reg3.^2;             % y(k-1)^2
reg7=reg3.*reg4;         % y(k-1)*y(k-2)
reg8=u(Ni-1:N-2);         % u(k-2)
reg9=reg3.^3;             % y(k-1)^3
reg10=reg3.^4;            % y(k-1)^4
reg11=u(Ni-1:N-2).^2;     % u(k-2)^2
reg12=u(Ni:N-1).^3;       % u(k-1)^3
reg13=u(Ni:N-1).*y(Ni:N-1); % u(k-1)*y(k-1)
reg14=y(Ni-1:N-2).^2;     % y(k-2)^2
```

```
psi=[reg1 reg2 reg3 reg4 reg5 reg6 reg7 reg8 reg9 reg10
reg11 reg12 reg13 reg14];
vec=y(Ni+1:N);
Psi=[psi vec];
[A,err,piv]=myhouse(Psi,14);
```

% número de parâmetros no modelo final

```
for np=1:8;
Psit=Psi(:,piv(1:np));
Th=inv(Psit'*Psit)*Psit'*vec;
```

```
piv =   3   4   9   2   5  12   8   1  11  13  10  14   6   7
```

```
v(k)=Th(1)*v(k-1)+Th(2)*v(k-2)+Th(3)*v(k-1)^3+Th(4)*u(k-1)+Th(5)*v(k-2)^3 +Th(6)*u(k-1)^3+Th(7)*u(k-2)+Th(8);
```

Termos np	Erro Quad. Norm.	Theta Th	Taxa de Redução de Erro ERR
1	1,000	1,999	0,999819033523
2	1,000	-0,999	0,000180918077
3	1,642	-0,059	0,000000027393
4	0,368	0,000	0,000000021005
5	0,319	-0,021	0,000000000003
6	0,228	0,000	0,000000000000
7	0,233	0,000	0,000000000000
8	0,169	0,000	0,000000000000

