



Identificação de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares

Prof. Dr. Alex da Rosa
LARA – ENE – UnB
www.ene.unb.br/alex



Motivação

- O uso de técnicas de controle linear é consequência da simplicidade dos modelos utilizados para representar o comportamento de um dado sistema.
- No entanto, este aspecto também constitui uma deficiência potencial.
- Modelos lineares são, muitas vezes, inadequados quando é necessária uma melhor representação dos sistemas.

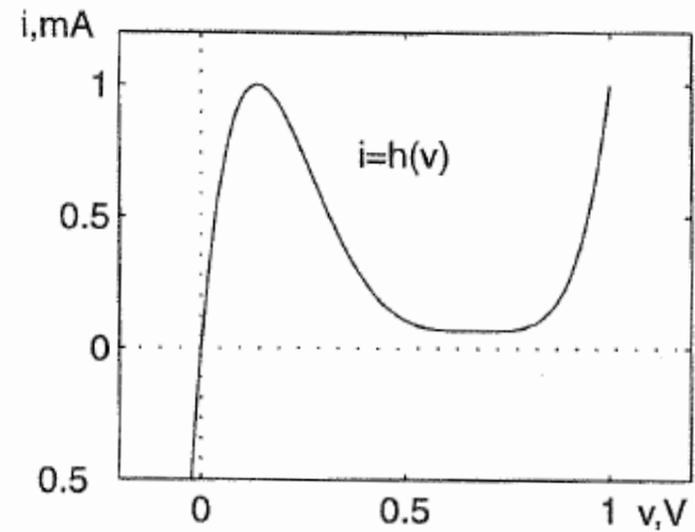
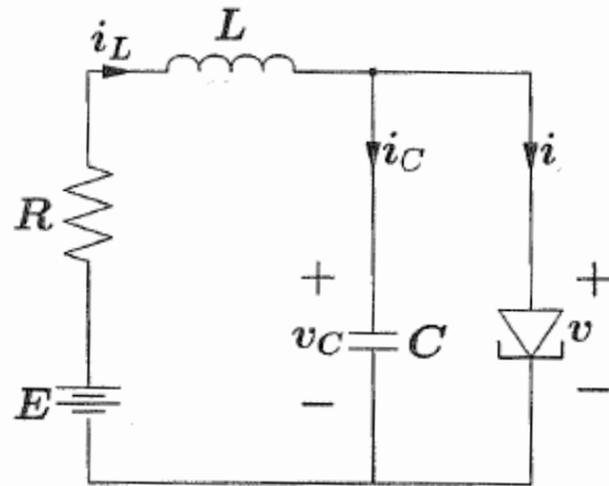


Motivação

- Modelos não-lineares possibilitam um retrato mais fiel do sistema, mas, por outro lado, eliminam a simplicidade associada às técnicas lineares.
- As técnicas de controle não-linear empregam modelos mais realistas e, portanto, mais complexos.
- Apesar desta maior complexidade, apenas a representação através de modelos não-lineares permite analisar características como, por exemplo, oscilações e bifurcações.

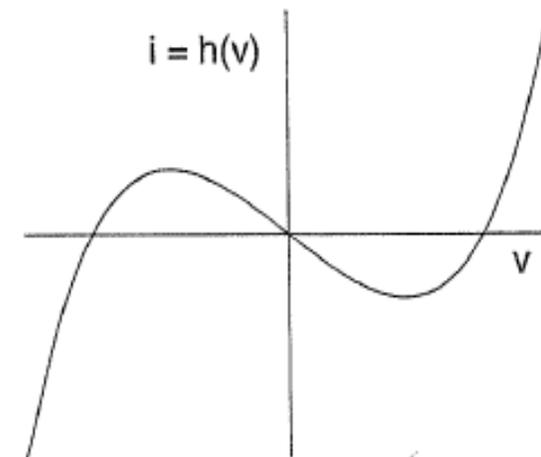
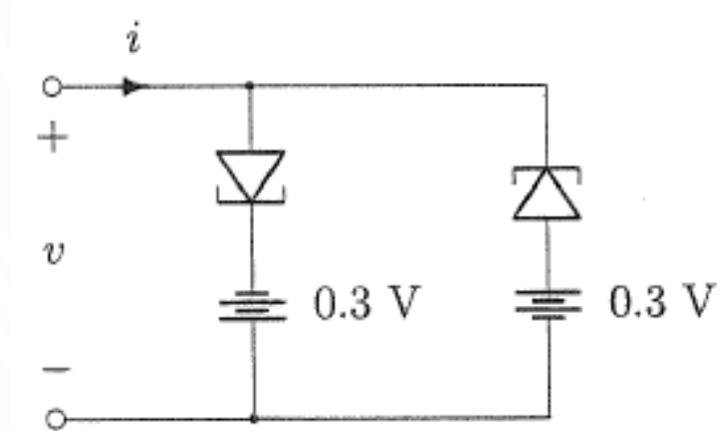
Sistemas não-lineares

- Diodo túnel



Sistemas não-lineares

- Oscilador com resistência negativa



Sistemas não-lineares

- Veículo sub-aquático operado remotamente (ROV)

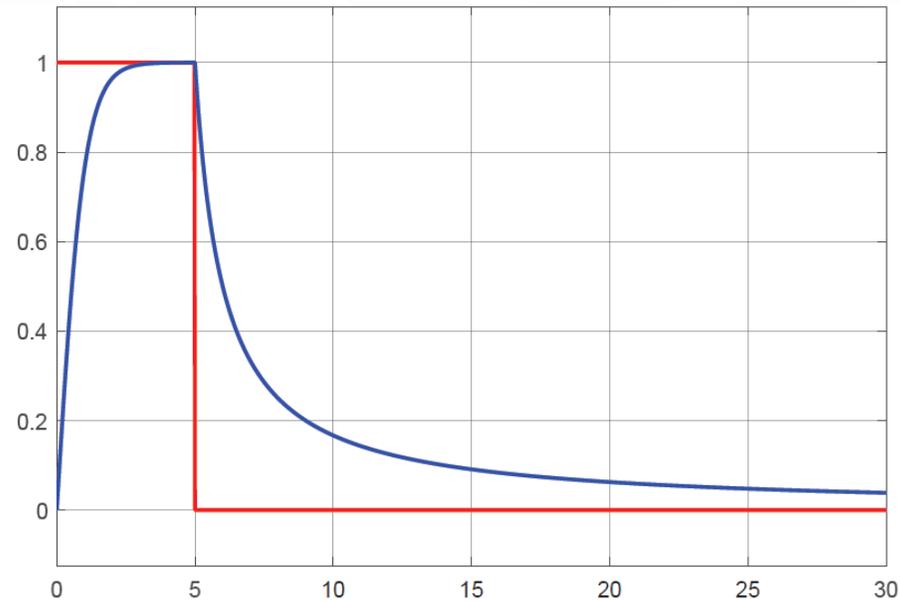


$$\frac{dv(t)}{dt} + v(t)|v(t)| = u(t)$$

- ◆ impulso propulsor: $u(t)$
- ◆ velocidade do veículo: $v(t)$

Sistemas não-lineares

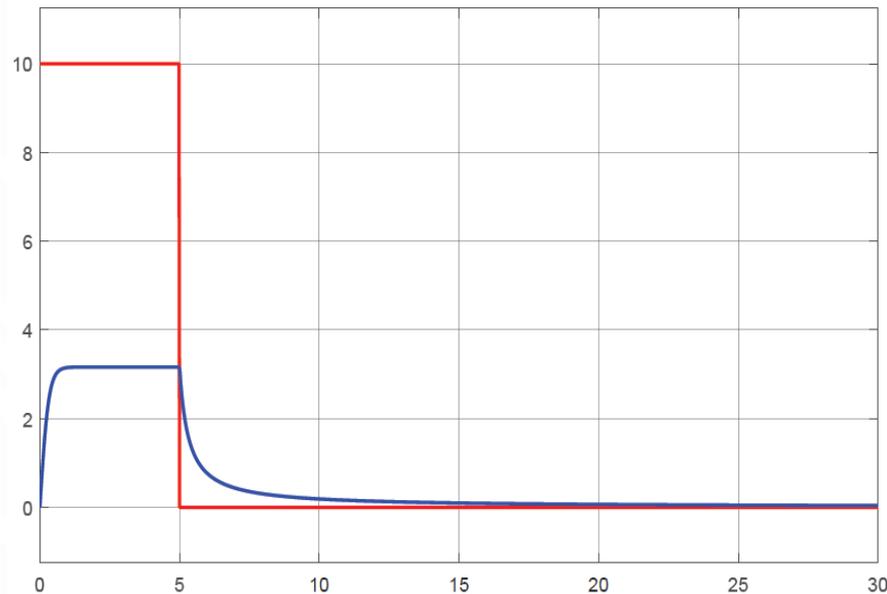
- Velocidade de um ROV quando a propulsão é dada por um pulso de 5 segundos.



- O amortecimento é maior em altas velocidades do que em baixas velocidades.

Sistemas não-lineares

- Velocidade de um ROV quando a propulsão é dada por um pulso de 5 segundos.



- Não-linearidade: quando a propulsão é 10 vezes maior, a velocidade não segue esta mesma proporção.

Modelos de Volterra

- Vito Volterra (1860-1940)

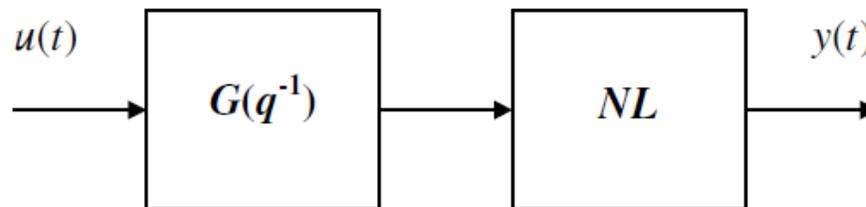


- Modelo (série) de Volterra de tempo contínuo de ordem N :

$$y(t) = \sum_{n=1}^N \int_0^t \cdots \int_0^t h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n u(t - \tau_i) d\tau_i$$

Modelos de Volterra

- Os modelos de Volterra são do tipo NFIR com não-linearidade polinomial.
- O primeiro uso dos modelos de Volterra na representação de sistemas não-lineares ocorreu no trabalho de Norbert Wiener na década de 1940.
- Diagrama de blocos do modelo de Wiener/Volterra:



Modelos de Volterra (contínuos)

- 1ª ordem (resposta ao impulso):

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)u(t - \tau) d\tau$$

- 2ª ordem:

$$y(t) = \int_0^t h_1(\tau_1)u(t - \tau_1) d\tau_1 + \\ + \int_0^t \int_0^t h_2(\tau_1, \tau_2)u(t - \tau_1)u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

Modelos de Volterra (discretos)

- 1ª ordem (resposta ao impulso):

$$y(k) = \sum_{\tau=0}^k h(\tau)u(k - \tau)$$

- 2ª ordem:

$$y(k) = \sum_{\tau_1=0}^k h_1(\tau_1)u(k - \tau_1) + \sum_{\tau_1=0}^k \sum_{\tau_2=0}^k h_2(\tau_1, \tau_2)u(k - \tau_1)u(k - \tau_2)$$

- As funções $h_1(\tau_1)$ e $h_2(\tau_1, \tau_2)$ são chamadas **kernels** de Volterra de 1ª e de 2ª ordem, respectivamente.



Modelos de Volterra

- A resposta ao impulso não é suficiente para descrever o sistema de forma completa.
- Para sistemas causais:
 - ◆ $h_1(\tau_1) = 0$ para $\tau_1 < 0$
 - ◆ $h_2(\tau_1, \tau_2) = 0$ para $\tau_1 < 0$ ou $\tau_2 < 0$
- Para sistemas estáveis:
 - ◆ $h_1(\tau_1) \rightarrow 0$ quando $\tau_1 \rightarrow \infty$
 - ◆ $h_2(\tau_1, \tau_2) \rightarrow 0$ quando $\tau_1 \rightarrow \infty$ ou $\tau_2 \rightarrow \infty$



Modelos de Volterra

- Principais vantagens:
 - ◆ fornecem uma relação explícita entre os sinais de entrada e saída;
 - ◆ possibilitam estender a sistemas não-lineares alguns conceitos definidos somente para sistemas lineares.
- No entanto, a modelagem de sistemas utilizando apenas informação do sinal de entrada (sem realimentação) exige um número elevado de termos para representar os kernels.
- Para contornar esta desvantagem, uma alternativa consiste em representá-los usando **bases de funções ortonormais**.

Bases de Funções Ortonormais

- Uma base de funções ortonormais (OBF) é um conjunto de funções $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ que forma a base de um espaço e possuem a propriedade de ortonormalidade:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \phi_i(k)\phi_j(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

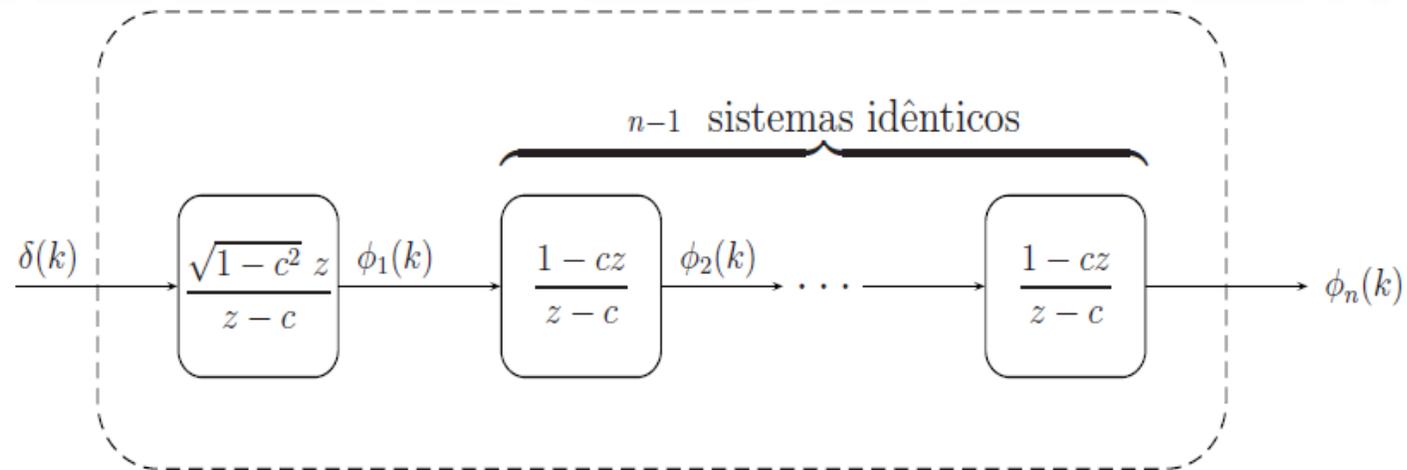
- Funções ortonormais de interesse em sistemas dinâmicos são as funções de **Laguerre**, **Kautz** e **GOBF**.

Funções de Laguerre

- São dadas no domínio da frequência (transformada Z) por:

$$\Phi_n(z) = \sqrt{1-c^2} \frac{z}{z-c} \left(\frac{1-cz}{z-c} \right)^{n-1} \quad n = 1, 2, \dots$$

- O parâmetro c denota o **polo** de Laguerre.



Funções de Laguerre

- Primeira função da base:

$$\Phi_1(z) = \sqrt{1 - c^2} \left(\frac{z}{z - c} \right)$$

$$\phi_1(k) = \mathcal{Z}^{-1}[\Phi_1(z)] = \sqrt{1 - c^2} (c^k) \quad k \geq 0$$

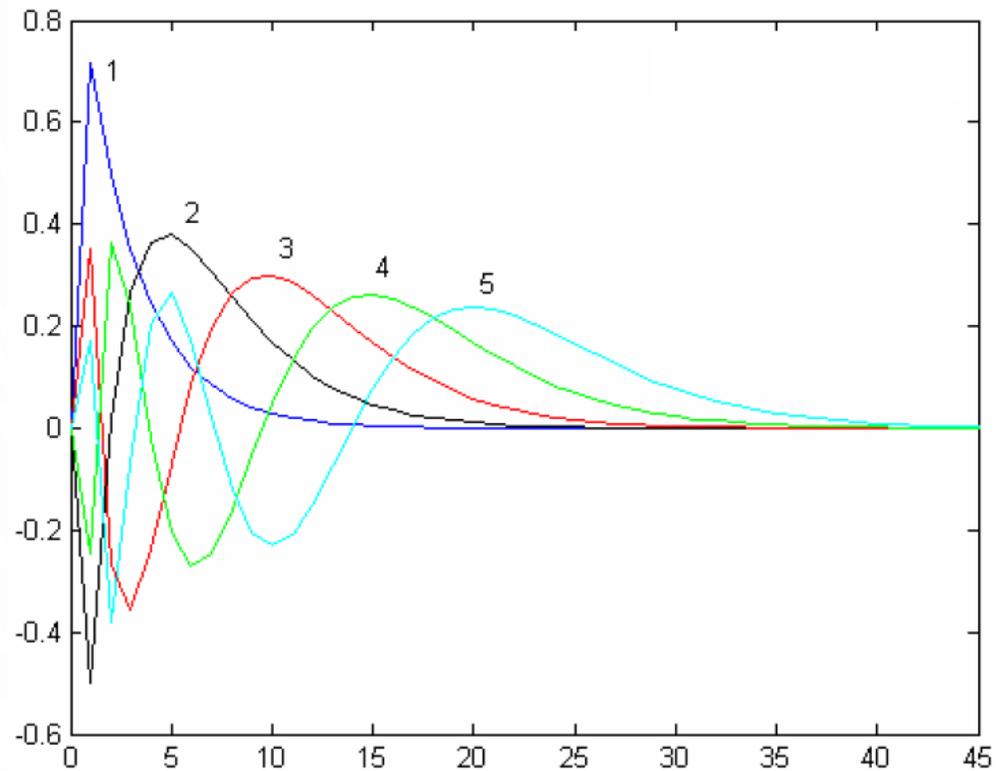
- Segunda função da base:

$$\Phi_2(z) = \sqrt{1 - c^2} \frac{z(1 - cz)}{(z - c)^2}$$

$$\phi_2(k) = \sqrt{1 - c^2} [-c^{k+1} + (1 - c^2)kc^{k-1}] \quad k \geq 0$$

Funções de Laguerre

- Gráfico das 5 primeiras funções com polo $c = 0.7$



Funções de Kautz

- São dadas no domínio da frequência (transformada Z) por:

$$\Psi_{2n}(z) = \frac{\sqrt{(1-c^2)(1-b^2)} z}{z^2 + b(c-1)z - c} \left(\frac{-cz^2 + b(c-1)z + 1}{z^2 + b(c-1)z - c} \right)^{n-1}$$

$$\Psi_{2n-1}(z) = \frac{\sqrt{1-c^2} z(z-b)}{z^2 + b(c-1)z - c} \left(\frac{-cz^2 + b(c-1)z + 1}{z^2 + b(c-1)z - c} \right)^{n-1}$$

- Os parâmetros b, c relacionam-se com os **polos** de Kautz:

$$b = \frac{\beta + \bar{\beta}}{1 + \beta\bar{\beta}} \quad c = -\beta\bar{\beta}$$

Funções de Kautz

- Primeira função da base:

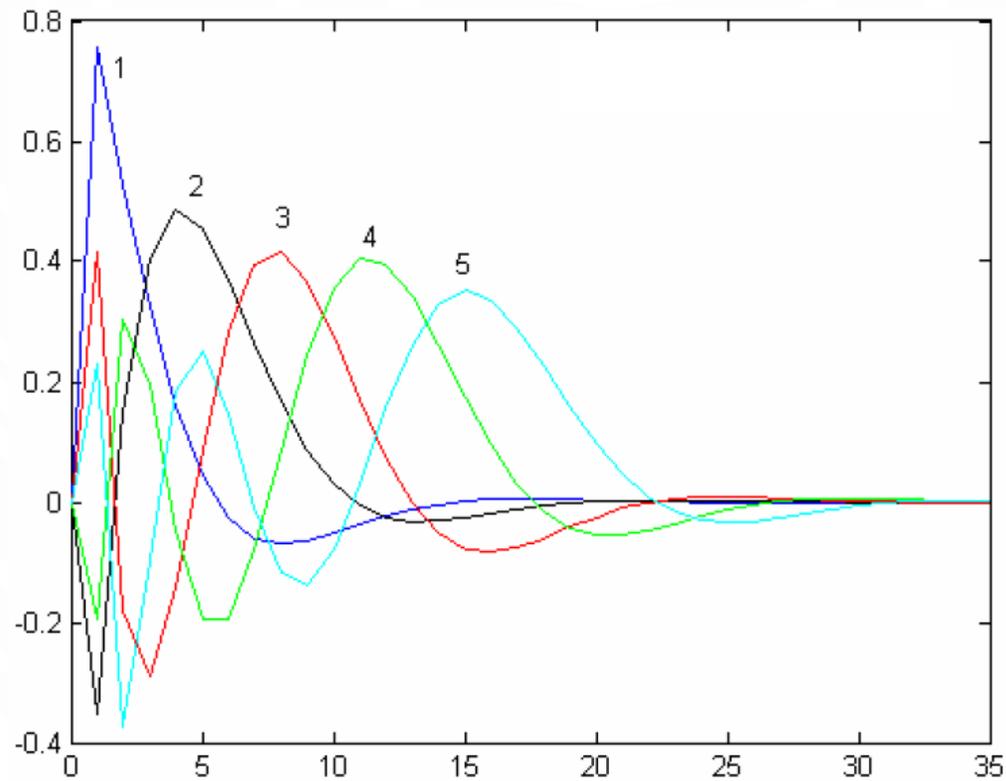
$$\Psi_1(z) = \frac{\sqrt{1 - c^2} z(z - b)}{z^2 + b(c - 1)z - c}$$

- Segunda função da base:

$$\Psi_2(z) = \frac{\sqrt{(1 - b^2)(1 - c^2)} z}{z^2 + b(c - 1)z - c}$$

Funções de Kautz

- Gráfico das 5 primeiras funções com polos $\beta = 0.7 \pm j0.25$





Laguerre *versus* Kautz

- A dinâmica presente nestas funções (polo) permite incorporar conhecimento prévio sobre o comportamento do sistema.
- As funções de Kautz representam uma generalização das funções de Laguerre por serem parametrizadas por um par de polos complexos conjugados.
- Por esta razão, a base de Kautz é mais adequada para representar sistemas com dinâmica dominante oscilatória.

Modelo OBF-Volterra

- A ideia é representar cada kernel de Volterra como uma expansão (combinação linear e não-linear) em uma base de funções ortonormais.

- 1ª ordem:
$$h_1(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \phi_i(k)$$
$$= \alpha_1 \phi_1(k) + \alpha_2 \phi_2(k) + \alpha_3 \phi_3(k) + \dots$$

- 2ª ordem:
$$h_2(k_1, k_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{m,n} \phi_m(k_1) \phi_n(k_2)$$

Modelo OBF-Volterra

- Os coeficientes da expansão são calculados tomando-se vantagem da ortonormalidade das funções da base.

- 1ª ordem:
$$\alpha_i = \sum_{k=0}^{\infty} h_1(k) \phi_i(k)$$

- 2ª ordem:
$$\alpha_{m,n} = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} h_2(k_1, k_2) \phi_m(k_1) \phi_n(k_2)$$



Modelo OBF-Volterra

- Problema central: dado um kernel, como determinar os polos que melhor representam sua dinâmica?
- Uma abordagem envolve minimizar o erro de aproximação de um kernel ao se usar um número finito de funções da base.
- As bases ortonormais formam um **conjunto completo**, assim qualquer sinal de energia finita pode ser aproximado com uma dada precisão truncando-se uma expansão infinita.

Modelo OBF-Volterra

- Representação exata: $h_1(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \phi_i(k)$
- Representação aproximada: $\hat{h}_1(k) = \sum_{i=1}^M \alpha_i \phi_i(k)$
- Norma: $\|h_1(k)\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} h_1^2(k)$
- Erro de aproximação: $\text{Erro} = \left\| h_1(k) - \hat{h}_1(k) \right\|^2$

Modelo OBF-Volterra

- Quando usando funções de Kautz, é possível provar que o erro de aproximação possui um limitante superior:

$$\text{Erro} \leq \frac{2(m_2c^2 - 2m_1c + m_3)}{\eta(M + 1)(1 - c^2)}$$

- em que m_1, m_2, m_3 dependem do parâmetro b e também do kernel de Volterra de η -ésima ordem.

Modelo OBF-Volterra

- Problema de otimização:

$$\min_{|c|<1} \frac{2(m_2c^2 - 2m_1c + m_3)}{\eta(M+1)(1-c^2)}$$

- Solução: $c_{\text{otimo}} = \begin{cases} \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} & \text{se } \xi > 1 \\ \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} & \text{se } \xi < -1 \end{cases}$

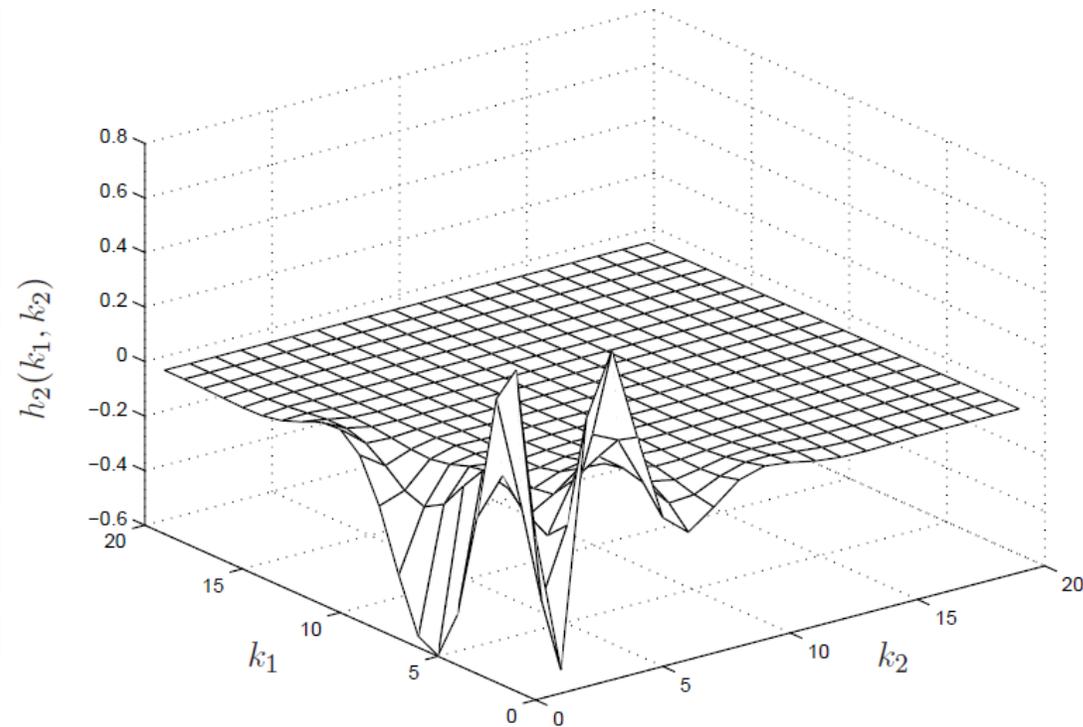
$$\xi = (m_2 + m_3)/(2m_1)$$

- Expressão analítica que fornece valor ótimo do parâmetro c de Kautz para um dado b .

Exemplo

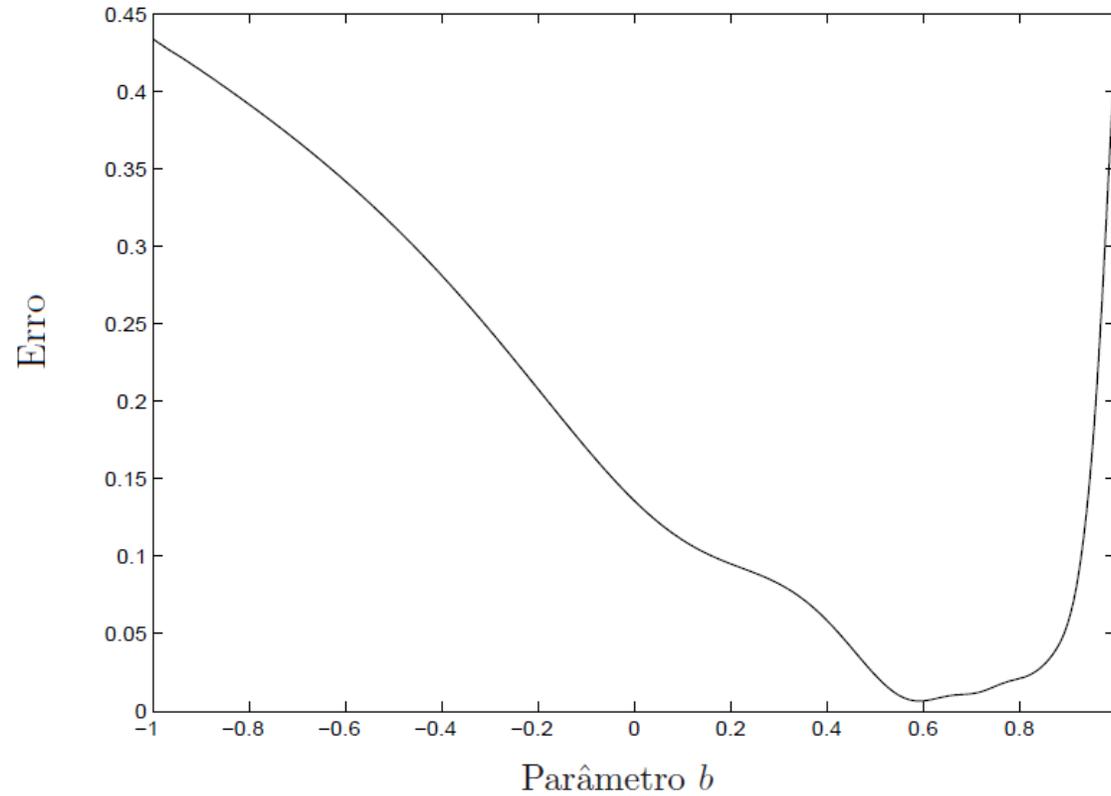
- Kernel de Volterra de 2ª ordem com dinâmica oscilatória:

$$h_2(k_1, k_2) = (k_1 - 2k_2)e^{-(0.45k_1+0.7k_2)} \cos(100k_1 + k_2)$$



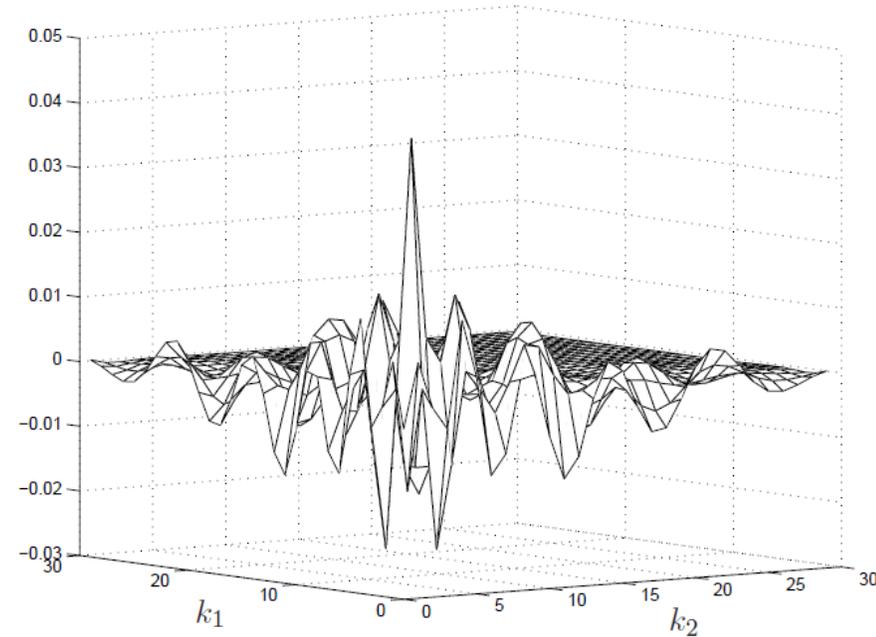
Exemplo

- O menor erro ocorre para $b = 0.593$, levando a $c = -0.26$.



Exemplo

- Polos ótimos: $\beta = 0.373 \pm j0.346$
- Erro de aproximação usando 6 funções de Kautz:





Identificação dos Kernels

- A utilização da solução analítica apresentada anteriormente requer o conhecimento prévio dos kernels de Volterra.
- Quando os kernels não são conhecidos, eles devem ser estimados a partir de um conjunto de dados entrada/saída de um determinado sistema.
- O algoritmo proposto a seguir identifica os kernels do modelo de Volterra, ao mesmo tempo em que calcula os polos de Kautz.



Identificação dos Kernels

- Algoritmo:
 1. Selecionar a ordem do modelo de Volterra e o número de funções de Kautz que serão utilizados na aproximação dos kernels.
 2. Selecionar um polo inicial de Kautz para cada kernel.
 3. A partir dos dados de entrada e saída disponíveis, estimar os coeficientes α_i da expansão via mínimos quadrados.
 4. Calcular os kernels de Volterra a partir da expansão.
 5. Obter o novo polo de Kautz a partir dos kernels estimados no passo 4 e retornar ao passo 3.

Sistema de Levitação Magnética

- Composto por duas bobinas que criam campos magnéticos ao serem submetidas a correntes elétricas.
- Estes campos interagem com os campos de um disco magnético permanente.
- As forças mecânicas que surgem sobre o disco irão movimentá-lo de acordo com o sentido das correntes.



Sistema de Levitação Magnética

- Este sistema é não-linear:

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1 \dot{y}_1 + F_{m12} = F_{u11} - F_{u21} - m_1 g$$

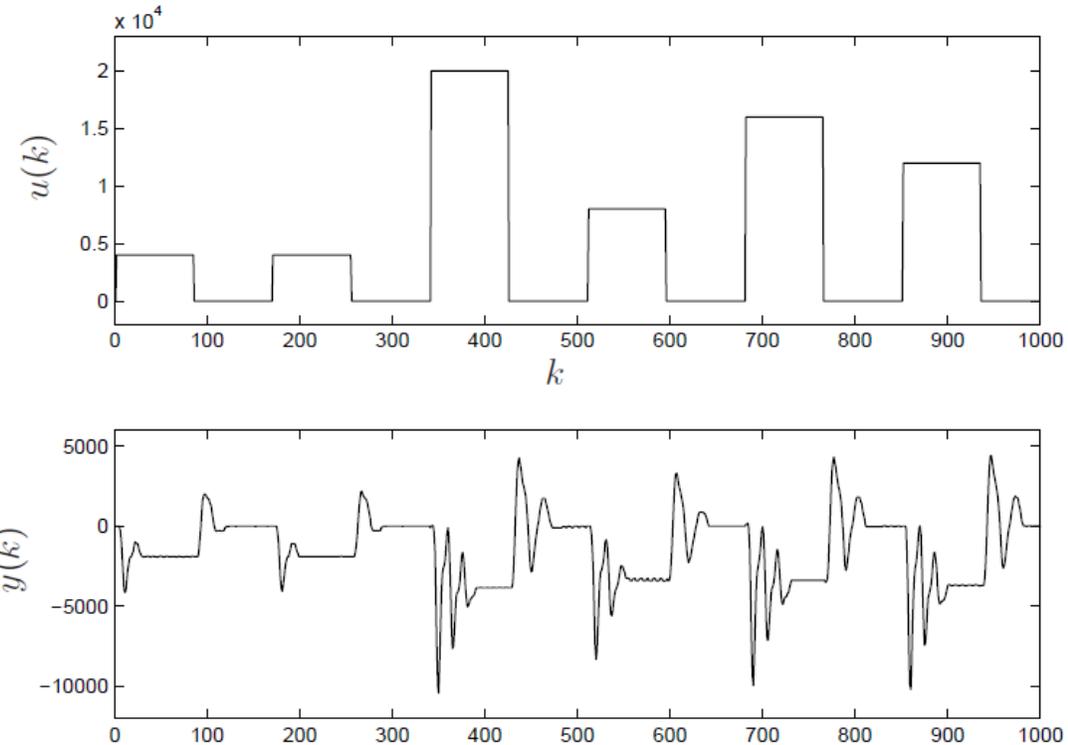
$$F_{m12} = \frac{c}{(y_c + y_2 - y_1 + d)^4}$$

$$F_{u11} = \frac{i_1}{a(k_s y_1 + b)^4}$$

$$F_{u21} = \frac{i_2}{a(y_c + k_s y_1 + b)^4}$$

Sistema de Levitação Magnética

- Entrada $u(k)$: corrente na bobina superior.
- Saída $y(k)$: posição do disco magnético.



Sistema de Levitação Magnética

- Modelo de Volterra de 2ª ordem proposto:

$$y(k) = \sum_{\tau_1=0}^k h_1(\tau_1)u(k - \tau_1) + \sum_{\tau_1=0}^k \sum_{\tau_2=0}^k h_2(\tau_1, \tau_2)u(k - \tau_1)u(k - \tau_2)$$

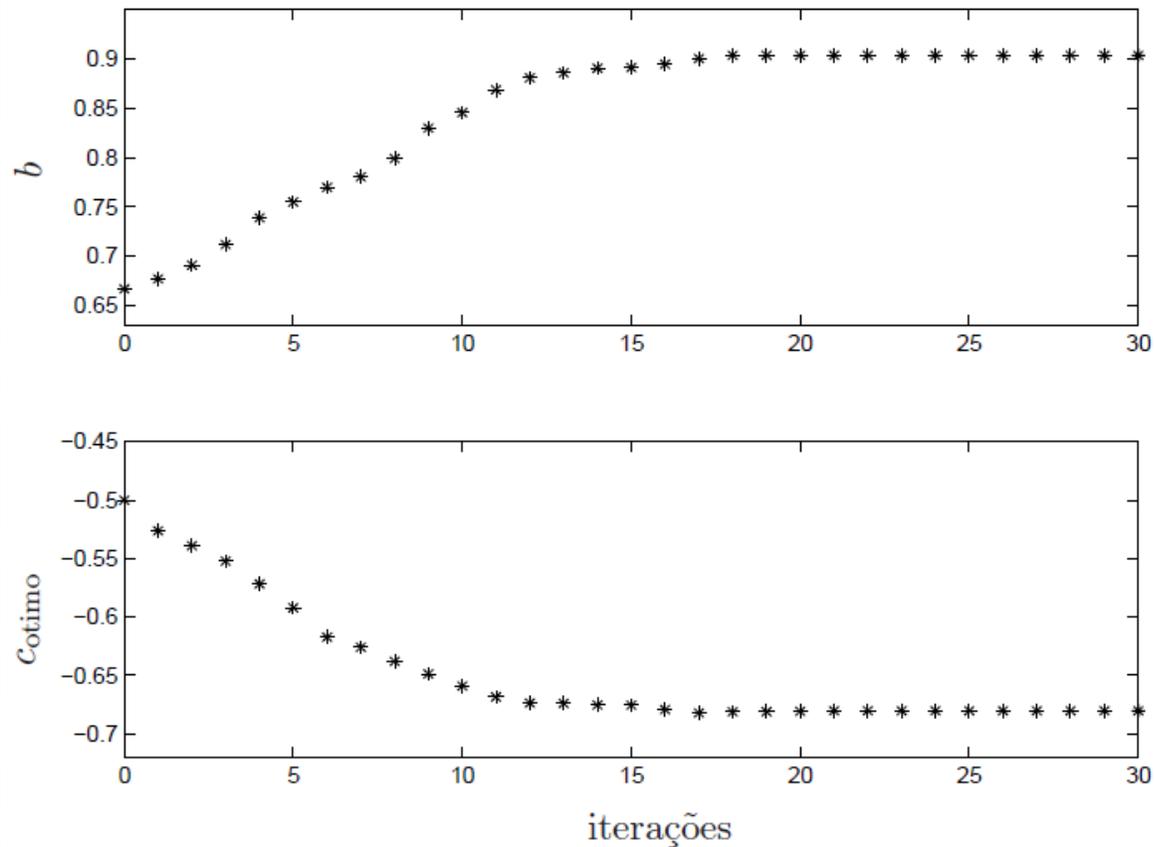
- Cada kernel deverá ser expresso em termos de 6 funções de Kautz parametrizadas no polo β , a ser determinado.

$$h_1(k) = \sum_{i=1}^6 \alpha_i \psi_i(k)$$

$$h_2(k_1, k_2) = \sum_{m=1}^6 \sum_{n=1}^6 \alpha_{m,n} \psi_m(k_1) \psi_n(k_2)$$

Sistema de Levitação Magnética

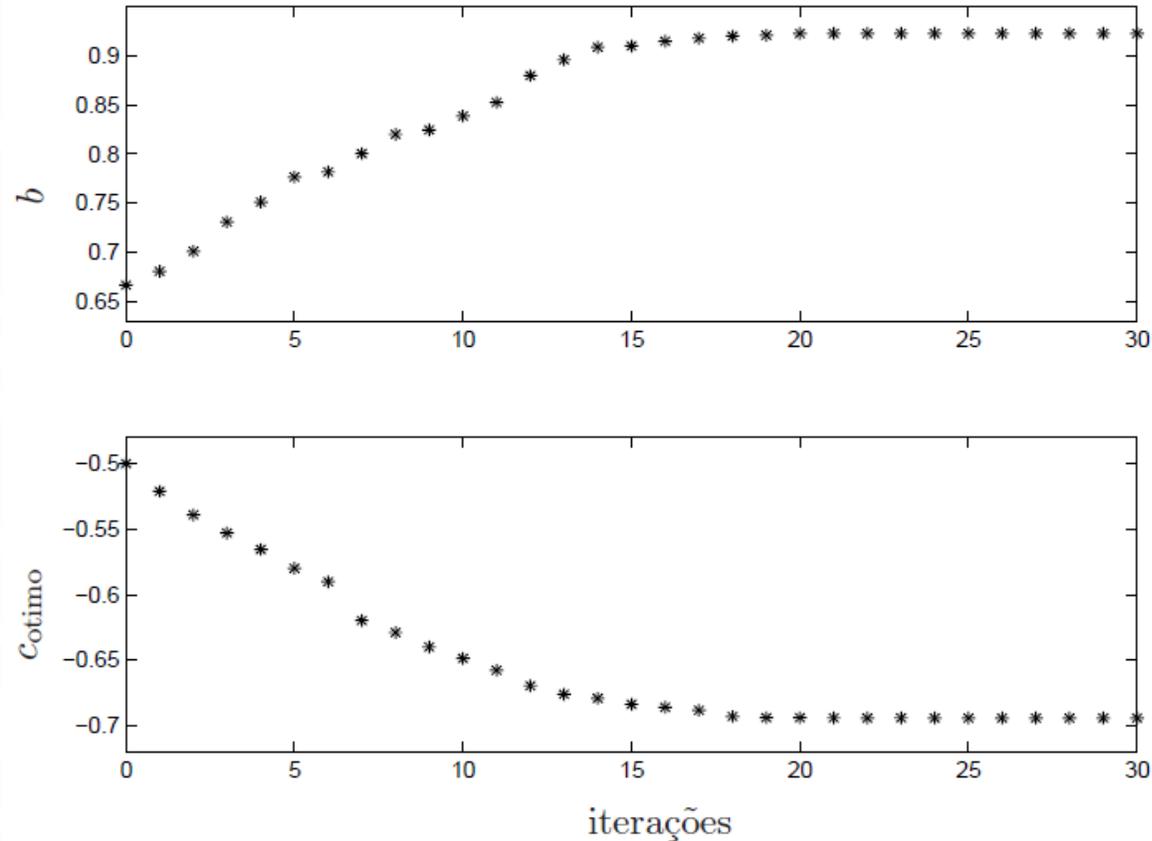
- Evolução dos polos de Kautz para o kernel de 1ª ordem



$$\beta = 0.76 \pm j0.32$$

Sistema de Levitação Magnética

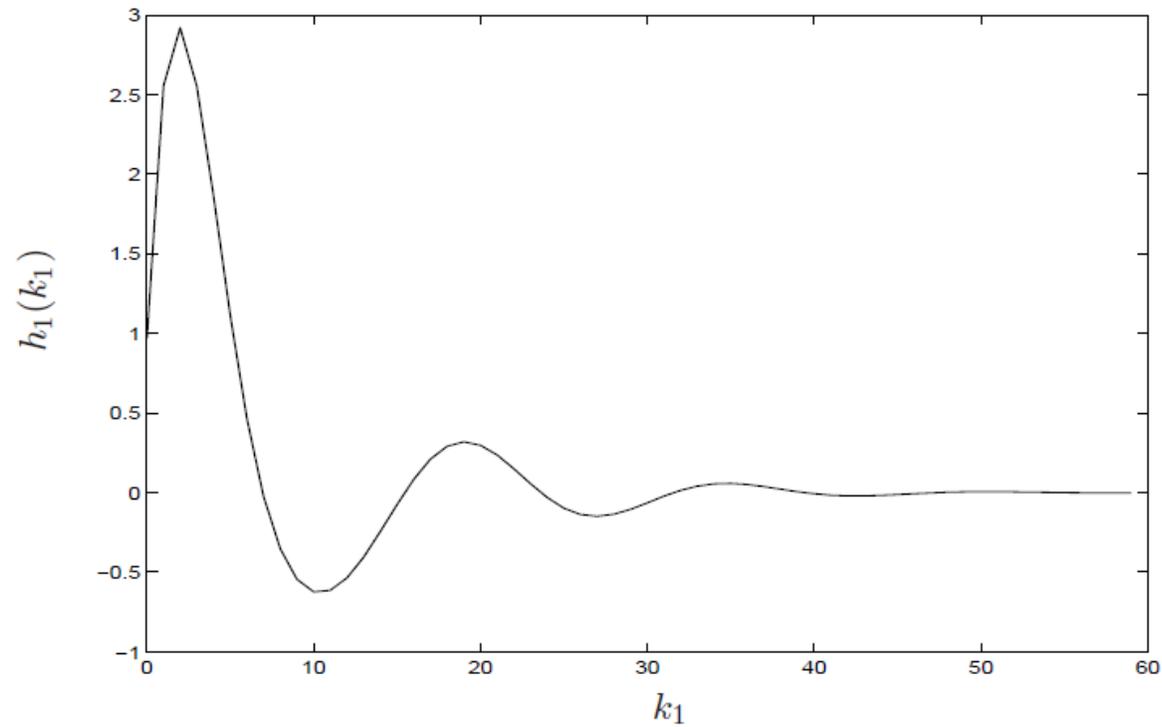
- Evolução dos polos de Kautz para o kernel de 2ª ordem



$$\beta = 0.78 \pm j0.29$$

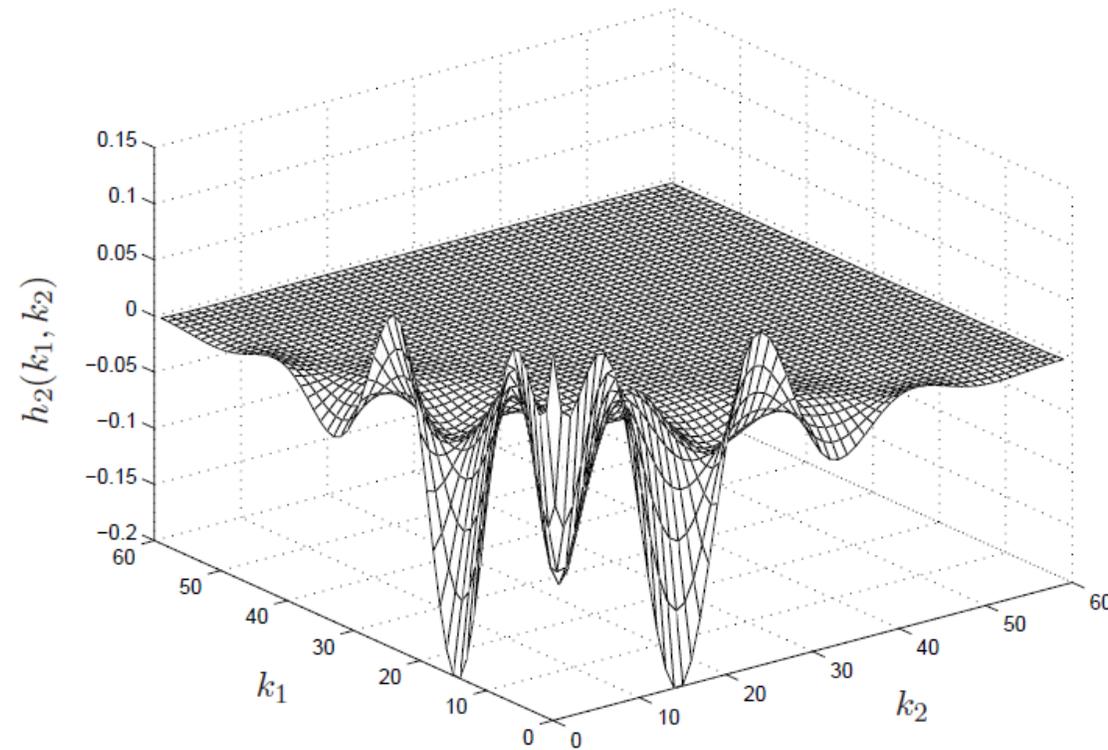
Sistema de Levitação Magnética

- Kernel de 1ª ordem



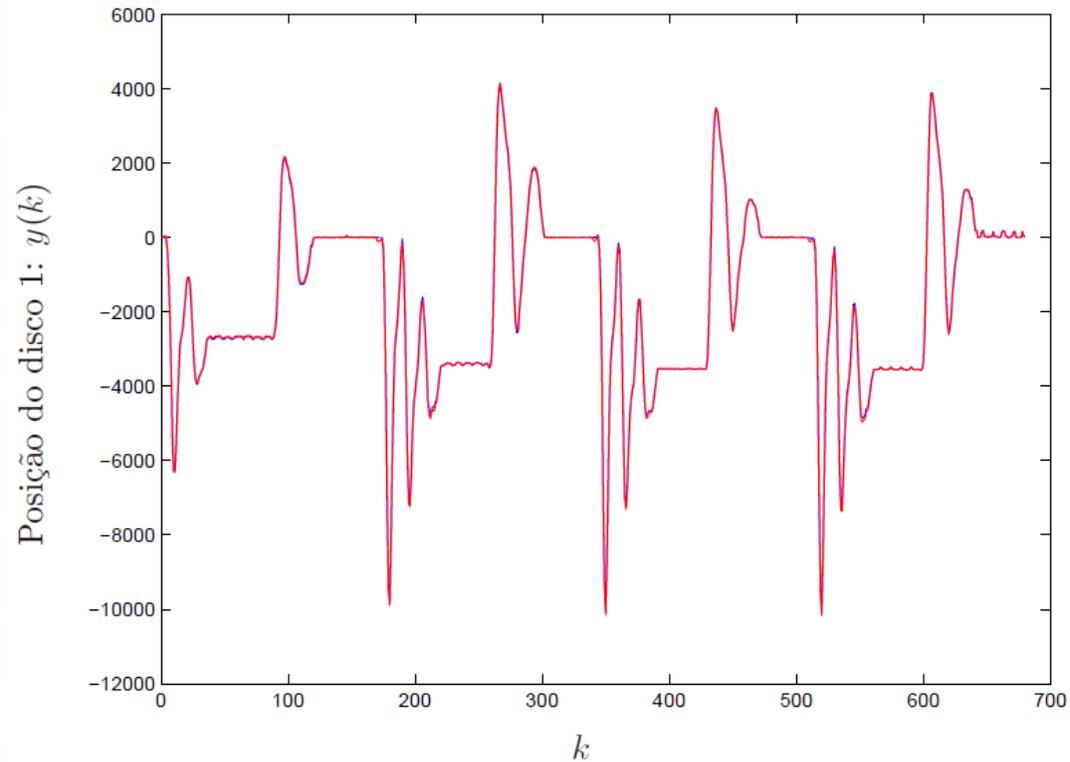
Sistema de Levitação Magnética

- Kernel de 2ª ordem



Sistema de Levitação Magnética

- Validação do modelo





Conclusões

- Modelos de Volterra têm aplicações bem sucedidas em controle de sistemas na área de telecomunicações, processos químicos, sistemas biológicos, eletrônica, dentre outras.
- Desafios:
 - ◆ Usar bases de funções ortonormais generalizadas (GOBF), que possuem combinações de polos reais e complexos
 - ◆ Aplicar outras técnicas de otimização, como o método do gradiente descendente
 - ◆ Utilizar modelos de Volterra de 3ª ordem
 - ◆ Usar modelos com incertezas