

---

**UM SISTEMA MULTIVARIÁVEL DE TANQUES ACOPLADOS PARA  
AVALIAÇÃO DE TÉCNICAS DE CONTROLE**

**HUGO LEONARDO GOSMANN**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA**

---

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

UM SISTEMA MULTIVARIÁVEL  
DE TANQUES ACOPLADOS PARA  
AVALIAÇÃO DE TÉCNICAS DE CONTROLE

HUGO LEONARDO GOSMANN

ORIENTADOR: ADOLFO BAUCHSPIESS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA

PUBLICAÇÃO: 143/2002

BRASÍLIA/DF, ABRIL/2002.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
FACULDADE DE TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

UM SISTEMA MULTIVARIÁVEL  
DE TANQUES ACOPLADOS PARA  
AVALIAÇÃO DE TÉCNICAS DE CONTROLE

HUGO LEONARDO GOSMANN

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

**APROVADA POR:**

---

PROF. DR.-ING. ADOLFO BAUCHSPIESS (UnB)  
(ORIENTADOR)

---

PROF. DR. EURICE DE SOUZA (UnB)  
(EXAMINADOR INTERNO)

---

PROF. DR.-ING. EUGÊNIO DE BONA CASTELAN NETO (UFSC)  
(EXAMINADOR EXTERNO)

BRASÍLIA/DF, 26 DE ABRIL DE 2002.

## FICHA CATALOGRÁFICA

GOSMANN, HUGO LEONARDO

Um Sistema Multivariável de Tanques Acoplados para Avaliação de Técnicas de Controle [Distrito Federal] 2002.

xiv, 78 p., 297mm (ENE/FT/UnB, Mestre, Engenharia Elétrica, 2002).

Dissertação de Mestrado — Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia. Departamento de Engenharia Elétrica.

- |                          |                            |
|--------------------------|----------------------------|
| 1. Controle de Processos | 2. Sistemas Multivariáveis |
| 3. Sistemas Não-Lineares | 4. Linearização Exata      |
| I. ENE/FT/UnB            | II. Título (série)         |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

GOSMANN, H. L. (2002). Um Sistema Multivariável de Tanques Acoplados para Avaliação de Técnicas de Controle. Dissertação de Mestrado, Publicação 143/2002, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 78 p.

## CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Hugo Leonardo Gosmann

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO: Um Sistema Multivariável de Tanques Acoplados para Avaliação de Técnicas de Controle

GRAU / ANO: Mestre / 2002

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta dissertação de mestrado e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta dissertação de mestrado pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

---

Hugo Leonardo Gosmann

SQS 212 – bloco D – apartamento 207

70.275-040 – Brasília/DF – Brasil

*À Giuliana, por seu amor.*

# Agradecimentos

Inicialmente gostaria de agradecer ao Prof. Adolfo Bauchspiess, meu mestre e guia nesta jornada, por seus ensinamentos e por sua amizade verdadeira.

Agradeço também a todos os colegas do LAVSI que acompanharam e participaram deste trabalho. Em especial, meu forte abraço aos alunos Fernando de Melo Luna Filho e Igor Gastal Ripoll pela grande ajuda na fase inicial de desenvolvimento do processo de tanques acoplados.

Aos amigos Patrick Letouzé Moreira e Luís Gustavo de Aquino Carvalho meu agradecimento por terem garantido a retaguarda nas minhas atividades de ensino.

Ao amigo Cristiano Jacques Miosso, meu estimado agradecimento pelas valiosas sugestões e pela ajuda imprescindível para o fechamento deste trabalho.

Ao pessoal do Grupo de Apoio Técnico (GAT) um sincero agradecimento pela presteza com que sempre antenderam às minhas solicitações.

A meus pais e irmãos agradeço o apoio e a cobrança constantes, sei que em nenhum momento deixaram de acreditar em mim.

À minha tia Clara, por quem tenho um carinho especial, agradeço por ter sempre apostado no meu potencial.

A toda família Marcelino, especialmente ao Dr. Gileno e a Sra. Vera, minha eterna gratidão pela maneira como me apoiaram desde que cheguei à Brasília.

Por fim, mas obviamente não menos importante, agradeço de coração à Giuliana, a quem dedico este trabalho, não só por seu amor mas também pelo seu apoio incondicional e sua paciência sem tamanho.

# Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar o controle de sistemas multivariáveis não-lineares. Para tanto, foi construído um processo em escala de laboratório, com três tanques acoplados, onde se deseja controlar as alturas dos níveis de água. Esse tipo de processo é bastante comum em escala industrial, principalmente nos ramos químico, petroquímico, de celulose e de alimentos. O modelo matemático foi obtido analiticamente e então validado com dados experimentais. A dinâmica do processo é nitidamente não-linear, uma vez que as vazões nos tanques dependem da raiz quadrada das alturas dos níveis de água. Essas não-linearidades fazem com que o desempenho de controladores clássicos do tipo PID ou controladores no espaço-de-estados dependam fortemente da faixa de operação do processo, exigindo, assim, ajuste dos seus parâmetros para cada ponto de operação. Para contornar esse problema é utilizada a técnica da linearização exata. Nesse caso, inicialmente é realizada uma compensação não-linear que cancela as não-linearidades da planta e desacopla o sistema, e só então é projetado um controlador linear para o sistema pré-compensado. Isso permite que técnicas de controle linear possam ser utilizadas sem a necessidade de linearização em cada ponto de operação. Foram realizados experimentos de resposta ao degrau e rejeição de perturbação em diferentes pontos de operação do sistema, comparando-se os resultados obtidos com os diferentes controladores, ajustados para respeitar as mesmas especificações de controle. Os resultados mostram que o desempenho do controlador PID e do controlador no espaço-de-estados é prejudicado quando o processo opera em um ponto distante do ponto de operação utilizado para linearizar o modelo. Isso não acontece quando é utilizada a linearização exata, já que essa técnica permite que se faça uma linearização em toda a faixa de operação do processo, realizando ainda, um completo desacoplamento entre as variáveis do sistema. Os resultados foram confirmados através de simulações e também de testes experimentais diretamente no processo. Uma das principais contribuições do trabalho foi mostrar, em um processo real, que existem casos onde o maior esforço computacional necessário para a implementação de técnicas mais sofisticadas de controle é compensado pelo melhor desempenho do sistema.

# Abstract

The main goal of this work is to study the control of nonlinear multivariable processes. A laboratory scale prototype, with three interconnected tanks was constructed. This type of process is very common in real applications, especially in chemical, paper and food industries. The mathematical model was obtained analytically and then validated with experimental data. The dynamics of the process is clearly nonlinear since the flows between the tanks depend on the square root of the levels. These nonlinearities make the performance of classical controllers like PID or modern state-space controllers, strongly dependent on the process operation range, which leads to the need of adjusting the controller parameters for each point of operation. The feedback linearization technique is used to overcome this problem. In this case, the model is globally linearized through a state feedback and change of coordinates in the state space. This fact leads to the possibility of using linear control techniques without the need of linearization around an operation point. Experiments of setpoint change and disturbance rejection were carried out in different points of operation, with the controllers adjusted with the same control specifications. The results show that the performance of PID and state space controllers change when they operate far from the point used to linearize the model. When the feedback linearization is used this problem doesn't happen. Results from simulations and real experiments using the above controllers are presented and discussed. An important contribution of this work was to show that in real applications, the computational effort needed to implement more sophisticated control strategies is compensated with a better performance of the system.

# Sumário

Capítulo	Página
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 ESCOPO DO TRABALHO . . . . .	2
1.2 METODOLOGIA . . . . .	3
1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA . . . . .	4
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO . . . . .	7
<b>2 MODELAGEM MATEMÁTICA</b>	<b>9</b>
2.1 INTRODUÇÃO . . . . .	9
2.2 BALANÇO DE MASSA . . . . .	10
2.3 MODELO NÃO-LINEAR . . . . .	11
2.3.1 Equações do processo de tanques acoplados . . . . .	11
2.3.2 Parâmetros do modelo . . . . .	12
2.3.3 Validação do modelo . . . . .	14
2.4 MODELO DE PEQUENOS SINAIS . . . . .	16
2.4.1 Modelo do processo considerando apenas um tanque . . . . .	16
2.4.2 Modelo do processo considerando dois tanques acoplados . . . . .	18
2.4.3 Modelo no espaço-de-estados do processo com três tanques acoplados	20
2.5 MODELO DOS SENSORES E DOS ATUADORES . . . . .	22
2.5.1 Sensores de nível . . . . .	22
2.5.2 Moto-bombas . . . . .	24
2.6 ASPECTOS DE IMPLEMENTAÇÃO . . . . .	25
2.7 RESUMO DO CAPÍTULO . . . . .	26

<b>3</b>	<b>ESPECIFICAÇÕES PARA O SISTEMA EM MALHA FECHADA</b>	<b>27</b>
3.1	INTRODUÇÃO . . . . .	27
3.2	RESPOSTA DE SISTEMAS DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM . . . . .	28
3.2.1	Sistemas de primeira ordem . . . . .	28
3.2.2	Sistemas de segunda ordem . . . . .	29
3.3	ESPECIFICAÇÕES PARA O PROJETO DOS CONTROLADORES . . . . .	30
3.3.1	Características da resposta dinâmica . . . . .	30
3.3.2	Linearidade . . . . .	30
3.3.3	Desacoplamento . . . . .	31
3.3.4	Esforço de atuação . . . . .	31
3.3.5	Robustez à variação dos parâmetros do modelo . . . . .	31
3.3.6	Rejeição de perturbações . . . . .	32
3.4	RESUMO DO CAPÍTULO . . . . .	32
<b>4</b>	<b>CONTROLE PID</b>	<b>33</b>
4.1	INTRODUÇÃO . . . . .	33
4.2	ESTRUTURA DO CONTROLADOR PID . . . . .	34
4.3	SINTONIA DE CONTROLADORES PID . . . . .	34
4.4	PROJETO DOS CONTROLADORES PARA O PROCESSO DE TANQUES ACOPLADOS . . . . .	35
4.5	RESUMO DO CAPÍTULO . . . . .	37
<b>5</b>	<b>CONTROLE NO ESPAÇO-DE-ESTADOS</b>	<b>38</b>
5.1	INTRODUÇÃO . . . . .	38
5.2	ANÁLISE DO SISTEMA LINEARIZADO . . . . .	38
5.3	CONTROLABILIDADE . . . . .	40
5.4	POSICIONAMENTO DE PÓLOS . . . . .	41
5.5	PROJETO DO CONTROLADOR NO ESPAÇO-DE-ESTADOS . . . . .	42
5.6	RESUMO DO CAPÍTULO . . . . .	43
<b>6</b>	<b>LINEARIZAÇÃO EXATA</b>	<b>44</b>

6.1	INTRODUÇÃO . . . . .	44
6.2	LINEARIZAÇÃO EXATA DE SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS . . .	46
6.2.1	Representação do sistema . . . . .	46
6.2.2	Linearização exata via realimentação de estados . . . . .	47
6.3	LINEARIZAÇÃO EXATA DO PROCESSO MONOTANQUE . . . . .	49
6.3.1	Projeto do controlador de laço interno . . . . .	49
6.3.2	Projeto do controlador de laço externo . . . . .	51
6.4	LINEARIZAÇÃO EXATA DO PROCESSO DE TANQUES ACOPLADOS	51
6.4.1	Projeto do controlador de laço interno . . . . .	52
6.4.2	Projeto do controlador de laço externo . . . . .	55
6.5	RESUMO DO CAPÍTULO . . . . .	57
<b>7</b>	<b>RESULTADOS EXPERIMENTAIS</b>	<b>58</b>
7.1	INTRODUÇÃO . . . . .	58
7.2	RESULTADOS DE SIMULAÇÕES . . . . .	58
7.3	RESUMO DO CAPÍTULO . . . . .	71
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>72</b>
<b>A</b>	<b>A EQUAÇÃO DE BERNOULLI</b>	<b>77</b>

# Lista de Tabelas

<b>Tabela</b>	<b>Página</b>
2.1 Resultado dos testes estáticos . . . . .	12
3.1 Resumo das especificações de controle para o sistema em malha fechada . .	32
4.1 Parâmetros dos controladores PI para o processo de tanques acoplados . .	36
5.1 Ponto de operação considerado para linearizar o modelo do processo . . . .	40
5.2 Autovalores do sistema linearizado . . . . .	40
5.3 Parâmetros dos controladores no espaço-de-estados para o processo de tanques acoplados . . . . .	42
7.1 Pontos de operação considerados nos testes experimentais . . . . .	58
7.2 Comparação entre o desempenho dos controladores PI, espaço-de-estados e linearização exata em torno dos três pontos de operação . . . . .	65

# Lista de Figuras

Figura	Página
1.1 Foto do processo de tanques acoplados . . . . .	2
2.1 Diagrama esquemático do processo de tanques acoplados . . . . .	9
2.2 Diagrama esquemático do processo monotanque . . . . .	10
2.3 Característica dinâmica das válvulas . . . . .	13
2.4 Vazão de saída no processo monotanque . . . . .	14
2.5 Validação do modelo do processo para $k = 8.2094$ . . . . .	15
2.6 Diagrama esquemático do processo considerando apenas um tanque . . . .	17
2.7 Diagrama esquemático do processo considerando dois tanques acoplados . .	19
2.8 Montagem do sensor de nível . . . . .	22
2.9 Curvas de calibração dos sensores de nível . . . . .	23
2.10 Diagrama esquemático do circuito de acionamento das moto-bombas . . . .	24
2.11 Curvas de calibração das moto-bombas . . . . .	25
3.1 Região do plano complexo para a alocação dos pólos de malha fechada . .	31
4.1 Diagrama de blocos do sistema de controle PID . . . . .	36
4.2 Lugar das raízes para o sub-sistema de primeira ordem . . . . .	36
4.3 Lugar das raízes para o sub-sistema de segunda ordem . . . . .	37
5.1 Diagrama de blocos do sistema de controle no espaço-de-estados . . . . .	38
6.1 Diagrama de blocos do sistema de controle baseado na linearização exata .	45
6.2 Sistema resultante da linearização exata do processo monotanque . . . . .	51
6.3 Controlador de laço externo para o processo monotanque . . . . .	51

6.4	Sistema resultante da linearização exata do processo de tanques acoplados	56
6.5	Controlador de laço externo para o processo de tanques acoplados . . . . .	56
7.1	Comparação entre o desempenho dos três controladores para mudanças de referência ascendentes e descendentes para a saída $y_1$ em torno do ponto de operação $PO$ . . . . .	60
7.2	Comparação entre o desempenho dos três controladores para mudanças de referência ascendentes e descendentes para a saída $y_2$ em torno do ponto de operação $PO$ . . . . .	61
7.3	Esforço de atuação para uma mudança de referência $y_2$ no ponto de operação $PO_+$ . . . . .	63
7.4	Curvas $q_o \times h$ para diferentes valores de $k$ , confinadas à região de operação do processo. . . . .	64
7.5	Comparação entre o desempenho dos três controladores para uma mudança de amplitude de 1 cm na referência da saída $y_1$ em torno dos pontos de operação $PO_-$ , $PO$ e $PO_+$ . . . . .	66
7.6	Comportamento do sistema durante a passagem pelos pontos de singularidade $x_3 = x_1$ e $x_3 = x_2$ . . . . .	67
7.7	Comparação entre o desempenho dos três controladores para variações de $\pm 10\%$ no parâmetro $k$ do modelo. São considerados degraus de referência de 1 cm para a saída $y_1$ . . . . .	69
7.8	Comparação entre as três técnicas de controle para rejeição de uma perturbação nas saídas $y_1$ e $y_2$ em $t = 0$ . . . . .	70
A.1	Aplicação da equação de Bernoulli a um tanque . . . . .	77

# Lista de Símbolos

Símbolo	Descrição
$A$	área da seção transversal do tanque [cm <sup>2</sup> ]
$(A, B, C, D)$	matrizes do modelo de pequenos sinais do processo
$C$	capacitância do tanque [cm <sup>2</sup> ]
$G(s)$	matriz de transferência do sistema
$G_1(s)$	função de transferência do sistema de primeira ordem
$G_2(s)$	função de transferência do sistema de segunda ordem
$h$	altura do nível de água no tanque [cm]
$(\bar{H}, \bar{Q})$	ponto de operação do processo
$I$	matriz identidade
$k$	constante do modelo [cm <sup>2.5</sup> /s]
$K$	matriz de realimentação de estados
$K_P$	ganho proporcional do controlador PID
$L$	matriz de atuação
$L_f h(x)$	derivada de $h$ ao longo de $f$
$m$	massa de água no tanque [Kg]
$M_p$	sobre-sinal máximo
$q_i$	vazão volumétrica de entrada [cm <sup>3</sup> /s]
$q_o$	vazão volumétrica de saída [cm <sup>3</sup> /s]
$r$	grau relativo
$R$	resistência da válvula [s/cm <sup>2</sup> ]
$\rho$	massa específica da água [Kg/cm <sup>3</sup> ]
$t_r$	tempo de subida
$t_s$	tempo de acomodação
$T_D$	constante de tempo derivativa do controlador PID
$T_F$	constante de tempo do filtro passa-baixa do controlador PID
$T_I$	constante de tempo integral do controlador PID
$\tau$	constante de tempo do modelo de primeira ordem
$u$	vetor de entrada
$U$	matriz de controlabilidade
$V$	volume de água no tanque [cm <sup>3</sup> ]
$x$	vetor de estados
$y$	vetor de saída
$\omega_i$	vazão mássica de entrada [Kg/s]
$\omega_n$	frequência natural não-amortecida
$\omega_o$	vazão mássica de saída [Kg/s]
$\zeta$	fator de amortecimento

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

O interesse por técnicas de controle multivariável tem crescido nos últimos anos [14]. Entretanto, nem sempre é fácil determinar quando esses métodos compensam o maior esforço computacional e trazem, de fato, melhor desempenho que estruturas mais simples de controle.

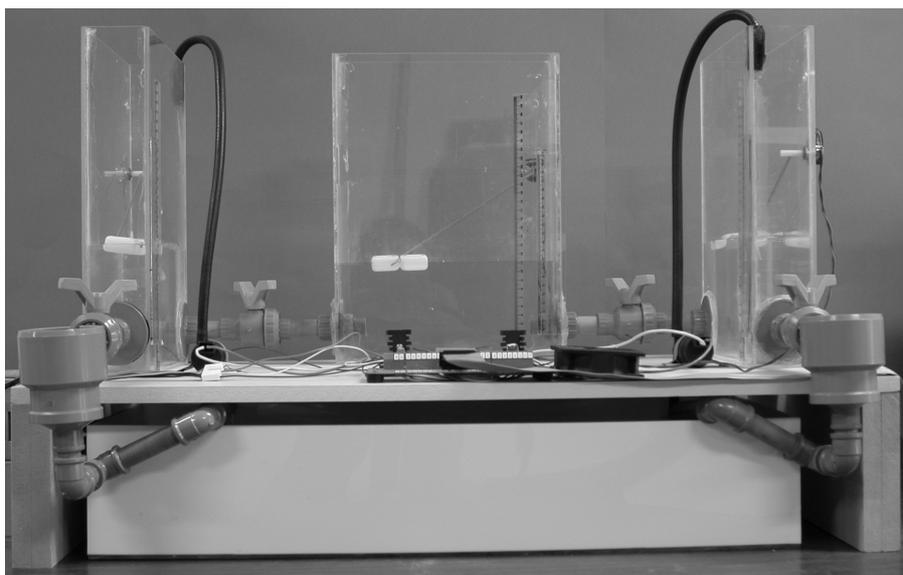
Este trabalho descreve um processo de tanques acoplados, em escala de laboratório, que foi construído para servir de plataforma para a implementação e avaliação de diferentes estratégias de controle em um processo multivariável não-linear.

O processo de tanques acoplados é bastante adequado para ser utilizado neste tipo de estudo, basicamente por dois motivos: primeiro, porque é bastante comum em escala industrial, principalmente nos ramos químico, petroquímico, de celulose e de alimentos [10]; e segundo, porque é de fácil construção e de modelagem relativamente simples, permitindo que diferentes controladores possam ser projetados, implementados e testados de forma rápida e eficiente.

Uma das principais motivações do trabalho foi o desejo de implementar um processo real que pudesse contribuir para a melhor estruturação do Laboratório de Automação, Visão e Sistemas Inteligentes, LAVSI. Nesse sentido, uma das mais importantes contribuições foi a construção de um ambiente completo para o desenvolvimento de atividades de pesquisa e de ensino na área de controle de processos multivariáveis.

## 1.1 ESCOPO DO TRABALHO

O processo estudado consiste de três tanques de água interconectados e de duas moto-bombas, como ilustra a Figura 1.1. As entradas do processo são as vazões das duas moto-bombas e as saídas são as alturas dos níveis de água nos três tanques. A dinâmica é nitidamente não-linear, uma vez que as vazões nos tanques dependem da raiz quadrada das alturas dos níveis de água.



**Figura 1.1:** Foto do processo de tanques acoplados

Nesse tipo de processo, onde os níveis devem ser mantidos em valores predeterminados para garantir o seu funcionamento eficiente, tem-se dois problemas: o da **regulação**, ou seja, referência fixa e rejeição de perturbação, onde muitas vezes o processo é levado manualmente até o ponto de operação; e o de **seguimento de trajetória**, onde ocorrem mudanças constantes de referência. Neste trabalho são abordados os dois problemas.

Para garantir que o nível nos tanques seja mantido nos valores desejados, diferentes estratégias de controle podem ser utilizadas. Neste trabalho são testadas e comparadas três técnicas distintas de controle.

Primeiramente, é utilizado um controlador clássico PID (proporcional, integral, derivativo), que apesar de ser um controlador monovariável será aplicado ao controle de cada sub-sistema isoladamente. O controlador PID corresponde à maior parte dos controladores utilizados na indústria.

A segunda técnica utilizada é a de controle no espaço-de-estados, que permite levar em conta o fato do sistema ser multivariável. Essa técnica, entretanto, é essencialmente linear, exigindo que seja utilizado um modelo linear do processo em torno de um ponto de operação.

Essas duas técnicas não consideram as não-linearidades do processo, exigindo que os parâmetros dos controladores sejam ajustados para cada ponto de operação. Para contornar essa restrição é utilizada a técnica da linearização exata. Nesse caso, inicialmente, é realizada uma compensação não-linear que cancela as não-linearidades e o acoplamento do processo, e só então, é projetado um controlador linear para o sistema pré-compensado. A idéia deste trabalho é explorar a utilização da linearização exata como técnica de controle que garanta desempenho em uma larga faixa de operação desse tipo de processo.

É importante observar que, como em todo sistema físico real, há presença de restrições no processo: vazão limitada nas bombas e nível limitado nos tanques. Entretanto, não são consideradas técnicas de controle com tratamento ativo das restrições, que evitem por exemplo, que o líquido nos tanques transborde.

Toda a estrutura física do sistema (tanques, sensores e atuadores) foi montada no ambiente do LAVSI. Foram desenvolvidos também os projetos da eletrônica de condicionamento de sinal dos sensores e da eletrônica de potência para acionamento dos atuadores. Os controladores foram implementados em um computador dotado de uma placa de aquisição de dados. Todas as rotinas para interface com o hardware do processo também foram desenvolvidas.

Para utilizar o ambiente, basta que o usuário implemente o seu algoritmo de controle, sem se preocupar com o acesso ao hardware, pois funções específicas para a leitura dos níveis e o comando das bombas estão disponíveis. Isso permite que diversas técnicas de controle possam ser testadas e os seus desempenhos comparados.

## 1.2 METODOLOGIA

Como será deduzido no capítulo seguinte, o processo estudado é multivariável e não-linear, apresentando 3 estados (níveis nos tanques) e duas entradas (vazões nas bombas). É sabido que num sistema multivariável com  $m$  entradas, é possível controlar, ao mesmo tempo, no máximo  $m$  saídas. Por essa razão, serão consideradas como saídas do processo o nível do tanque da extremidade esquerda e o nível do tanque intermediário.

Como o objetivo do trabalho é comparar o desempenho de diferentes técnicas de controle, a metodologia utilizada será a seguinte:

1. Será obtido, analiticamente, o modelo não-linear do processo que será validado com dados experimentais;
2. Serão definidas as especificações de controle, que serão as mesmas para todos os controladores;
3. Serão utilizados dois controladores PI, uma para controlar o nível do tanque da extremidade esquerda através da vazão de entrada nesse tanque (sub-sistema de primeira ordem) e outro para controlar o nível do tanque intermediário através da vazão de entrada no tanque da extremidade direita (sub-sistema de segunda ordem). Para tanto, serão desenvolvidos modelos para o processo com apenas um tanque (monotanque) e para o processo com dois tanques acoplados;
4. Para utilizar o controle no espaço-de-estados, será deduzido o modelo multivariável em um ponto de operação do processo de tanques acoplados;
5. Utilizando o modelo não-linear, será deduzida a linearização exata do processo de tanques acoplados;
6. O desempenho dessas três técnicas será comparado através de simulações;
7. Serão realizados testes experimentais no processo real, idênticos aos experimentos simulados.

### **1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Diversos processos envolvendo tanques acoplados são apresentados na literatura, todos eles com construções e aplicações bastante particulares. A seguir, em ordem cronológica, alguns destes trabalhos são revisados.

Grega e Maciejczyk (1994) [11] descrevem um sistema com dois tanques, um superior e outro inferior, onde o primeiro é usado para regular a vazão de entrada no segundo. O tanque inferior possui uma seção transversal variável com o nível, o que causa uma variação na dinâmica da vazão devido a não-linearidades entre o nível e o volume de fluido no tanque, dependendo do ponto de operação. O objetivo é controlar o nível do tanque inferior através da atuação sobre a bomba que alimenta o tanque superior, utilizando um

acionamento a relé e a técnica PWM (*Pulse Width Modulation*). A técnica de modelagem utilizada é a da linearização das equações do sistema em torno de um ponto de operação. São analisadas as influências das não-linearidades do sistema na sensibilidade dos algoritmos de controle dependendo do ponto de operação. Técnicas de controle PID cascata, tempo-mínimo e espaço-de-estados foram testadas, analisando-se mudanças na referência (efeitos de linearização), tempo de amostragem (efeito de discretização) e saturação do termo integrativo (prevenção do efeito *wind-up*). O sistema tem não só fins de pesquisa mas também educacionais, provendo um ambiente onde os estudantes podem realizar o projeto completo de um sistema de controle, desde a modelagem até o teste experimental de diferentes técnicas de controle digital.

Oliveira et. al. (1997) [24] descrevem um processo não-linear com dois tanques interativos construído no Laboratório de Controle de Processos Industriais da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Interessante observar que nesse sistema os dois tanques estão em série e o objetivo é controlar o nível do segundo tanque, onde a vazão de saída não depende da altura, uma vez que existe uma bomba na saída desse tanque. Além disso, o controle da vazão de entrada no primeiro tanque é feito através de uma válvula pneumática, e não diretamente na bomba. A técnica escolhida é o controle neural *gain scheduling*, obtido através do treinamento de controladores lineares para diversos pontos de operação da planta.

Luiz et. al. (1997) [19] apresentam um estudo comparativo experimental de 3 controladores monovariáveis (PI adaptativo, preditivo e *fuzzy*) em uma planta de nível. Esses algoritmos utilizam diferentes técnicas de projeto. A sua aplicação ao mesmo problema de controle permite a avaliação das vantagens e desvantagens de cada uma de acordo com critérios como complexidade computacional, desempenho de rastreamento, variação da saída de controle e efeito de mudanças na dinâmica da planta. O comportamento dinâmico do sistema foi avaliado para mudanças de referência e perturbações de carga.

Gambier e Unbehauen (1999) [9] apresentam resultados da utilização de um controlador preditivo adaptativo generalizado em um sistema multivariável com 3 tanques interconectados. A técnica foi testada em uma planta piloto. A abordagem adaptativa é avaliada para o problema de seguimento de trajetória nos casos em que mudanças de referência levam o sistema para pontos de operação onde o modelo nominal não é válido.

Eker e Malmberg (1999) [7] exploram, através de técnicas de controle híbrido, o problema da necessidade de compromisso entre diferentes objetivos de controle. A estrutura apresentada considera a união do controle PID para regulação em regime permanente com o controle de tempo mínimo para mudanças de referência. A estratégia é implementada

em um processo que consiste de dois tanques em cascata, onde o objetivo é controlar o nível do tanque inferior através da vazão de entrada no tanque superior. Os resultados apresentam bom desempenho tanto para mudanças de referência como para rejeição de perturbações.

Johansson (1999, 2000) [15, 14] descreve um sistema com quatro tanques utilizado para ilustrar as limitações de desempenho em controladores para sistemas de realimentação multivariáveis, especialmente o efeito de zeros em malha fechada. O sistema foi concebido de forma que sua dinâmica possa passar de fase mínima à fase não-mínima através do ajuste de uma válvula. O sistema foi desenvolvido em 1996 no Instituto Tecnológico de Lund, Suécia, e desde então foi objeto de estudo em diversos projetos envolvendo identificação de sistemas, controle descentralizado e controle ótimo.

Waurajitti et. al. (2000) [33] propõem um controlador *fuzzy* adaptativo para um sistema com dois tanques em cascata. É utilizada a abordagem do controle de modos deslizantes. Os resultados experimentais e de simulação mostram estabilidade, pequeno erro de seguimento de trajetória e rápida convergência do sistema para uma larga faixa de operação.

Ko et. al. (2001) [16] descrevem um sistema com dois tanques acoplados, para fins de ensino e pesquisa, utilizados em um laboratório virtual de controle. Os tanques estão acoplados lateralmente, podendo-se obter diferentes configurações para o sistema variando-se o diâmetro do tubo que os conecta. Quatro tipos de estruturas de controle são implementadas: controle manual (em malha aberta), também usado para coletar dados para a identificação do sistema físico, controle PID, controle no espaço-de-estados e controle *fuzzy*.

Poulsen et. al. (2001) [26] utilizam um sistema com dois tanques acoplados para desenvolver técnicas de controle preditivo sob restrições baseadas em linearização exata. São consideradas restrições nas entradas (limitação na vazão das bombas) e nos estados (limitação na altura dos níveis de líquido nos tanques). O foco do estudo se concentra na utilização da programação linear como ferramenta de otimização, ao invés da programação quadrática, que exige muito esforço computacional, sendo mais adequada para aplicações com taxa de amostragem relativamente baixa. O algoritmo de controle preditivo descrito é aplicado ao sistema real e a sua habilidade para lidar com as restrições nas entradas de controle é comparada com a de um controlador PID *anti-windup*, mostrando melhores resultados. Com relação às restrições nas alturas dos níveis, o controlador preditivo produz boa resposta evitando que o líquido nos tanques transborde.

Dentro da perspectiva do desenvolvimento de um sistema com objetivos educacionais, alguns autores relatam experiências interessantes, constatando que cursos com aulas convencionais e apenas laboratórios de simulação se mostram limitados no estudo dos aspectos práticos de sistemas dinâmicos.

Simas et. al. (1998) [27] descrevem três processos de baixo custo utilizados para experimentos em controle digital na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), onde diferentes técnicas de controle são testadas. O principal objetivo da pesquisa é mostrar que através desses equipamentos é possível transmitir aos estudantes, de forma mais eficiente, os conhecimentos em engenharia de controle, uma vez que esses protótipos são excelentes ferramentas para se investigar por exemplo: os efeitos de não-linearidades no sistema, a influência da sensibilidade nos algoritmos de controle, mudanças de referência e perturbações de carga.

Pereira e Lima (1998) [25] apresentam uma proposta de reestruturação do ensino de automação e controle na Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS) através da implantação de práticas de laboratório. Enfatizam alguns aspectos construtivos relacionados ao desenvolvimento de processos didáticos de baixo custo. Alertam também para o fato de que cursos de engenharia que se limitam a difundir práticas já dominadas pela indústria têm poucas chances de se manterem competitivos no mercado de trabalho por um longo período de tempo, mostrando a necessidade da utilização de experimentos práticos como forma efetiva de fixação dos conceitos teóricos ministrados em sala de aula.

Além desses exemplos brasileiros, inúmeros outros podem ser encontrados na literatura, como por exemplo, nas publicações da *IEEE Transaction on Education* da última década [32], [18], [17], [31], [20], [34], [16].

## 1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está organizado da seguinte forma.

O **Capítulo 2** apresenta a modelagem matemática do processo. O modelo não-linear é obtido de forma analítica e validado com dados experimentais. São obtidos também os modelos do processo linearizados em torno de um ponto de operação, necessários para o projeto dos controladores PI e do controlador no espaço-de-estados. É apresentada também a modelagem dos sensores e dos atuadores e são discutidos alguns aspectos construtivos do processo e do sistema de controle.

No **Capítulo 3** são estabelecidas as especificações para o sistema em malha fechada. Os critérios apresentados nesse capítulo serão utilizados como base para o projeto de todos os controladores utilizados.

Nos **Capítulos 4 e 5** são apresentadas, de forma sintética, as técnicas de controle PID e controle no espaço-de-estados, sendo discutidos os projetos dos controladores para o processo de tanques acoplados.

A técnica da linearização exata é abordada no **Capítulo 6**. Inicialmente, é discutida, de forma genérica, a sua aplicação a sistemas multivariáveis. Em seguida, são estudados os casos do processo monotanque e do processo de tanques acoplados.

No **Capítulo 7** são apresentados resultados de simulações e de testes experimentais obtidos com os diferentes controladores. São avaliados experimentos de mudança de referência, rejeição de perturbação e robustez com relação à variação dos parâmetros do modelo do processo.

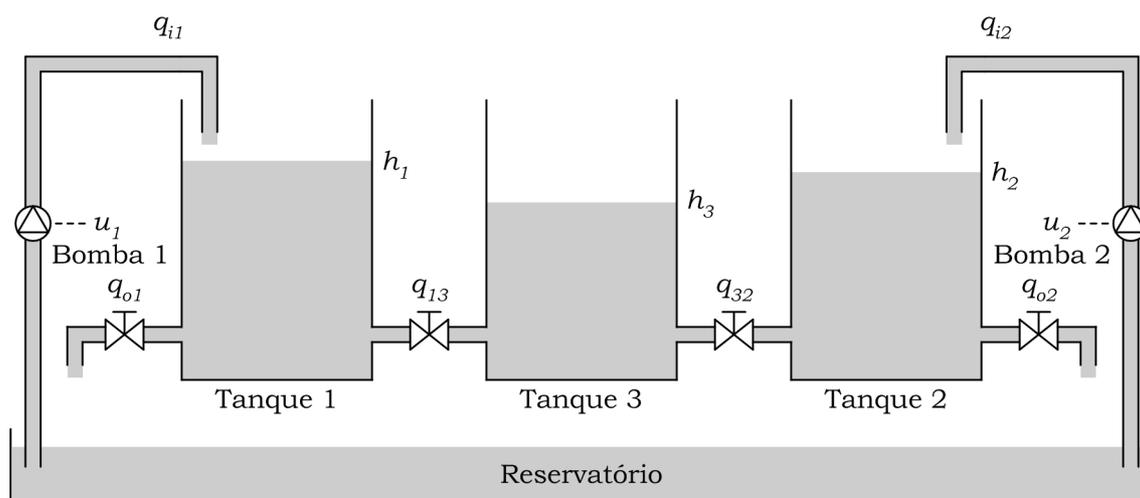
Por fim, o **Capítulo 8** apresenta conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# MODELAGEM MATEMÁTICA

### 2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será desenvolvido o modelo do processo real de tanques acoplados. Esse processo consiste de três tanques, cada um com capacidade de  $4500 \text{ cm}^3$ , acoplados por meio de válvulas como mostra a Figura 2.1. Os tanques 1 e 2, situados nas extremidades, possuem entradas de água, que é bombeada por meio de duas moto-bombas. As moto-bombas são acionadas por meio de um driver de potência comandado a partir de um sinal de tensão entre 0 e 10V. Cada tanque é dotado de um sensor de nível. O objetivo é controlar o nível dos tanques 1 e 3.



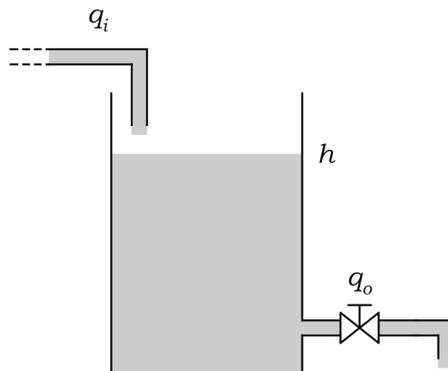
**Figura 2.1:** Diagrama esquemático do processo de tanques acoplados

Para modelar o processo, algumas considerações simplificadoras serão assumidas, de forma semelhante ao encontrado em [1]:

1. O sistema será considerado a parâmetros concentrados. Assim sendo, só será de interesse conhecer algumas variáveis em alguns pontos específicos e não, por exemplo, ao longo de um duto;
2. A perda de carga dentro dos dutos será desprezada;
3. A área da seção transversal do tanque é constante. Observando-se o interior do tanque, percebe-se que essa consideração é, a rigor, incorreta. Entretanto, após um certo nível, a área é de fato constante;
4. As dinâmicas dos sensores e das moto-bombas são muito mais rápidas do que as dinâmicas dos tanques, podendo assim ser desprezadas. Dessa forma, esses elementos serão modelados como sistemas estáticos;
5. A água é incompressível e seu peso específico não varia;
6. A pressão atmosférica em cada ponto do sistema é a mesma.

## 2.2 BALANÇO DE MASSA

Para modelar o processo, serão consideradas as equações que governam o balanço de massa nos tanques, que estabelece que a vazão (mássica) de água que entra menos a que sai é igual à variação de massa no tanque.



**Figura 2.2:** Diagrama esquemático do processo monotanque

Para facilitar o entendimento, será apresentado inicialmente o balanço de massa em apenas um tanque (processo monotanque), como o mostrado na Figura 2.2, em seguida será obtido o modelo completo do processo de tanques acoplados. Para o tanque da Figura 2.2, tem-se

$$\frac{dm}{dt} = \omega_i - \omega_o, \quad (2.1)$$

sendo que  $m$  é a massa de água no tanque, em Kg;  $\omega_i$  e  $\omega_o$  são as vazões mássicas de entrada e saída, respectivamente, em Kg/s. Essas vazões mássicas podem ser convertidas em vazões volumétricas, bastando para isso, observar que a massa de água no tanque é igual ao volume multiplicado pela densidade da água, ou seja,  $m = V\rho$ . Considerando-se a área da seção transversal do tanque constante pode-se escrever

$$m = Ah\rho, \quad (2.2)$$

sendo que  $\rho$  é a massa específica da água em Kg/cm<sup>3</sup>;  $h$  é a altura do nível de água em cm e  $A$  é a área em cm<sup>2</sup>. Substituindo a Equação (2.2) na Equação (2.1), tem-se

$$\begin{aligned} \rho A \frac{dh}{dt} &= q_i \rho - q_o \rho \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{q_i - q_o}{A}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

sendo que  $q_i$  e  $q_o$  são, respectivamente, as vazões volumétricas de entrada e saída, em cm<sup>3</sup>/s.

## 2.3 MODELO NÃO-LINEAR

### 2.3.1 Equações do processo de tanques acoplados

Considerando agora o processo de tanques acoplados mostrado na Figura 2.1, as seguintes variáveis podem ser definidas:

- $q_{i1}$  e  $q_{i2}$  = vazões de entrada nos tanques 1 e 2, respectivamente, [cm<sup>3</sup>/s];
- $q_{13}$  e  $q_{32}$  = vazões entre os tanques 1-3 e 3-2, respectivamente, [cm<sup>3</sup>/s];
- $q_{o1}$  e  $q_{o2}$  = vazões de saída nos tanques 1 e 2, respectivamente, [cm<sup>3</sup>/s];
- $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$  = altura do nível de água nos tanques 1, 2 e 3, respectivamente, [cm].

Calculando o balanço de massa em cada tanque, como na Equação (2.1), tem-se

$$A \frac{dh_1}{dt} = q_{i1} + \text{sinal}(h_3 - h_1)q_{13} - q_{o1}, \quad (2.4)$$

$$A \frac{dh_2}{dt} = q_{i2} + \text{sinal}(h_3 - h_2)q_{32} - q_{o2}, \quad (2.5)$$

$$A \frac{dh_3}{dt} = -\text{sinal}(h_3 - h_1)q_{13} - \text{sinal}(h_3 - h_2)q_{32}, \quad (2.6)$$

onde  $\text{sin}(\cdot)$  é a função que retorna  $-1$  se o sinal do argumento for negativo,  $0$  se for igual a zero e  $1$  se for positivo. Essas são as equações dinâmicas que modelam o processo de tanques acoplados.

### 2.3.2 Parâmetros do modelo

Nas Equações (2.4)-(2.6), o único parâmetro conhecido é a área da seção transversal dos tanques,  $A = 150 \text{ cm}^2$  ( $6 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$ ). É preciso então, determinar as vazões de saída e entre os tanques em função das alturas dos níveis de água nos mesmos.

Para isso, inicialmente, é preciso esclarecer que todas as quatro válvulas do processo foram posicionadas em uma mesma abertura de aproximadamente  $30^\circ$ . Para garantir que as características dinâmicas de todas elas fossem realmente iguais, foram realizados os testes descritos a seguir.

Cada válvula foi acoplada à saída de um monotanque, com água até a altura de  $28 \text{ cm}$ . Obteve-se então a curva de variação da altura de nível de água em função do tempo durante o esvaziamento do tanque. Para garantir que todas as válvulas possuíssem a mesma característica as curvas deveriam ser praticamente iguais. Esse resultado é mostrado na Figura 2.3. As curvas sobrepostas correspondem às respostas dinâmicas das válvulas de saída dos tanques 1 e 2 e das válvulas que interligam os tanques 1-3 e 3-2. Sabendo que todas as válvulas possuem, nas posições ajustadas, a mesma característica, foi determinada a vazão em função da altura do nível de água.

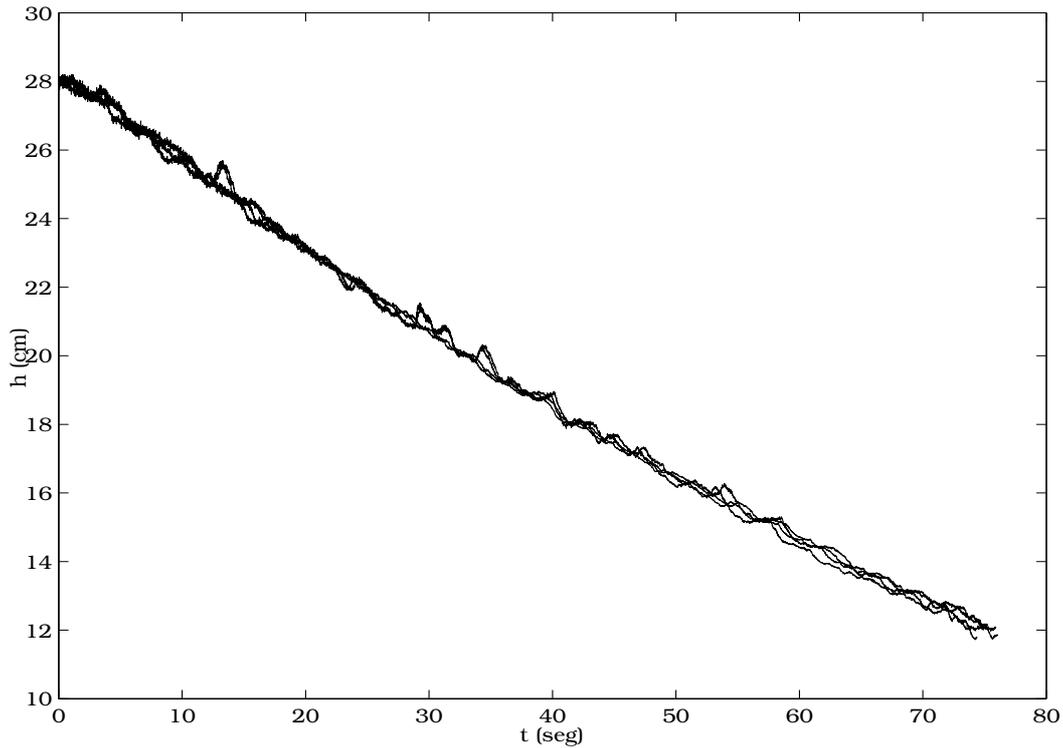
Para isso, foram realizados testes estáticos onde, para uma vazão de entrada conhecida  $q_i$  no monotanque, esperou-se um tempo suficientemente longo para que a altura do nível de água no mesmo ficasse estabilizada. Nessa situação, a vazão de saída  $q_o$  é igual a vazão de entrada conhecida. Os resultados são apresentados na Tabela 2.1.

**Tabela 2.1:** Resultado dos testes estáticos

$q_i$ ( $\text{cm}^3/\text{s}$ )	10	15	20	25	30	35	40	45
$h$ (cm)	1.5	3.5	6.2	9.1	12.7	16.8	20.9	25.5

Resta então determinar a relação entre a vazão  $q_o$  e a altura  $h$  no tanque. Sabe-se pela Equação de Bernoulli (vide Apêndice A) que a vazão é dada por

$$q_o = k\sqrt{h},$$



**Figura 2.3:** Característica dinâmica das válvulas

onde  $k$  [ $\text{cm}^{2.5}/\text{s}$ ], dependendo do tipo de escoamento, pode ou não variar. Devido às condições simplificadoras assumidas anteriormente, considerou-se  $k$  constante. O seu valor teórico depende do coeficiente de descarga do escoamento, da área da seção transversal do tanque, da área do orifício de saída e também da aceleração da gravidade. Para o processo em questão, o valor de  $k$  foi determinado de forma experimental utilizando-se o método dos quadrados mínimos [1, 29], resultando em:

$$q_o = 8.2094\sqrt{h}.$$

A Figura 2.4 mostra os pontos experimentais e a curva ajustada.

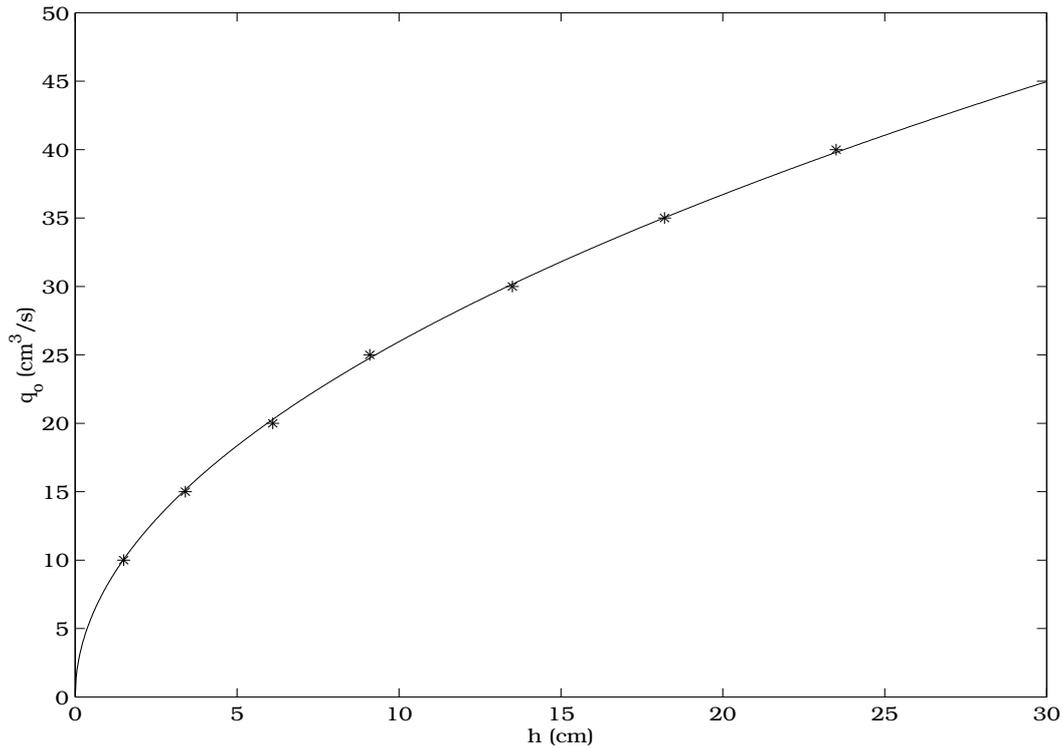
De posse da equação que relaciona a vazão nos tanques em função de  $h$  e sabendo que todas as válvulas possuem a mesma característica dinâmica, é possível determinar as vazões do processo como:

$$q_{o1} = k\sqrt{h_1}, \quad (2.7)$$

$$q_{o2} = k\sqrt{h_2}, \quad (2.8)$$

$$q_{13} = k\sqrt{|h_3 - h_1|}, \text{ e} \quad (2.9)$$

$$q_{32} = k\sqrt{|h_3 - h_2|}. \quad (2.10)$$



**Figura 2.4:** Vazão de saída no processo monotaque

Determinadas as vazões do processo, pode-se reescrever as Equações (2.4)-(2.6), obtendo-se o modelo completo do processo de tanques acoplados:

$$A \frac{dh_1}{dt} = q_{i1} + \text{senal}(h_3 - h_1)k\sqrt{|h_3 - h_1|} - k\sqrt{h_1}, \quad (2.11)$$

$$A \frac{dh_2}{dt} = q_{i2} + \text{senal}(h_3 - h_2)k\sqrt{|h_3 - h_2|} - k\sqrt{h_2}, \quad (2.12)$$

$$A \frac{dh_3}{dt} = -\text{senal}(h_3 - h_1)k\sqrt{|h_3 - h_1|} - \text{senal}(h_3 - h_2)k\sqrt{|h_3 - h_2|}. \quad (2.13)$$

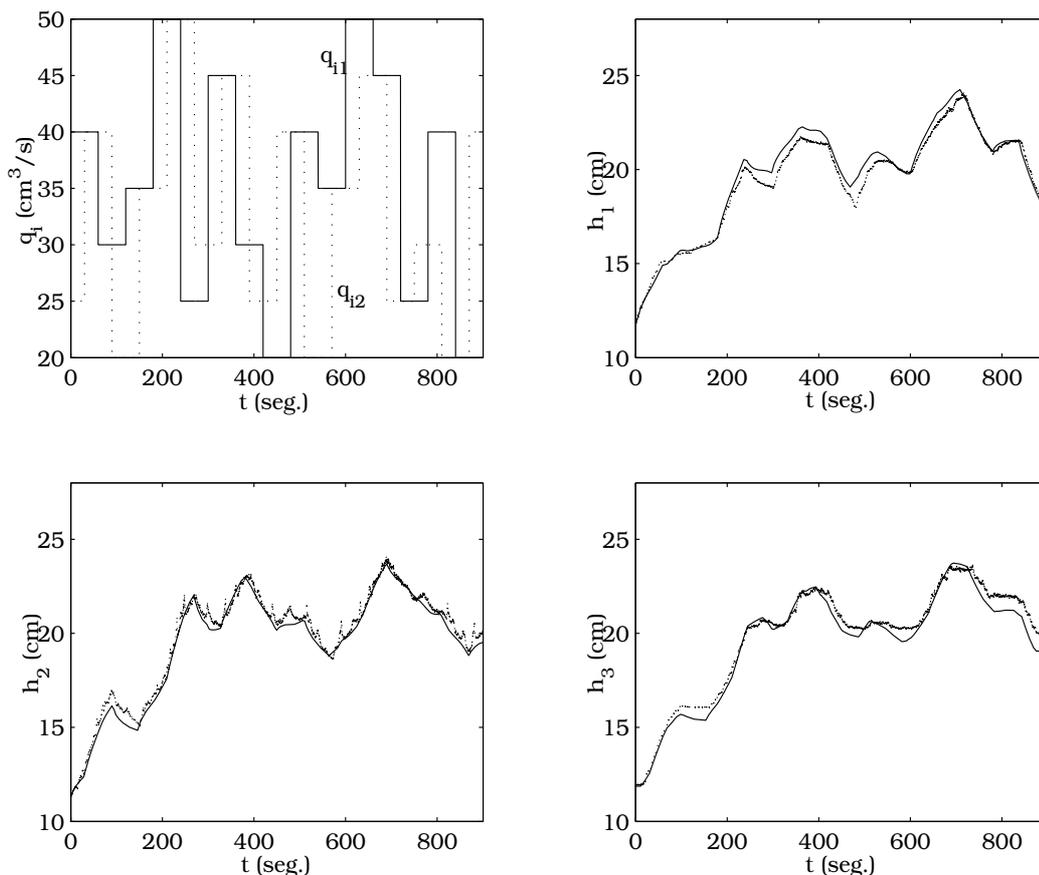
### 2.3.3 Validação do modelo

Para validar o modelo obtido, foram utilizados sinais de entrada do tipo pseudo-randômicos. Esses sinais foram aplicados ao processo, medindo-se os sinais de saída, que, posteriormente, foram comparados com os resultados das simulações utilizando o modelo obtido para o processo. Os resultados podem ser vistos na Figura 2.5. O gráfico superior esquerdo apresenta o sinal de entrada utilizado e os demais gráficos mostram as respostas obtidas nos testes experimentais (pontilhado) e simulações (contínuo).

É importante ressaltar que foram realizados três tipos de testes. No primeiro manteve-se constante uma das entradas fazendo a outra variar de forma pseudo-randômica. No

segundo repetiu-se o procedimento invertendo-se as entradas. No último teste foram utilizados dois sinais pseudo-randômicos, um para cada entrada, sendo que os instantes de mudança de patamar em ambos foram defasados de forma a evitar que houvesse ambigüidade nos resultados.

Foram utilizados sinais com 900 segundos sendo que o tempo mínimo de permanência em cada patamar era de 60 segundos.



**Figura 2.5:** Validação do modelo do processo para  $k = 8.2094$

Esse modelo do processo obviamente contém imprecisões, que podem ser atribuídas por exemplo, ao fato de que as válvulas têm características ligeiramente distintas, ou ainda, ao fato de não estar sendo considerada a perda de carga nos dutos. Como o foco principal do trabalho não é a identificação do sistema, essas imprecisões do modelo deverão ser compensadas pelos controladores.

## 2.4 MODELO DE PEQUENOS SINAIS

O processo de obtenção do modelo de pequenos sinais é baseado na expansão de uma função não-linear em uma série de Taylor em torno de um ponto de operação, retendo-se apenas o termo linear [10, 23]. Pelo fato de serem desprezados os termos de ordem superior da série de Taylor, esses devem ser suficientemente pequenos, ou seja, as variáveis devem permanecer próximas do ponto de operação.

Antes de realizar a linearização do modelo do processo, é interessante definir as noções de resistência e capacitância de sistemas de nível de líquido<sup>1</sup>, apresentadas em [22].

Considerando a vazão através de um tubo interligando dois tanques, é possível definir a resistência  $R$  à vazão, como sendo a variação na diferença de nível nos dois tanques necessária para causar uma variação unitária na vazão, ou seja,

$$R = \frac{\text{variação na diferença de nível, [cm]}}{\text{variação na vazão, [cm}^3\text{/s]}}.$$

Já a capacitância  $C$  de um tanque pode ser definida como sendo a variação na quantidade de líquido necessária para causar uma variação unitária no potencial (altura do nível do líquido), ou seja,

$$C = \frac{\text{variação no líquido armazenado, [cm}^3\text{]}}{\text{variação na altura do nível, [cm]}}.$$

Assim, a capacitância de um tanque é igual à área da sua seção transversal.

### 2.4.1 Modelo do processo considerando apenas um tanque

Para controlar o nível  $h_1$  através da entrada  $q_{i1}$  será considerado o modelo linearizado em torno de um ponto de operação do processo com apenas um tanque, como mostra a Figura 2.6. Assim, a vazão  $q_{13}$  será considerada como uma perturbação.

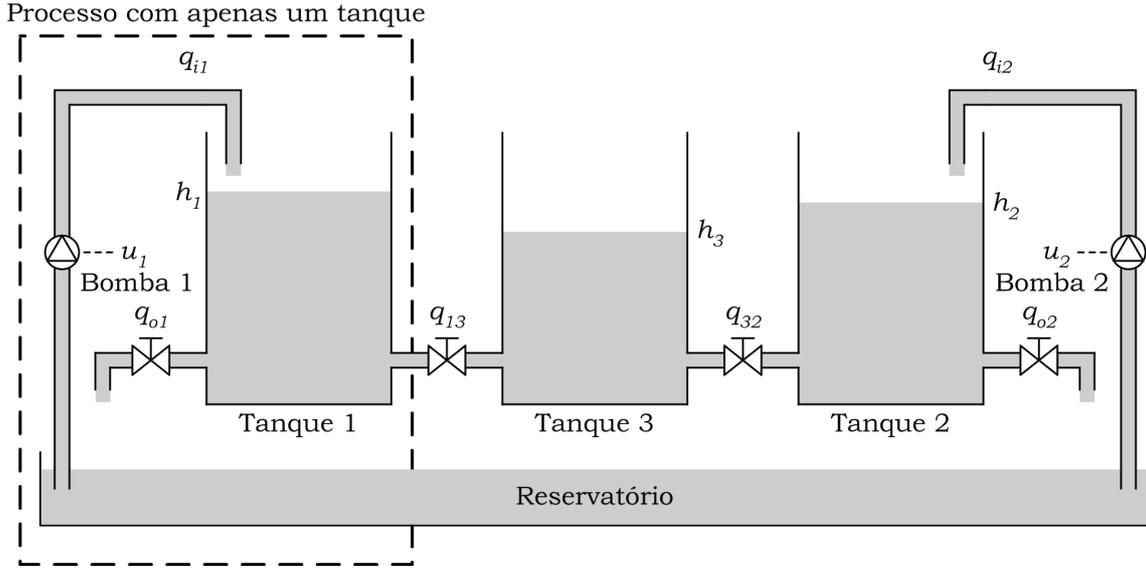
Em regime permanente, a vazão de entrada será igual à vazão de saída e a altura do nível será constante, ou seja,  $Q_{i1} = Q_{o1} = \bar{Q}$  e  $H_1 = \bar{H}$ .

Sabendo que,

$$Q_{o1} = k\sqrt{H_1}$$

---

<sup>1</sup>Esta notação é interessante pois permite que se faça uma analogia com os sistemas elétricos.



**Figura 2.6:** Diagrama esquemático do processo considerando apenas um tanque

pode-se escrever

$$C \frac{dH_1}{dt} = Q_{i1} - Q_{o1} = Q_{i1} - k\sqrt{H_1},$$

onde  $C$  é a capacitância do tanque e  $k$  é a constante descrita na Seção 2.3.2.

A equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{C}Q_{i1} - \frac{1}{C}k\sqrt{H_1} = f(H_1, Q_{i1}) \quad (2.14)$$

Assumindo que o sistema opera próximo da condição de regime permanente  $(\bar{H}, \bar{Q})$ , ou seja,  $H_1 = \bar{H} + h_1$  e  $Q_{i1} = \bar{Q} + q_{i1}$ , onde  $h_1$  e  $q_{i1}$  são pequenas quantidades (positivas ou negativas) e sabendo que em regime permanente  $\frac{dH_1}{dt} = 0$ , ou seja,  $f(\bar{H}, \bar{Q}) = 0$ , pode-se linearizar a Equação (2.14) em torno do ponto de operação  $(\bar{H}, \bar{Q})$ , obtendo-se

$$\frac{dH_1}{dt} - f(\bar{H}, \bar{Q}) = \frac{\partial f}{\partial H_1}(H_1 - \bar{H}) + \frac{\partial f}{\partial Q_{i1}}(Q_{i1} - \bar{Q}), \quad (2.15)$$

onde

$$f(\bar{H}, \bar{Q}) = 0$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial H_1} \right|_{H_1=\bar{H}, Q_{i1}=\bar{Q}} = -\frac{k}{2C\sqrt{\bar{H}}} = -\frac{\bar{Q}}{\sqrt{\bar{H}}} \frac{1}{2C\sqrt{\bar{H}}} = -\frac{1}{R_1 C},$$

onde  $R_1$  é a resistência de saída no tanque 1, definida por:

$$R_1 = \frac{2\sqrt{\bar{H}}}{k} = \frac{2\bar{H}}{\bar{Q}}.$$

Além disso,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial Q_{i1}} \right|_{H_1=\bar{H}, Q_{i1}=\bar{Q}} = \frac{1}{C}.$$

Logo, pode-se escrever a Equação (2.15) como

$$\frac{dH_1}{dt} = -\frac{1}{R_1 C}(H_1 - \bar{H}) + \frac{1}{C}(Q_{i1} - \bar{Q}).$$

Como  $H_1 - \bar{H} = h_1$  e  $Q_{i1} - \bar{Q} = q_{i1}$ , a equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{1}{R_1 C}h_1 + \frac{1}{C}q_{i1}$$

ou ainda

$$R_1 C \frac{dh_1}{dt} + h_1 = R_1 q_{i1}$$

que é a equação do modelo linearizado para o processo monotanque (modelo de pequenos sinais), onde  $q_{i1}$  é considerada a entrada e  $h_1$  é a saída. Aplicando-se a Transformada de Laplace obtém-se a seguinte função de transferência para o modelo de pequenos sinais:

$$\frac{H_1(s)}{Q_{i1}(s)} = \frac{R_1}{R_1 C s + 1}. \quad (2.16)$$

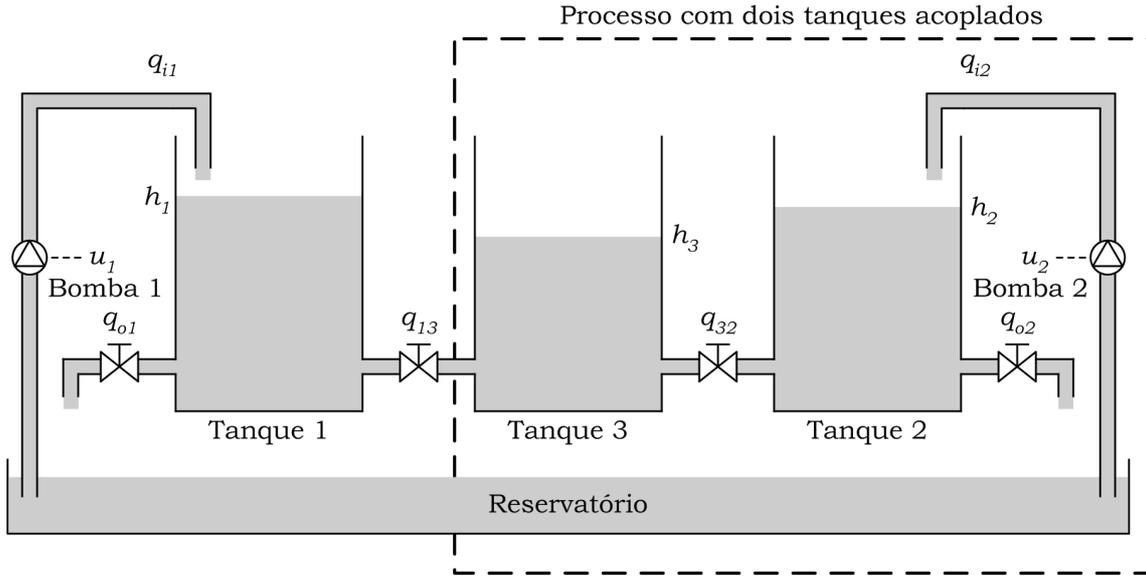
## 2.4.2 Modelo do processo considerando dois tanques acoplados

Para controlar o nível  $h_3$  através da entrada  $q_{i2}$  será considerado o modelo linearizado em torno de um ponto de operação do processo com dois tanques acoplados, como mostra a Figura 2.7. A vazão  $q_{13}$  será considerada como uma perturbação.

Considerando o processo mostrado na Figura 2.7, em regime permanente a vazão de entrada é igual a vazão de saída, a vazão entre os tanques é zero e a altura dos níveis nos dois tanques são iguais, ou seja,  $Q_{i2} = Q_{o2} = \bar{Q}$ ,  $H_2 = H_3 = \bar{H}$  e  $Q_{32} = 0$ .

Assumindo uma mudança na vazão de entrada de  $\bar{Q}$  para  $\bar{Q} + q_{i2}$ , onde  $q_{i2}$  é pequena, as mudanças nos níveis ( $h_2$  e  $h_3$ ) e nas vazões ( $q_{32}$  e  $q_{o2}$ ) também serão pequenas. Sabendo que  $C$  é a capacitância dos tanques, que  $R_{32}$  é a resistência entre os tanques 3 e 2 e que  $R_2$  é a resistência de saída no tanque 2, pode-se aplicar o mesmo procedimento de linearização da seção anterior. Nesse caso, para o tanque 3, tem-se as seguintes equações

$$C \frac{dh_3}{dt} = q_{32}$$



**Figura 2.7:** Diagrama esquemático do processo considerando dois tanques acoplados

onde

$$q_{32} = \frac{h_2 - h_3}{R_{32}},$$

logo

$$R_{32}C \frac{dh_3}{dt} + h_3 = h_2. \quad (2.17)$$

Para o tanque 2 tem-se

$$C \frac{dh_2}{dt} = q_{i2} - q_{32} - q_{o2}$$

onde

$$q_{32} = \frac{h_2 - h_3}{R_{32}} \text{ e } q_{o2} = \frac{h_2}{R_2},$$

logo

$$R_2C \frac{dh_2}{dt} + \frac{R_2}{R_{32}}h_2 + h_2 = R_2q_{i2} + \frac{R_2}{R_{32}}h_3. \quad (2.18)$$

Eliminando  $h_2$  das Equações (2.17) e (2.18) tem-se

$$R_{32}R_2C^2 \frac{d^2h_3}{dt^2} + C(R_{32} + 2R_2) \frac{dh_3}{dt} + h_3 = R_2q_{i2},$$

que é a equação do modelo linearizado do processo com dois tanques acoplados, onde  $q_{i2}$  é considerada a entrada e  $h_3$  a saída. Em termos de pequenos sinais tem-se a seguinte função de transferência:

$$\frac{H_3(s)}{Q_{i2}(s)} = \frac{R_2}{R_{32}R_2C^2s^2 + C(R_{32} + 2R_2)s + 1}. \quad (2.19)$$

### 2.4.3 Modelo no espaço-de-estados do processo com três tanques acoplados

Considerando agora o processo com os 3 tanques acoplados, será feita a linearização em torno do ponto de operação  $(\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3, \bar{Q}_{i1}, \bar{Q}_{i2})$ . Definindo-se as seguintes variáveis de estado:

$$x_1 = h_1 - \bar{H}_1, \quad x_2 = h_2 - \bar{H}_2, \quad x_3 = h_3 - \bar{H}_3,$$

pode-se, utilizando a definição de resistência apresentada anteriormente, escrever as vazões no sistema como sendo

$$q_{13} = \frac{x_1 - x_3}{R_{13}}, \quad (2.20)$$

$$q_{32} = \frac{x_2 - x_3}{R_{32}}, \quad (2.21)$$

$$q_{o1} = \frac{x_1}{R_1}, \quad (2.22)$$

$$q_{o2} = \frac{x_2}{R_2}, \quad (2.23)$$

onde  $R_{13}$  é a resistência entre os tanques 1 e 3,  $R_{32}$  é a resistência entre os tanques 3 e 2,  $R_1$  é a resistência de saída no tanque 1 e  $R_2$  é a resistência de saída no tanque 2.

Estas resistências são dadas por

$$R_{13} = \frac{2\sqrt{|\bar{H}_3 - \bar{H}_1|}}{k},$$

$$R_{32} = \frac{2\sqrt{|\bar{H}_3 - \bar{H}_2|}}{k},$$

$$R_1 = \frac{2\sqrt{\bar{H}_1}}{k},$$

$$R_2 = \frac{2\sqrt{\bar{H}_2}}{k},$$

e resultam do processo de linearização do modelo.

Substituindo as Equações (2.20)-(2.23) em (2.4)-(2.6), fazendo  $C = A$  e definindo as variáveis

$$u_1 = q_{i1} - \bar{Q}_{i1}, \quad u_2 = q_{i2} - \bar{Q}_{i2},$$

tem-se

$$\begin{aligned} C \frac{dx_1}{dt} &= u_1 + \frac{x_3 - x_1}{R_{13}} - \frac{x_1}{R_1} = u_1 + \frac{x_3}{R_{13}} - \frac{x_1}{R_{13}} - \frac{x_1}{R_1} \\ C \frac{dx_2}{dt} &= u_2 + \frac{x_3 - x_2}{R_{32}} - \frac{x_2}{R_2} = q_{i2} + \frac{x_3}{R_{32}} - \frac{x_2}{R_{32}} - \frac{x_2}{R_2} \\ C \frac{dx_3}{dt} &= \frac{x_1 - x_3}{R_{13}} - \frac{x_3 - x_2}{R_{32}} = \frac{x_1}{R_{13}} - \frac{x_3}{R_{13}} - \frac{x_3}{R_{32}} + \frac{x_2}{R_{32}} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{C} \left( u_1 - \frac{(R_1 + R_{13})}{R_1 R_{13}} x_1 + \frac{x_3}{R_{13}} \right) \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{C} \left( u_2 - \frac{(R_2 + R_{32})}{R_2 R_{32}} x_2 + \frac{x_3}{R_{32}} \right) \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{C} \left( \frac{x_1}{R_{13}} + \frac{x_2}{R_{32}} - \frac{(R_{13} + R_{32})}{R_{13} R_{32}} x_3 \right),\end{aligned}$$

que representado na forma abaixo,

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u \end{cases}$$

resulta em

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} \frac{R_1 + R_{13}}{R_1 R_{13}} & 0 & \frac{1}{C R_{13}} \\ 0 & -\frac{1}{C} \frac{R_2 + R_{32}}{R_2 R_{32}} & \frac{1}{C R_{32}} \\ \frac{1}{C R_{13}} & \frac{1}{C R_{32}} & -\frac{1}{C} \frac{(R_{13} + R_{32})}{R_{13} R_{32}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Para manter coerência com a abordagem utilizada para as funções de transferência, o sistema acima será desmembrado em dois sub-sistemas, um de primeira ordem e outro de segunda ordem, o que significa considerar  $R_{13} \rightarrow \infty$ .

O sub-sistema de primeira ordem é representado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1 C} x_1 + \frac{1}{C} u_1 \\ y_1 = x_1 \end{cases}$$

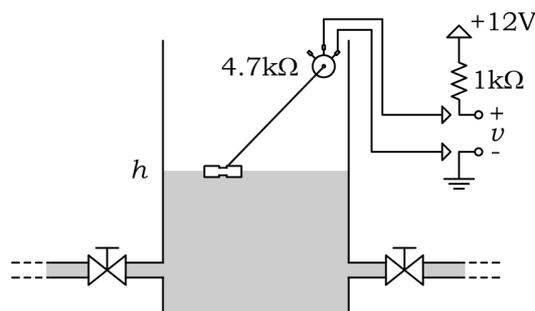
e o sub-sistema de segunda ordem por:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} \frac{R_2 + R_{32}}{R_2 R_{32}} & \frac{1}{C R_{32}} \\ \frac{1}{C R_{32}} & -\frac{1}{C} \frac{(R_{13} + R_{32})}{R_{13} R_{32}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u_2 \\ y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u_2 \end{cases}$$

## 2.5 MODELO DOS SENSORES E DOS ATUADORES

### 2.5.1 Sensores de nível

Os sensores de nível instalados nos três tanques são construídos com potenciômetros lineares de valor nominal  $4.7\text{k}\Omega$ . No cursor de cada potenciômetro está acoplada uma haste metálica com uma bóia na extremidade, como mostra a Figura 2.8.



**Figura 2.8:** Montagem do sensor de nível

Os potenciômetros estão ligados em série com um resistor de  $1\text{k}\Omega$ , numa configuração divisor de tensão, com alimentação de  $+12\text{V}$ . A tensão  $v$  sobre cada potenciômetro (sensor) é relacionada à altura do nível de água no tanque. A faixa de operação é de  $0\text{-}16\text{ cm}$ .

Para modelar a característica dos sensores foi considerada uma relação estática entre as variações de nível no tanque e de tensão no divisor, ou seja, variações no nível produzem variações instantâneas na tensão  $v$ . É claro que os sensores possuem uma dinâmica interna, entretanto, como essa dinâmica é muito mais rápida do que a dinâmica de cada tanque, é possível considerar que os sensores respondem instantaneamente.

O levantamento da característica  $h\text{ (cm)} \times v\text{ (Volts)}$  de cada sensor, foi realizado através de um procedimento de calibração onde, para cada nível entre  $0\text{ cm}$  e  $16\text{ cm}$ , com intervalo de  $0.5\text{ cm}$ , foi medida a tensão correspondente na entrada analógico-digital da placa de aquisição de dados, tanto na subida quanto na descida. A razão para se levantar curvas nas duas direções se justifica pela necessidade de se determinar a existência de histerese na resposta do sensor. Para as calibrações realizadas, observou-se que os sensores apresentavam uma histerese desprezível.

Dessa forma, escolheu-se determinar a característica do sensor através da curva de descida que, do ponto de vista prático, é mais fácil e rápida de ser levantada. A partir dos

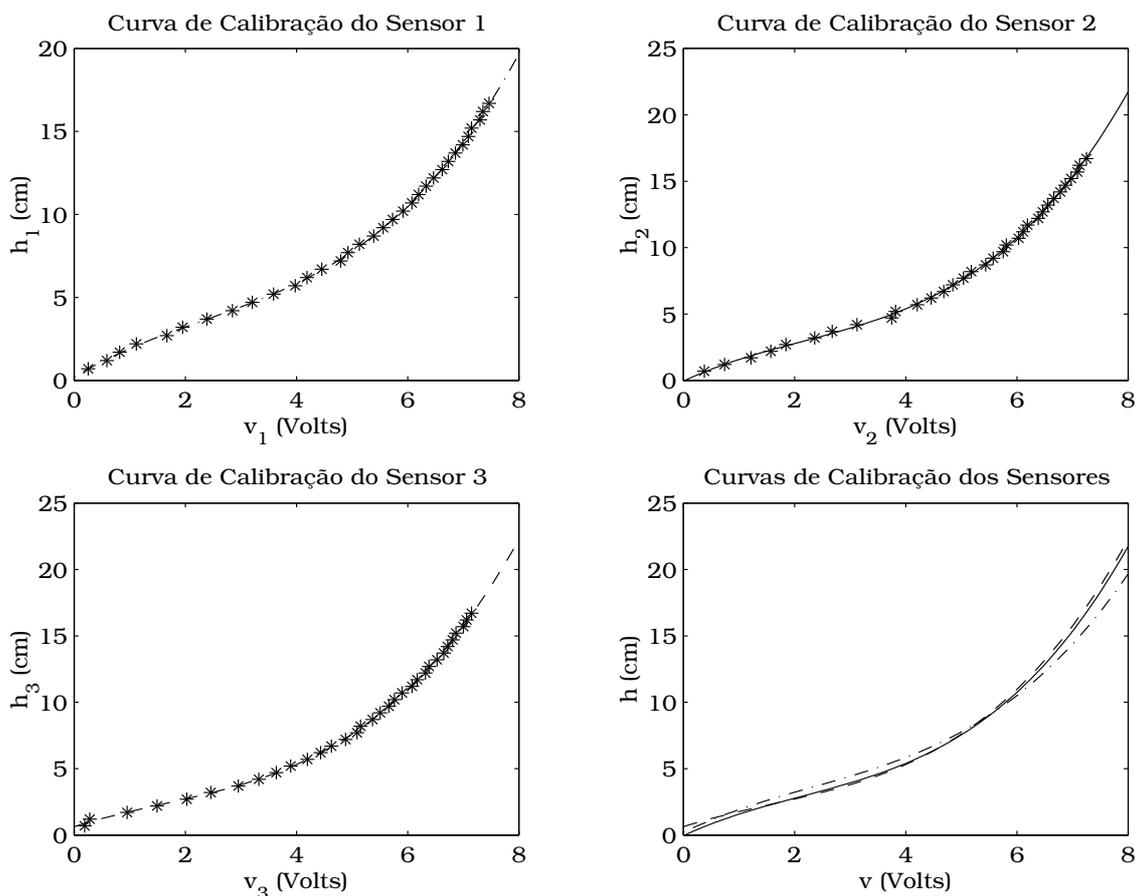
pontos medidos foi calculado o polinômio que melhor se adequava à curva que, no caso dos sensores utilizados, foi de grau 3. Obteve-se então, as expressões abaixo, onde  $h_i$  é a altura do nível no tanque  $i$  e  $v_i$  é a tensão no divisor para o sensor  $i$ , para  $i = 1, 2$  e  $3$ .

$$h_1 = 7.41 \times 10^{-10}v_1^3 - 2.12 \times 10^{-6}v_1^2 + 4.92 \times 10^{-3}v_1 - 0.21, \quad (2.24)$$

$$h_2 = 8.87 \times 10^{-10}v_2^3 - 2.33 \times 10^{-6}v_2^2 + 4.76 \times 10^{-3}v_2 - 0.05, \quad (2.25)$$

$$h_3 = 7.73 \times 10^{-10}v_3^3 - 1.52 \times 10^{-6}v_3^2 + 3.28 \times 10^{-3}v_3 - 0.62. \quad (2.26)$$

A Figura 2.9 mostra as curvas de calibração dos três sensores. Os asteriscos (\*) assinalam os pontos levantados durante o processo de calibração e os traços assinalam as curvas obtidas através do método dos quadrados mínimos [1, 29]. A curva traçada-pontilhada ( $-\cdot-$ ) representa o sensor 1, a curva contínua ( $-$ ) o sensor 2 e a curva tracejada ( $--$ ) o sensor 3.



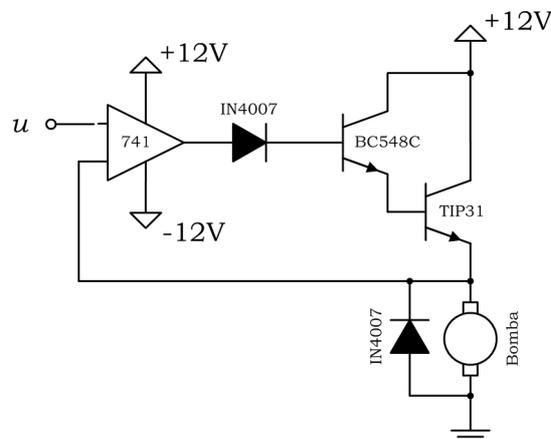
**Figura 2.9:** Curvas de calibração dos sensores de nível

## 2.5.2 Moto-bombas

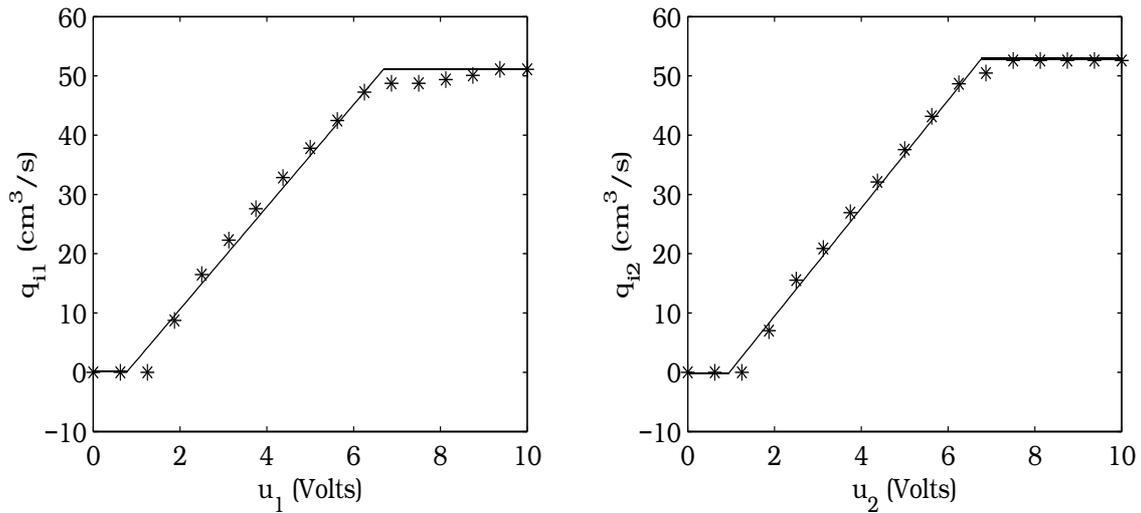
Os dois atuadores do sistema são duas moto-bombas que funcionam com tensão entre 0-10V. O acionamento das moto-bombas é realizado através de um circuito de potência, que é comandado através das saídas digitais-analógicas da placa de aquisição de dados. A Figura 2.10 mostra o diagrama esquemático desse circuito.

Da mesma forma, como no caso dos sensores de nível, considerou-se que a dinâmica das duas moto-bombas é muito mais rápida do que a dinâmica dos tanques, podendo assim ser desprezada no processo de modelagem. Deseja-se então, escrever a vazão nas moto-bombas em função da tensão aplicada no circuito de acionamento, ou seja,  $q = g(u)$ , onde  $u$  é o sinal de comando na faixa de 0-10V. Para identificar a função  $g(\cdot)$  foram realizados testes onde aplicava-se um sinal fixo de tensão na entrada do circuito de acionamento e media-se o tempo necessário para que um determinado volume fosse preenchido, calculando-se assim a vazão média na moto-bomba para a tensão dada. A Figura 2.11 mostra as curvas de calibração das duas moto-bombas. Os asteriscos (\*) indicam os pontos experimentais obtidos. Observa-se que existe uma saturação no seu comportamento. Abaixo de um determinado valor de tensão, não existe vazão na bomba, e acima de um determinado valor, a vazão permanece constante e igual à vazão máxima. As expressões que modelam a vazão nas moto-bombas fora da faixa de saturação são as seguintes:

$$\begin{aligned} q_{i1} &= 8.6312u_1 - 6.6398 & 0.8 \text{ V} < u_1 < 6.7 \text{ V} \\ q_{i2} &= 9.1068u_2 - 8.7616 & 0.95 \text{ V} < u_2 < 6.8 \text{ V} \end{aligned}$$



**Figura 2.10:** Diagrama esquemático do circuito de acionamento das moto-bombas



**Figura 2.11:** Curvas de calibração das moto-bombas

## 2.6 ASPECTOS DE IMPLEMENTAÇÃO

Nesta seção serão descritos, de forma mais detalhada, alguns aspectos da construção do processo e também do sistema de controle.

Os tanques foram construídos em acrílico, com dimensões de 25 cm × 6 cm × 30 cm (comprimento × largura × altura), estando interconectados através de válvulas de PVC de 1/2".

Conforme descrito anteriormente, o processo possui duas entradas (vazões nas bombas) e três estados (altura dos níveis de água nos tanques), que são as suas interfaces com o meio externo.

Os controladores utilizados são implementados via software em um computador dotado de uma placa de aquisição de dados de 12 bits, com 16 entradas analógico-digitais (A/D) e 2 saídas digitais-analógicas (D/A).

São utilizadas 3 entradas A/D para a leitura dos sinais provenientes dos circuitos de condicionamento de cada sensor e as 2 saídas D/A para enviar os sinais de controle para o driver de potência que comanda as moto-bombas.

No computador estão implementadas as rotinas em C para acessar o processo. Essas rotinas implementam as funções de utilização da placa de aquisição de dados, incluindo as funções que permitem acessar a leitura dos sensores de nível e comandar as moto-bombas.

Esse conjunto completo de rotinas de software dá suporte ao usuário, que precisa apenas implementar os algoritmos de controle a serem avaliados.

Do ponto de vista educacional, pode-se explorar diferentes configurações do sistema, dependendo da necessidade. Pode-se trabalhar, por exemplo, com apenas um tanque isolado, com 2 tanques isolados ou com diferentes dinâmicas do processo através da variação da abertura das válvulas (diferentes valores de  $k$ ).

## 2.7 RESUMO DO CAPÍTULO

Neste capítulo foi desenvolvido o modelo do processo de tanques acoplados. Além do modelo não-linear validado, foram obtidos os modelos linearizados em torno de um ponto de operação. Esses são necessários para projetar os controladores PID e no espaço-de-estados que serão utilizados para controlar o processo.

Foram descritos também os sensores e os atuadores utilizados no processo, além de alguns aspectos de implementação do sistema de controle.

No próximo capítulo serão definidas as especificações para o sistema em malha fechada.

## Capítulo 3

# ESPECIFICAÇÕES PARA O SISTEMA EM MALHA FECHADA

### 3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentadas as especificações desejadas para o sistema em malha fechada. Essas especificações serão baseadas em alguns critérios, entre eles, a característica dinâmica da resposta do sistema a uma entrada do tipo degrau, cujos parâmetros de interesse são os seguintes:

- **Tempo de subida** ( $t_r$ ), é o tempo necessário para a resposta do sistema percorrer o intervalo entre 10% e 90% do seu valor final;
- **Tempo de acomodação** ( $t_s$ ), é o tempo necessário para que a resposta do sistema alcance e permaneça numa faixa de 2% do seu valor final;
- **Sobre-sinal máximo** ( $M_p$ ), é o máximo valor da resposta do sistema com relação ao seu valor final em termos percentuais.

Além da característica dinâmica da resposta, outros objetivos de controle também podem ser especificados, como por exemplo:

1. Erro nulo em regime permanente;
2. Redução na influência de perturbações externas;
3. Redução no esforço de controle;

4. Baixa amplificação do ruído entre sensor e atuador;
5. Redução na sensibilidade à variação de parâmetros do sistema e a falhas do controlador.

Nem sempre esses objetivos podem ser atingidos simultaneamente, devendo haver um compromisso entre eles, como por exemplo, entre rapidez de resposta e baixa energia de atuação. Para formalizar esse compromisso podem ser definidos alguns critérios de otimização [3], que, no entanto, não serão abordados neste trabalho.

Os parâmetros  $t_r$ ,  $t_s$  e  $M_p$  são definidos, na maioria das vezes, de acordo com a resposta padrão de sistemas de primeira e segunda ordem, como visto a seguir.

## 3.2 RESPOSTA DE SISTEMAS DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM

### 3.2.1 Sistemas de primeira ordem

Um sistema de primeira ordem com pólo em  $s = -\sigma$  e constante de tempo  $\tau = 1/\sigma$  pode ser representado através da seguinte função de transferência:

$$G_1(s) = \frac{1}{\tau s + 1}. \quad (3.1)$$

Para um sistema de primeira ordem o tempo de acomodação de 2% é dado por

$$t_s = \frac{4}{\sigma}, \quad (3.2)$$

que também pode ser representado em função da constante de tempo do sistema como

$$t_s = 4\tau. \quad (3.3)$$

O tempo de subida é dado por

$$t_r = \frac{2.2}{\sigma}.$$

Nesse caso, não existe sobre-sinal, portanto,  $M_p = 0$ .

### 3.2.2 Sistemas de segunda ordem

Um sistema de segunda ordem com pólos em  $s = -\sigma \pm j\omega_d$  pode ser representado através da seguinte função de transferência:

$$G_2(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.4)$$

onde,  $\sigma = \zeta\omega_n$  e  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ , sendo  $\zeta$  chamado de **fator de amortecimento** e  $\omega_n$  de **freqüência natural não-amortecida**.

Para um sistema de segunda ordem, o tempo de subida de 10% a 90% pode ser aproximado por

$$t_r \approx \frac{1.8}{\omega_n}. \quad (3.5)$$

Já o tempo de acomodação de 2% é dado, assim como no caso do sistema de primeira ordem, por

$$t_s = \frac{4}{\sigma}. \quad (3.6)$$

O sobre-sinal máximo, para o caso em que  $0 \leq \zeta < 1$  é dado por

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (3.7)$$

No caso em que  $\zeta \geq 1$  não haverá sobre-sinal.

Na prática, os valores de  $t_r$ ,  $t_s$  e  $M_p$  para um sistema de segunda ordem, são utilizados para estimar as características de muitos outros sistemas. É importante ressaltar que, no caso de sistemas contendo zeros finitos ou outros pólos “rápidos”, esses parâmetros devem ser vistos com cuidado, devendo-se recorrer à validação pelos resultados experimentais. Nesse caso, os pólos de malha fechada devem estar alocados em uma região do plano complexo tal que as respostas do sistema tenham parâmetros menores ou iguais aos especificados. Ou seja,

$$\begin{aligned} \omega_n &\geq \frac{1.8}{t_r} \\ \zeta &\geq \zeta(M_p) \\ \sigma &\geq \frac{4}{t_s}. \end{aligned}$$

Caso um primeiro projeto não satisfaça essas especificações, os pólos devem ser realocados.

## 3.3 ESPECIFICAÇÕES PARA O PROJETO DOS CONTROLADORES

Deseja-se agora estabelecer as especificações de projeto para o sistema de controle do processo de tanques acoplados. Serão considerados vários objetivos de controle, descritos a seguir.

### 3.3.1 Características da resposta dinâmica

Para o sistema de tanques acoplados deseja-se obter, em malha fechada, uma resposta dinâmica 3 a 5 vezes mais rápida do que em malha aberta. Testes experimentais mostraram que uma boa aproximação para a constante de tempo dominante em malha aberta fica em torno de 150 s, o que significa que em malha aberta o sistema tem um tempo de acomodação de aproximadamente 10 min. Deseja-se portanto, que em malha fechada, o tempo de acomodação seja  $t_s = 150$  s e o erro em regime permanente seja nulo.

Deseja-se também um sobre-sinal máximo de 10%. A razão para se escolher um sistema sub-amortecido reside no fato de que a resposta dinâmica nesse caso é consideravelmente mais rápida do que no caso em que  $\zeta \geq 1$ .

Utilizando a Equação (3.6), obtém-se  $\sigma = 0.033$ .

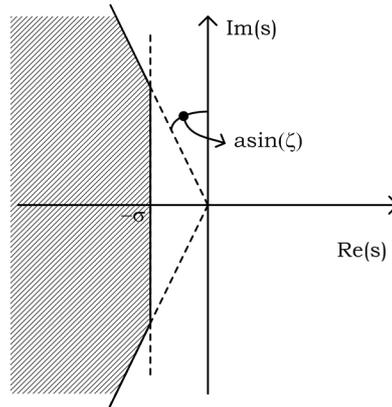
Além disso, pela Equação (3.7) é possível chegar a  $\zeta = 0.6$ .

Como  $\sigma = \zeta\omega_n$  tem-se então  $\omega_n = 0.055$ .

Esses valores de  $\zeta$  e  $\sigma$ , determinam a região no plano complexo onde devem ser alocados os pólos de malha fechada do sistema, como ilustra a Figura 3.1.

### 3.3.2 Linearidade

Deseja-se que os controladores tenham o mesmo desempenho ao longo de toda a faixa de operação do processo.



**Figura 3.1:** Região do plano complexo para a alocação dos pólos de malha fechada

### 3.3.3 Desacoplamento

Deseja-se que as saídas do sistema em malha fechada sejam desacopladas, ou seja, que a mudança em uma delas não interfira na outra. Como foi dito anteriormente, o objetivo é controlar o nível no tanque 1 através da bomba 1 e o nível do tanque 3 através da bomba 2, sendo interessante que não haja interferência entre eles.

### 3.3.4 Esforço de atuação

Com relação ao esforço de atuação, deseja-se evitar que o sistema entre na região de saturação das bombas, pois nesse caso o comportamento do sistema passa a ser de malha aberta.

### 3.3.5 Robustez à variação dos parâmetros do modelo

Mudanças nos parâmetros do modelo do processo podem, obviamente, levar o sistema de controle a desempenhos que não condizam com as especificações de projeto. Deseja-se então, avaliar a influência dessas variações no desempenho dos controladores estudados. No caso do sistema de tanques acoplados, o parâmetro de maior interesse no modelo do processo é a constante  $k$ , que depende basicamente da abertura das válvulas entre os tanques. Serão consideradas variações de  $\pm 10\%$  nesse parâmetros para avaliar a influência no desempenho dos controladores.

### 3.3.6 Rejeição de perturbações

Deseja-se rejeitar perturbações que atuem na saída do sistema. No processo real são representadas pela introdução de um quantidade adicional de água no tanque, que causa uma variação quase instantânea no valor do nível.

## 3.4 RESUMO DO CAPÍTULO

Neste capítulo foram apresentadas as especificações de controle para o sistema em malha fechada. Além da característica dinâmica da resposta, determinada pelos parâmetros  $t_r$ ,  $t_s$  e  $M_p$ , foram estabelecidos também alguns objetivos de controle relacionados à linearidade e desacoplamento entre as saídas do sistema, esforço de atuação, robustez e rejeição de perturbações. A Tabela 3.1 resume essas especificações.

**Tabela 3.1:** Resumo das especificações de controle para o sistema em malha fechada

Objetivo de Controle	Especificação
1. Característica Dinâmica	$t_s \leq 150$ s $M_p \leq 10\%$
2. Linearidade	desejável
3. Desacoplamento	desejável
4. Esforço de Controle	evitar saturação
5. Robustez	desejável
6. Rejeição de perturbação	desejável para perturbações na saída

Nos capítulos seguintes serão apresentadas as técnicas de controle que serão utilizadas para controlar o processo.

## Capítulo 4

# CONTROLE PID

### 4.1 INTRODUÇÃO

O controlador clássico PID (Proporcional, Integral, Derivativo) é largamente utilizado na indústria de processos [8]. Trabalhos de pesquisa recentes (Normey-Rico (2001) [21] *apud* Takatsu et. al. (1998) [30]), mostram que mais de 95% das malhas de controle de processos industriais são do tipo PID e que as estruturas de controle distribuído mais complexas têm o PID como elemento básico.

Normey-Rico (2001) [21] destaca ainda que para processos com dinâmicas “comportadas” e especificações não muito exigentes, o controlador PID é uma solução que oferece um bom compromisso entre simplicidade e bom comportamento em malha fechada. Entretanto, existem situações onde a sua utilização não leva a uma solução satisfatória, sendo necessárias técnicas mais sofisticadas de controle.

A importância prática do controlador PID justifica sua utilização neste trabalho. A seguir, será apresentada sua estrutura e discutidas algumas técnicas de ajuste de seus parâmetros. Serão discutidos também alguns aspectos práticos e de implementação.

## 4.2 ESTRUTURA DO CONTROLADOR PID

O controlador PID possui três ações distintas de controle: uma Proporcional (P), uma Integral (I) e outra Derivativa (D). A lei de controle em tempo contínuo é dada por

$$u(t) = K_P \left( e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (4.1)$$

onde  $e(t)$  é o erro entre a referência  $r(t)$  e o sinal  $y(t)$  que se deseja controlar:

$$e(t) = r(t) - y(t).$$

Os parâmetros  $K_P$ ,  $T_I$  e  $T_D$  são, respectivamente, o ganho proporcional, a constante de tempo integral e a constante de tempo derivativa e permitem ajustar cada uma das ações de controle.

A função de transferência do controlador PID é dada por

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right). \quad (4.2)$$

Na prática, a ação derivativa não pode ser implementada de forma ideal. Assim, acrescenta-se um filtro passa-baixas ao termo da ação derivativa, resultando em

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + T_F s} \right), \quad (4.3)$$

onde  $T_F$  é a constante de tempo do filtro, geralmente definida como  $T_F = \alpha T_D$ , onde  $\alpha$  é um número menor que 1 [21].

O processo de ajuste desses parâmetros é comumente chamado sintonia do controlador. Algumas técnicas para realizar esse procedimento são discutidas a seguir.

## 4.3 SINTONIA DE CONTROLADORES PID

Os métodos de sintonia de controladores PID podem ser divididos em duas classes: a dos métodos analíticos, que precisam do modelo do processo para obter os parâmetros do controlador, e a dos métodos empíricos, que utilizam resultados experimentais ou de simulação.

No caso dos métodos analíticos, as ferramentas mais utilizadas são o método do Lugar das Raízes e os métodos freqüenciais, bastante discutidos em referências clássicas da área

de controle [8, 22]. Entretanto, existem outros métodos mais complexos para realizar essa tarefa como, por exemplo, o método do controle por modo interno (1986), o método de Cohen-Coon (1953) e o método de Haalman (1965), todos revistos em [21].

Já entre os métodos empíricos está o método de Ziegler-Nichols (1942) o mais antigo e também mais utilizado na prática. Existem ainda outros métodos mais recentes como o método de Pagano (1989), o método de Chien e Trauenbauf (1990) e o método de Åström e Hagglund (1995), revistos em [4, 21].

Em ambos os casos, o projeto do controlador e também a identificação do sistema a ser controlado, podem ser realizados com o auxílio de ferramentas computacionais como o MATLAB [2].

Neste trabalho será utilizado o método do Lugar das Raízes uma vez que os modelos do processo com um tanque (primeira ordem) e dois tanques (segunda ordem) são conhecidos.

## 4.4 PROJETO DOS CONTROLADORES PARA O PROCESSO DE TANQUES ACOPLADOS

Neste trabalho serão utilizados dois controladores PI. Optou-se por não utilizar o termo derivativo para evitar problemas de amplificação de ruídos provenientes dos sensores de nível.

Para projetar os controladores PI para controlar os níveis  $h_1$  e  $h_3$ , serão utilizadas as funções de transferência descritas pelas Equações (2.16) e (2.19). Essas funções de transferência foram obtidas linearizando-se o processo em torno do ponto de operação  $(\bar{H}, \bar{Q})=(8 \text{ cm}, 23.22 \text{ cm}^3/\text{s})$ , escolhido por situar-se na metade da faixa de operação do processo.

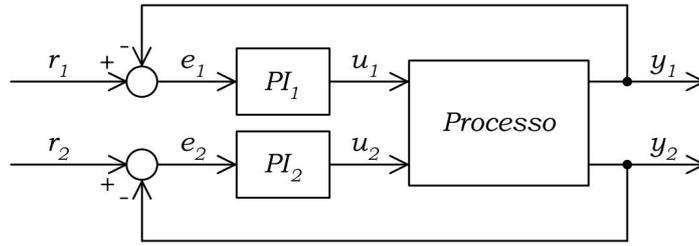
Assim, para o tanque 1 tem-se

$$G_1(s) = \frac{0.6891}{103.4s + 1},$$

que contém um pólo em  $s = -0.0097$ . Para o tanque 3 tem-se

$$G_2(s) = \frac{0.6891}{1.068 \times 10^4 s^2 + 310.1s + 1},$$

que contém pólos em  $s_1 = -0.0253$  e  $s_2 = -0.0037$



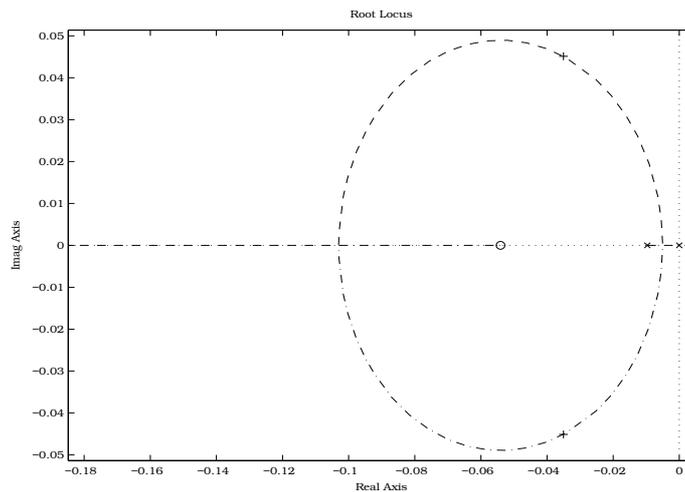
**Figura 4.1:** Diagrama de blocos do sistema de controle PID

A estrutura de controle utilizada é mostrada na Figura 4.1.

Os projetos dos controladores  $PI_1$  e  $PI_2$  foram realizados respeitando-se as especificações de controle definidas no capítulo anterior. Os parâmetros dos controladores são mostrados na Tabela 4.1 e o lugar geométrico das raízes nas Figuras 4.2 e 4.3.

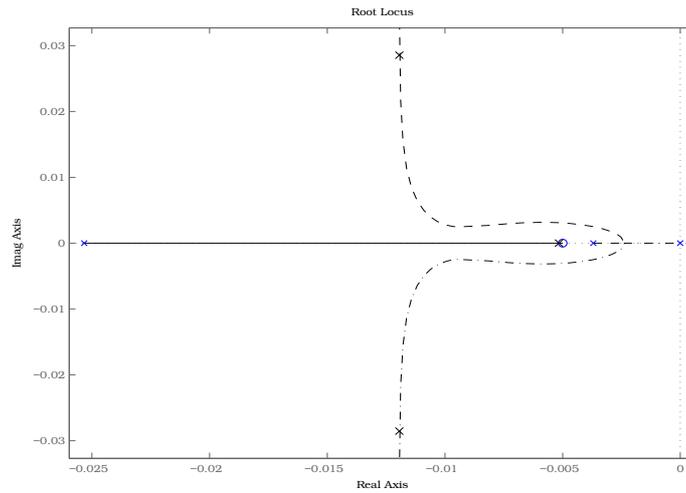
**Tabela 4.1:** Parâmetros dos controladores PI para o processo de tanques acoplados

Controlador	Parâmetros
$PI_1$	$K_P = 8.56$ $T_I = 18.5$
$PI_2$	$K_P = 15$ $T_I = 200$



**Figura 4.2:** Lugar das raízes para o sub-sistema de primeira ordem

Neste trabalho, os controladores foram implementados em um computador. O projeto do controlador foi realizado no tempo contínuo. Isso é aceitável desde que a frequência de amostragem seja muito maior que a banda passante do sistema em malha fechada.



**Figura 4.3:** Lugar das raízes para o sub-sistema de segunda ordem

## 4.5 RESUMO DO CAPÍTULO

Neste capítulo foi abordado o projeto dos controladores PIs que serão utilizados para controlar o processo. O projeto desses controladores foi realizado obedecendo-se às especificações de controle. No capítulo seguinte será abordado o controle no espaço-de-estados.

## Capítulo 5

# CONTROLE NO ESPAÇO-DE-ESTADOS

## 5.1 INTRODUÇÃO

Uma das principais vantagens de se utilizar o controle no espaço-de-estados é a possibilidade de obter uma dinâmica teoricamente arbitrária para o sistema em malha fechada. Além disso, essa abordagem permite considerar a estrutura multivariável do sistema.

Para que seja estabelecida uma dinâmica arbitrária, é necessário que o sistema seja linear e exatamente conhecido, que a ação do atuador não seja limitada e que todos os estados do sistema possam ser medidos. Isso quase nunca ocorre na prática. A Figura 5.1 mostra a estrutura de controle no espaço-de-estados.

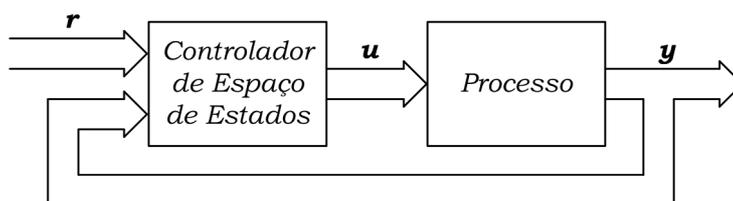


Figura 5.1: Diagrama de blocos do sistema de controle no espaço-de-estados

## 5.2 ANÁLISE DO SISTEMA LINEARIZADO

A representação dinâmica do sistema é dada por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases},$$

onde  $x \in \mathbb{R}^3$  é o vetor de estado,  $u \in \mathbb{R}^2$  é o vetor de entrada (controle) e  $y \in \mathbb{R}^2$  é o vetor de saída. A primeira equação é chamada Equação de Estado e a segunda Equação de Saída.

É importante observar que a representação do sistema no espaço-de-estados não é única, sendo possível fazer uma mudança de base do sistema com o objetivo de melhor estudá-lo ou obter certos objetivos de controle.

A partir da representação do sistema no espaço-de-estados pode-se obter a Matriz de Transferência  $G(s)$  do sistema linearizado:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ Y_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \\ G_{31}(s) & G_{32}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix},$$

onde

$$G_{lj}(s) = \frac{Y_l(s)}{U_j(s)},$$

relaciona a  $l$ -ésima saída à  $j$ -ésima entrada. Cada termo  $G_{lj}$  da Matriz de Transferência tem o mesmo polinômio denominador, que reflete os pólos do sistema.

Para obter a Matriz de Transferência do sistema, aplica-se a Transformada de Laplace às equações do sistema, considerando as condições iniciais nulas, resultando em:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Não havendo cancelamentos entre pólos e zeros, os pólos de  $G(s)$  são os autovalores de  $A$ .

É importante observar que, ao contrário da representação no espaço-de-estados, a Matriz de Transferência do sistema é única.

Para o sistema estudado foi obtido o modelo linearizado que representa a dinâmica não-linear do sistema em torno de um ponto de operação, conforme mostra a tabela a seguir. Novamente, o ponto de operação situa-se na metade da faixa de operação do processo.

**Tabela 5.1:** Ponto de operação considerado para linearizar o modelo do processo

$Q_{i1}$	$Q_{i2}$	$H_1$	$H_2$	$H_3$
8.5 cm <sup>3</sup> /s	37.6 cm <sup>3</sup> /s	6 cm	8 cm	10 cm

Utilizando-se o modelo obtido no Capítulo 2 tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.03052 & 0 & 0.01935 \\ 0 & -0.028003 & 0.01935 \\ 0.01935 & 0.01935 & -0.03870 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0067 & 0 \\ 0 & 0.0067 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Os autovalores de malha aberta do sistema linearizado são dados por:

**Tabela 5.2:** Autovalores do sistema linearizado

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
-0.0618	-0.0293	-0.0062

Como  $\lambda_i$  são distintos e  $Re(\lambda_i) < 0$ , o sistema é estável no sentido de Lyapunov [5].

Portanto, o estado de equilíbrio  $x_e = 0$  de  $\dot{x} = Ax(t)$  é assintoticamente estável.

Analisando-se a Matriz de Transferência do sistema conclui-se que este também é BIBO estável (entradas limitadas-saídas limitadas), já que todos os pólos de  $G(s)$  tem parte real negativa.

## 5.3 CONTROLABILIDADE

O sistema linearizado é completamente controlável uma vez que o posto da matriz de controlabilidade  $U \in \mathbb{R}^{n \times (nm)}$ , dada por

$$U = [B \mid AB \mid A^2B]$$

é completo.

## 5.4 POSICIONAMENTO DE PÓLOS

Para o projeto do regulador, no máximo  $m$  saídas podem ser escolhidas como variáveis controladas independentes ( $m$  é o número de entradas).

Esse sistema é multivariável com 2 entradas ( $q_{i1}$  e  $q_{i2}$ ) e 2 saídas ( $h_1$  e  $h_3$ ), ou seja,  $m = 2$ .

Um objetivo fundamental a ser atingido no projeto de um sistema de controle é garantir em primeiro lugar a estabilidade assintótica em malha fechada. Dessa forma, na ausência de um sinal de excitação, para qualquer condição inicial não nula, o sistema convergirá para o ponto de equilíbrio. Além disso, a resposta do sistema também será limitada se a excitação for limitada.

Portanto, dadas as equações de estado, deseja-se encontrar uma matriz de realimentação de estados  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , tal que a lei de controle

$$u(t) = -\mathbf{K}x(t) + \mathbf{L}r(t)$$

garanta que o sistema em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})x(t) + \mathbf{BL}r(t)$$

seja estável.

A escolha de  $\mathbf{K}$  permite posicionar os autovalores de  $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$  de forma arbitrária (considerando o sistema completamente controlável).

A realimentação de estados é utilizada para solucionar o problema da regulação, onde condições iniciais não nulas aparecem devido a perturbações e  $u(t) = -\mathbf{K}x(t)$  é utilizado para reconduzir o vetor de estados para o ponto de equilíbrio  $x_e = 0$ .

Teoricamente, é possível estabelecer dinâmicas tão rápidas quanto se queira, posicionando os autovalores no semi-plano esquerdo, tão afastados do eixo imaginário quanto necessário. Entretanto, do ponto de vista prático, isto pode levar a esforços de controle muito grandes ( $\|\mathbf{K}\|$  grande), o que pode levar à rápida saturação dos atuadores. Portanto, sempre deve haver um compromisso no momento do projeto do controlador.

A matriz de atuação  $\mathbf{L}$  é incluída para permitir a variação arbitrária do sinal de referência  $r_i(t)$  para as variáveis controladas  $y_i(t)$ , permitindo que degraus de referência  $r_i(t)$  sejam seguidos por  $y_i(t)$  sem erro de regime.

Essa equação considera que o vetor de estados pode ser completamente medido.

No domínio da frequência, a resposta a sinais de referência é dada por

$$Y(s) = C(sI - A + BK)^{-1}BLR(s)$$

A matriz de atuação L deve ser escolhida como sendo

$$L = [C(-A + BK)^{-1}B]^{-1}$$

para que não haja erro estático. Isto decorre do Teorema do Valor Final [22].

No caso ideal, os sinais de controle deveriam atuar de tal forma que o comportamento global obtido seja independente das perturbações ou de classes de perturbações atuantes sobre o sistema de controle.

Na prática procura-se minimizar o desvio entre o desempenho real obtido e o desempenho ideal [5].

## 5.5 PROJETO DO CONTROLADOR NO ESPAÇO-DE-ESTADOS

Realizando o posicionamento de pólos obedecendo às especificações de controle obteve-se, para os dois sub-sistemas, os ganhos mostrados na Tabela 5.3.

**Tabela 5.3:** Parâmetros dos controladores no espaço-de-estados para o processo de tanques acoplados

Sub-sistema	Parâmetros
Primeira Ordem	$K_1 = 3.44$ $L_1 = 5.01$
Segunda Ordem	$K_2 = 0.01$ $K_3 = 18.4$ $L_2 = 23.93$

## 5.6 RESUMO DO CAPÍTULO

Neste capítulo foi abordada a técnica do controle no espaço-de-estados. O projeto do controlador foi realizado obedecendo-se às especificações de controle estabelecidas. No capítulo seguinte será aplicada a técnica da linearização exata ao processo estudado.

## Capítulo 6

# LINEARIZAÇÃO EXATA

### 6.1 INTRODUÇÃO

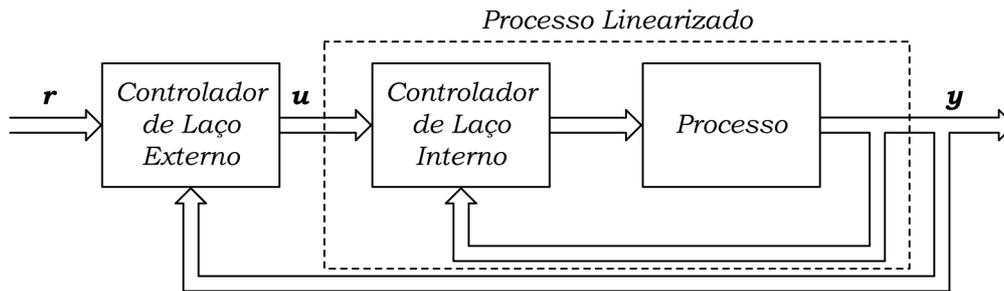
A técnica da linearização exata é muito difundida para o controle de sistemas não-lineares, especialmente em situações onde é requerido um alto desempenho por parte do sistema ao longo de toda a sua faixa de operação [28].

De Souza (1998) [6] enfatiza que apesar das não-linearidades estarem presentes em quase todos os sistemas físicos, não existem muitas ferramentas para tratar sistemas não-lineares. Por isso, o que tem motivado, principalmente, a introdução dos métodos de linearização exata, é a possibilidade de tornar disponíveis para esses sistemas as diversas ferramentas que já são muito utilizadas para a análise e síntese de sistemas lineares.

A idéia do projeto de um sistema de controle baseado na linearização exata é refletida por um controlador estruturado em dois laços de realimentação. No primeiro passo do projeto, é realizada uma compensação não-linear que cancela as não-linearidades presentes na planta, sem considerar qualquer objetivo de controle específico. Essa compensação não-linear é implementada como um laço de realimentação mais interno. No segundo passo do projeto, faz-se uma compensação linear, com base na dinâmica linear resultante do sistema pré-compensado, para alcançar algum objetivo de controle particular. Essa compensação linear é implementada como um laço de realimentação mais externo.

A Figura 6.1 mostra o diagrama de blocos do sistema de controle baseado na linearização exata.

Entretanto, vale ressaltar que nem todos os sistemas não-lineares podem ser controla-



**Figura 6.1:** Diagrama de blocos do sistema de controle baseado na linearização exata

dos dessa maneira. A aplicabilidade da técnica de linearização exata é determinada pelo tipo e localização das não-linearidades do modelo. Além disso, a linearização exata não é uma metodologia única, mas ao contrário, representa duas noções distintas de linearizabilidade. Em ambos os casos, a implementação necessita de uma realimentação de estado completo. No primeiro caso, é desejada a linearização exata da dinâmica entrada-saída, com uma saída tomada para ser a variável controlada. Esse caso, denominado linearização tipo entrada-saída, é a forma mais intuitiva de linearização exata, mas pode ser aplicado diretamente apenas nos chamados sistemas de fase mínima. Um sistema pode ser linearizado na forma entrada-saída se ele tiver um grau relativo bem definido [13]. No segundo caso, é desejada a linearização exata da dinâmica em todo o espaço-de-estado do sistema e nenhuma saída precisa ser declarada. Esse caso, denominado linearização do tipo entrada-estado, tem a vantagem de eliminar qualquer dificuldade potencial com dinâmicas internas, mas é menos intuitivo e mais difícil de se aplicar na prática.

Neste trabalho, o interesse está na linearização exata do tipo entrada-saída. Será visto que essa linearização realiza um completo desacoplamento da dinâmica dos tanques. Isso permitirá desenvolver, de forma independente, os controladores para cada sub-sistema, o que simplifica bastante o seu projeto. O desacoplamento completo entre os tanques permite otimizar o desempenho do sistema controlado, pois é possível considerar cada tanque como um sistema linear controlável e independente dos demais.

Na seqüência deste capítulo será descrito o procedimento que possibilita a linearização exata de um sistema não-linear multivariável. Esse procedimento será aplicado ao processo monotanque e também ao processo com 3 tanques acoplados.

## 6.2 LINEARIZAÇÃO EXATA DE SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS

### 6.2.1 Representação do sistema

O sistema não-linear multivariável considerado neste trabalho pode ser descrito no espaço-de-estados da seguinte forma<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y_1 &= h_1(x) \\ &\vdots \\ y_m &= h_m(x), \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entrada,  $y \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de saída,  $f(x)$ ,  $g_1(x)$ ,  $\dots$ ,  $g_m(x)$  são campos vetoriais suaves e  $h_1(x)$ ,  $\dots$ ,  $h_m(x)$  são funções suaves, definidas em um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ .

Importante notar que o sistema considerado é quadrado, com o mesmo número de entradas e saídas.

Um sistema desse tipo possui um **grau relativo** (vetorial)  $\{r_1, \dots, r_m\}$  no ponto  $x^0$  se

(i)

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0$$

para todo  $1 \leq j \leq m$ , para todo  $1 \leq i \leq m$  para todo  $k < r_i - 1$ , e para todo  $x$  em uma vizinhança de  $x^0$ ;

(ii) a matriz  $m \times m$

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

for não singular em  $x = x^0$ .

---

<sup>1</sup>A teoria apresentada nesta seção foi extraída de Isidori (1989) [13]

As funções  $L_f^k h_i(x)$  são definidas recursivamente como

$$L_f^k h_i(x) = \frac{\partial(L_f^{k-1} h_i)}{\partial x} f(x)$$

com  $L_f^0 h_i(x) = h_i(x)$ .

A função  $L_f h_i(x)$  é chamada de derivada de  $h_i$  ao longo de  $f$  (derivada de Lie) e é definida como

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i(x).$$

Da mesma forma, a derivada de  $h_i$  ao longo de  $f$  e depois ao longo de  $g$  é dada por

$$L_g L_f h_i(x) = \frac{\partial(L_f h_i)}{\partial x} g(x).$$

## 6.2.2 Linearização exata via realimentação de estados

Um sistema não-linear multivariável como o sistema definido anteriormente, com  $m$  entradas,  $m$  saídas e um grau relativo bem definido tal que  $r_1 + \dots + r_m = n$ , onde  $n$  é o número de estados, pode ser transformado em um sistema linear e controlável através de uma realimentação e mudança de coordenadas no espaço de estados [13].

Para isso, é utilizada a seguinte realimentação de estados

$$u_i(x) = \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(x) v_j \quad (6.3)$$

onde  $\alpha_i(x)$  e  $\beta_{ij}(x)$ , para  $1 \leq i, j \leq m$ , são funções suaves definidas em um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ .

Substituindo a Equação (6.3) na Equação (6.1), resulta um sistema em malha fechada de mesma estrutura e descrito por equações da forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) \alpha_i(x) + \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^m g_j(x) \beta_{ij}(x) \right) v_i \\ y_1 &= h_1(x) \\ &\vdots \\ y_m &= h_m(x). \end{aligned}$$

Escrevendo de forma mais condensada tem-se

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v,$$

onde

$$\alpha(x) = \begin{bmatrix} \alpha_1(x) \\ \vdots \\ \alpha_m(x) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \beta(x) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(x) & \dots & \beta_{1m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1}(x) & \dots & \beta_{mm}(x) \end{bmatrix}$$

são um vetor  $m \times 1$  e uma matriz  $m \times m$ , respectivamente.

O sistema em malha fechada pode ser reescrito de forma mais conveniente como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v \\ y &= h(x). \end{aligned}$$

Assume-se que  $\beta(x)$  é não singular para todo  $x$ .

Em termos da descrição original do sistema,  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  são dados por

$$\alpha(x) = -A(x)B(x) \tag{6.4}$$

$$\beta(x) = A^{-1}(x) \tag{6.5}$$

com  $A(x)$  definida em (6.2) e  $B(x)$  definido como

$$B(x) = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(x) \end{bmatrix}.$$

Nesse caso, o conjunto de funções

$$\phi_k^i(x) = L_f^{k-1} h_i(x)$$

para  $1 \leq k \leq r_i$  e  $1 \leq i \leq m$  definem uma transformação de coordenadas em  $x^0$  que, juntamente com a realimentação de estados (6.3), levam o sistema para uma representação linear e controlável.

Como  $r_1 + \dots + r_m = n$ , essa mesma transformação de coordenadas desacopla as saídas do sistema, ou seja, cada saída  $y_i$  para  $1 \leq i \leq m$  é afetada apenas pelo canal de entrada correspondente  $v_i$  e não por  $v_j$ , se  $j \neq i$ . De fato, a entrada  $v_1$  controla somente a saída  $y_1$  através de uma cadeia de  $r_1$  integradores, a entrada  $v_2$  controla apenas a saída  $y_2$  através de uma cadeia de  $r_2$  integradores e assim por diante.

## 6.3 LINEARIZAÇÃO EXATA DO PROCESSO MONOTANQUE

Nesta seção será deduzida a linearização exata do processo monotanque. A razão para estudar inicialmente esse caso é a sua simplicidade, que facilita o entendimento do processo de linearização exata. Serão utilizados os resultados apresentados na seção anterior.

A linearização exata do sistema propriamente dita será chamada de projeto do controlador de laço interno, fazendo referência à Figura 6.1. No passo seguinte, será apresentado o projeto do controlador de laço externo para o sistema linear obtido.

### 6.3.1 Projeto do controlador de laço interno

Considerando o balanço de massa no processo monotanque, dado pela equação

$$C \frac{dh}{dt} = q_i - q_o$$

e considerando ainda que  $q_o = k\sqrt{h}$  pode-se escrever

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{q_i}{C} - \frac{q_o}{C} \\ &= \frac{q_i}{C} - \frac{k}{C}\sqrt{h}. \end{aligned}$$

Denotando  $x = h$  e  $u = q_i$  tem-se

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u}{C} - \frac{k}{C}\sqrt{x},$$

que pode ser colocado na forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x), \end{aligned} \tag{6.6}$$

ponto de partida para a linearização exata.

Tem-se então

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{k}{C}\sqrt{x} + \frac{1}{C}u \\ y &= x, \end{aligned}$$

onde

$$f(x) = -\frac{k}{C}\sqrt{x}, \quad g(x) = \frac{1}{C} \quad \text{e} \quad h(x) = x.$$

Para aplicar a linearização exata calcula-se inicialmente

$$\begin{aligned} L_f^0 h(x) &= h(x) = x \\ L_f^1 h(x) &= \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = -\frac{k}{C}\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$L_g L_f^0 h(x) = L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} g(x) = \frac{1}{C} \neq 0,$$

ou seja,  $r = 1$ , o grau relativo do sistema.

O controle  $u$  é dado por

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} \left( -L_f^n h(x) + v \right) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{C}} \left( -\left( -\frac{k}{C}\sqrt{x} \right) + v \right) \\ &= k\sqrt{x} + Cv. \end{aligned}$$

Substituindo a expressão de  $u$  na Equação (6.6) tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ &= f(x) + g(x) \left( k\sqrt{x} + Cv \right) \\ &= -\frac{k}{C}\sqrt{x} + \frac{1}{C} \left( k\sqrt{x} + Cv \right) \\ &= -\frac{k}{C}\sqrt{x} + \frac{1}{C}k\sqrt{x} + v \\ &= v. \end{aligned}$$

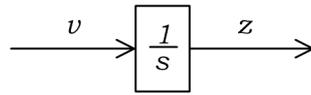
Lembrando que a transformação de coordenadas necessária é

$$z = \Phi(x) = h(x) = x$$

tem-se o seguinte sistema:

$$\dot{z} = v,$$

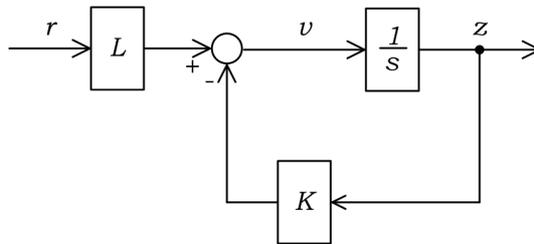
que corresponde a um integrador, como mostra a Figura 6.2. Esse sistema é linear e controlável.



**Figura 6.2:** Sistema resultante da linearização exata do processo monotanque

### 6.3.2 Projeto do controlador de laço externo

Realizada a linearização exata, deseja-se agora projetar uma realimentação de estados de forma que os pólos em malha fechada satisfaçam as especificações de controle. A Figura 6.3 mostra o sistema de controle em malha fechada.



**Figura 6.3:** Controlador de laço externo para o processo monotanque

Em malha fechada a equação característica do sistema é dada por

$$\Delta(s) = s + K,$$

portanto, para satisfazer as especificações de controle é preciso fazer  $K = \sigma$ . O valor de  $L$  deve ser igual ao valor de  $K$  para que o erro em regime permanente seja zero.

## 6.4 LINEARIZAÇÃO EXATA DO PROCESSO DE TANQUES ACOPLADOS

O mesmo procedimento realizado para o caso do monotanque será agora aplicado ao processo de tanques acoplados.

### 6.4.1 Projeto do controlador de laço interno

Dado o modelo não-linear do processo de tanques acoplados representado pelas Equações (2.11)-(2.13), e fazendo  $x_1 = h_1$ ,  $x_2 = h_2$ ,  $x_3 = h_3$ ,  $u_1 = q_{i1}$ ,  $u_2 = q_{i2}$  e  $C = A$  pode-se escrever as equações do sistema na forma descrita na Seção 6.2.1 e reproduzida abaixo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2 \\ y_1 &= h_1(x) = x_1 \\ y_2 &= h_2(x) = x_3,\end{aligned}$$

onde,

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sinal}(x_3 - x_1) \frac{k}{C} \sqrt{|x_3 - x_1|} - \frac{k}{C} \sqrt{x_1} \\ \text{sinal}(x_3 - x_2) \frac{k}{C} \sqrt{|x_3 - x_2|} - \frac{k}{C} \sqrt{x_2} \\ -\text{sinal}(x_3 - x_1) \frac{k}{C} \sqrt{|x_3 - x_1|} - \text{sinal}(x_3 - x_2) \frac{k}{C} \sqrt{|x_3 - x_2|} \end{bmatrix},$$

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Escrevendo de forma compacta

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u_2 \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_3\end{aligned}$$

Tem-se então um sistema não-linear multivariável com 2 entradas e 2 saídas. Para investigar o grau relativo deste sistema, serão calculadas inicialmente as funções  $L_f^k h_i(x)$ .

Para  $i = 1$ , tem-se

$$\begin{aligned}L_f^0 h_1(x) &= h_1(x) = x_1, \\ L_f^1 h_1(x) &= \frac{\partial h_1}{\partial x} f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix} = f_1(x), \\ L_f^2 h_1(x) &= \frac{\partial f_1}{\partial x} f(x) = \left( -\frac{k}{C} \frac{1}{2\sqrt{|x_3 - x_1|}} - \frac{k}{C} \frac{1}{2\sqrt{x_1}} \right) f_1(x) + \frac{k}{C} \frac{1}{2\sqrt{|x_3 - x_1|}} f_3(x).\end{aligned}$$

Para  $i = 2$ , tem-se

$$\begin{aligned}
L_f^0 h_2(x) &= h_2(x) = x_3, \\
L_f^1 h_2(x) &= \frac{\partial h_2}{\partial x} f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix} = f_3(x), \\
L_f^2 h_2(x) &= \frac{\partial f_3}{\partial x} f(x) \\
&= \frac{k}{C} \frac{1}{2\sqrt{|x_3 - x_1|}} f_1(x) + \frac{k}{C} \frac{1}{2\sqrt{|x_3 - x_2|}} f_2(x) \\
&\quad + \left( -\frac{k}{C} \frac{1}{2\sqrt{|x_3 - x_1|}} - \frac{k}{C} \frac{1}{2\sqrt{|x_3 - x_2|}} \right) f_3(x).
\end{aligned}$$

Agora é possível calcular  $r_1$  e  $r_2$  verificando-se a condição (i) da definição de grau relativo, através do cálculo das funções  $L_{g_j} L_f^k h_i$ .

Para calcular  $r_1$ , faz-se

$$\begin{aligned}
L_{g_1} L_f^0 h_1(x) &= \frac{\partial h_1}{\partial x} g_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{C} \neq 0 \\
L_{g_2} L_f^0 h_1(x) &= \frac{\partial h_1}{\partial x} g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\
L_{g_2} L_f^1 h_1(x) &= \frac{\partial f_1}{\partial x} g_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\
L_{g_2} L_f^2 h_1(x) &= \frac{\partial(L_f^2 h_1)}{\partial x} g_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial(L_f^2 h_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial(L_f^2 h_1)}{\partial x_2} & \frac{\partial(L_f^2 h_1)}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0
\end{aligned}$$

uma vez que

$$L_f^2 h_1(x) = \left( -\frac{k}{C} \frac{1}{2\sqrt{|x_3 - x_1|}} - \frac{k}{C} \frac{1}{2\sqrt{|x_3 - x_2|}} \right) f_1(x) + \frac{k}{C} \frac{1}{2\sqrt{|x_3 - x_1|}} f_3(x).$$

Como  $f_3(x)$  depende de  $x_2$  tem-se que

$$L_{g_2} L_f^2 h_1 \neq 0,$$

portanto,  $r_1 = 1$ .

Para calcular  $r_2$ , faz-se

$$L_{g_1} L_f^0 h_2(x) = \frac{\partial h_2}{\partial x} g_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$L_{g_1} L_f^1 h_2(x) = \frac{\partial f_3}{\partial x} g_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{C} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = \frac{k}{C^2} \frac{1}{2\sqrt{|x_3 - x_1|}} \neq 0$$

Além disso,

$$L_{g_2} L_f^0 h_2(x) = \frac{\partial h_2}{\partial x} g_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$L_{g_2} L_f^1 h_2(x) = \frac{\partial f_3}{\partial x} g_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{C} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{k}{C^2} \frac{1}{2\sqrt{|x_3 - x_2|}} \neq 0$$

Logo,  $r_2 = 2$ .

Além disso, a condição (ii) é satisfeita pois

$$\begin{aligned} A(x) &= \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^0 h_1(x) & L_{g_2} L_f^0 h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^1 h_2(x) & L_{g_2} L_f^0 h_2(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ \frac{k}{C^2} \frac{1}{2\sqrt{|x_3 - x_1|}} & \frac{k}{C^2} \frac{1}{2\sqrt{|x_3 - x_2|}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

tem posto completo, ou seja,  $\text{posto}(A(x)) = 2$ .

Portanto, o sistema tem grau relativo  $\{r_1, r_2\} = \{1, 2\}$  em qualquer ponto  $x^0$ , desde que  $x_1 \neq x_3$  e  $x_2 \neq x_3$ . Se o ponto  $x^0$  é tal que esta condição é violada, nenhum grau relativo pode ser definido.

Calculando-se  $A^{-1}(x)$ , tem-se

$$\begin{aligned} A^{-1}(x) &= \frac{1}{\frac{k}{C^3} \frac{1}{2\sqrt{|x_3 - x_2|}}} \begin{bmatrix} \frac{k}{C^2} \frac{1}{2\sqrt{|x_3 - x_2|}} & 0 \\ -\frac{k}{C^2} \frac{1}{2\sqrt{|x_3 - x_1|}} & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C & 0 \\ -C \frac{\sqrt{|x_3 - x_2|}}{\sqrt{|x_3 - x_1|}} & \frac{C^2}{k} 2\sqrt{|x_3 - x_2|} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Além disso,

$$B(x) = \begin{bmatrix} L_f^1 h_1(x) \\ L_f^2 h_2(x) \end{bmatrix}$$

$$= \left[ \begin{array}{c} f_1(x) \\ \frac{k}{C} \frac{1}{2\sqrt{|x_3-x_1|}} f_1(x) + \frac{k}{C} \frac{1}{2\sqrt{|x_3-x_2|}} f_2(x) + \left( -\frac{k}{C} \frac{1}{2\sqrt{|x_3-x_1|}} - \frac{k}{C} \frac{1}{2\sqrt{|x_3-x_2|}} \right) f_3(x) \end{array} \right]$$

Deseja-se calcular a agora o vetor de controle  $u$  dado por

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v,$$

onde  $\alpha(x)$  e  $\beta(x)$  são dados pelas Equações (6.4) e (6.5), assim

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11}(x) & \beta_{12}(x) \\ \beta_{21}(x) & \beta_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

mas,

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) &= -\text{sin}al(x_3 - x_1)k\sqrt{|x_3 - x_1|} + k\sqrt{x_1} \\ \alpha_2(x) &= -\text{sin}al(x_3 - x_1)k\sqrt{|x_3 - x_2|} - \text{sin}al(x_3 - x_2)k\frac{|x_3 - x_2|}{\sqrt{|x_3 - x_1|}} \\ &\quad - 2\text{sin}al(x_3 - x_2)k\sqrt{|x_3 - x_2|} + k\sqrt{x_2} - \text{sin}al(x_3 - x_1)k\sqrt{|x_3 - x_1|} \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1(x) + Cv_1 \\ u_2 &= \alpha_2(x) - C\frac{\sqrt{|x_3 - x_2|}}{\sqrt{|x_3 - x_1|}}v_1 + \frac{C^2}{k}2\sqrt{|x_3 - x_2|}v_2 \end{aligned}$$

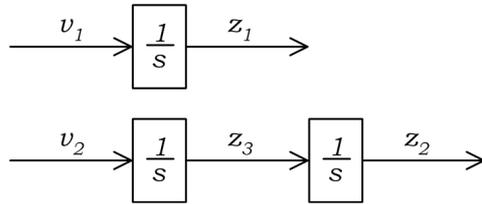
Com essa realimentação de estados e a transformação de coordenadas abaixo

$$\begin{aligned} z_1 &= h_1(x) = x_1 \\ z_2 &= h_2(x) = x_3 \\ z_3 &= L_f^1 h_2(x) = -\text{sin}al(x_3 - x_1)\frac{k}{C}\sqrt{|x_3 - x_1|} - \text{sin}al(x_3 - x_2)\frac{k}{C}\sqrt{|x_3 - x_2|} \end{aligned}$$

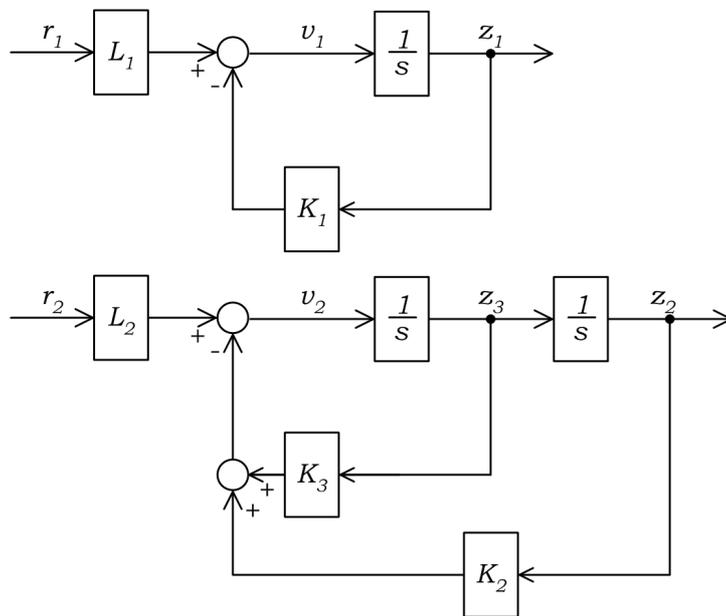
leva o sistema a uma representação linear, controlável e desacoplada, como mostra a Figura 6.4.

## 6.4.2 Projeto do controlador de laço externo

Da mesma forma como no caso do processo monotanque, deseja-se agora projetar uma realimentação de estados de forma que os pólos em malha fechada satisfaçam as especificações de controle. A Figura 6.5 mostra o sistema de controle em malha fechada.



**Figura 6.4:** Sistema resultante da linearização exata do processo de tanques acoplados



**Figura 6.5:** Controlador de laço externo para o processo de tanques acoplados

Em malha fechada a equação característica da parte do sistema correspondente à saída  $y_1$  é

$$\Delta_1(s) = s + K_1,$$

portanto, para satisfazer as especificações de controle é preciso fazer  $K_1 = \sigma$ . O valor de  $L_1$  deve ser igual ao valor de  $K_1$  para que o erro em regime permanente seja nulo.

A equação característica da parte do sistema correspondente à saída  $y_2$  é

$$\Delta_2(s) = s^2 + K_3s + K_2,$$

portanto, para satisfazer as especificações de controle é preciso fazer  $K_2 = \omega_n^2$  e  $K_3 = 2\zeta\omega_n$ . O valor de  $L_2$  deve ser igual ao valor de  $K_2$  para que o erro em regime permanente seja zero.

## 6.5 RESUMO DO CAPÍTULO

Neste capítulo, foi realizada a linearização exata do processo monotanque e também do processo de tanques acoplados. Foram calculados os controladores de laço interno que linearizam a planta; também foram calculados os controladores de laço externo, que estabelecem para o sistema linearizado, a dinâmica desejada em malha fechada.

No capítulo seguinte, serão apresentados resultados de simulações e também de testes experimentais no processo.

# Capítulo 7

## RESULTADOS EXPERIMENTAIS

### 7.1 INTRODUÇÃO

Os resultados apresentados neste capítulo estão estruturados em duas partes distintas: inicialmente, serão discutidos os resultados obtidos através de simulações; em seguida, serão analisados os resultados dos testes práticos.

Serão avaliadas três técnicas de controle: controle clássico PI, controle no espaço-de-estados e controle baseado na linearização exata.

### 7.2 RESULTADOS DE SIMULAÇÕES

Nesta seção serão apresentados resultados do controle do processo de tanques acoplados através das três técnicas propostas. Serão realizados experimentos em torno de três pontos de operação do sistema, chamados de  $PO_-$ ,  $PO$  e  $PO_+$ , e apresentados na Tabela 7.1. O ponto de operação  $PO$  é o mesmo utilizado para obter o modelo de pequenos sinais do processo.

**Tabela 7.1:** Pontos de operação considerados nos testes experimentais

Ponto de Operação	$H_1$ (cm)	$H_3$ (cm)	$H_2$ (cm)
$PO_-$	2	4	6
$PO$	6	8	10
$PO_+$	10	12	14

O primeiro experimento considera mudanças de referência de 1 cm para as saídas  $y_1$  e  $y_2$  em torno de  $PO$ . Os resultados são apresentados nas Figuras 7.1 e 7.2, respectivamente.

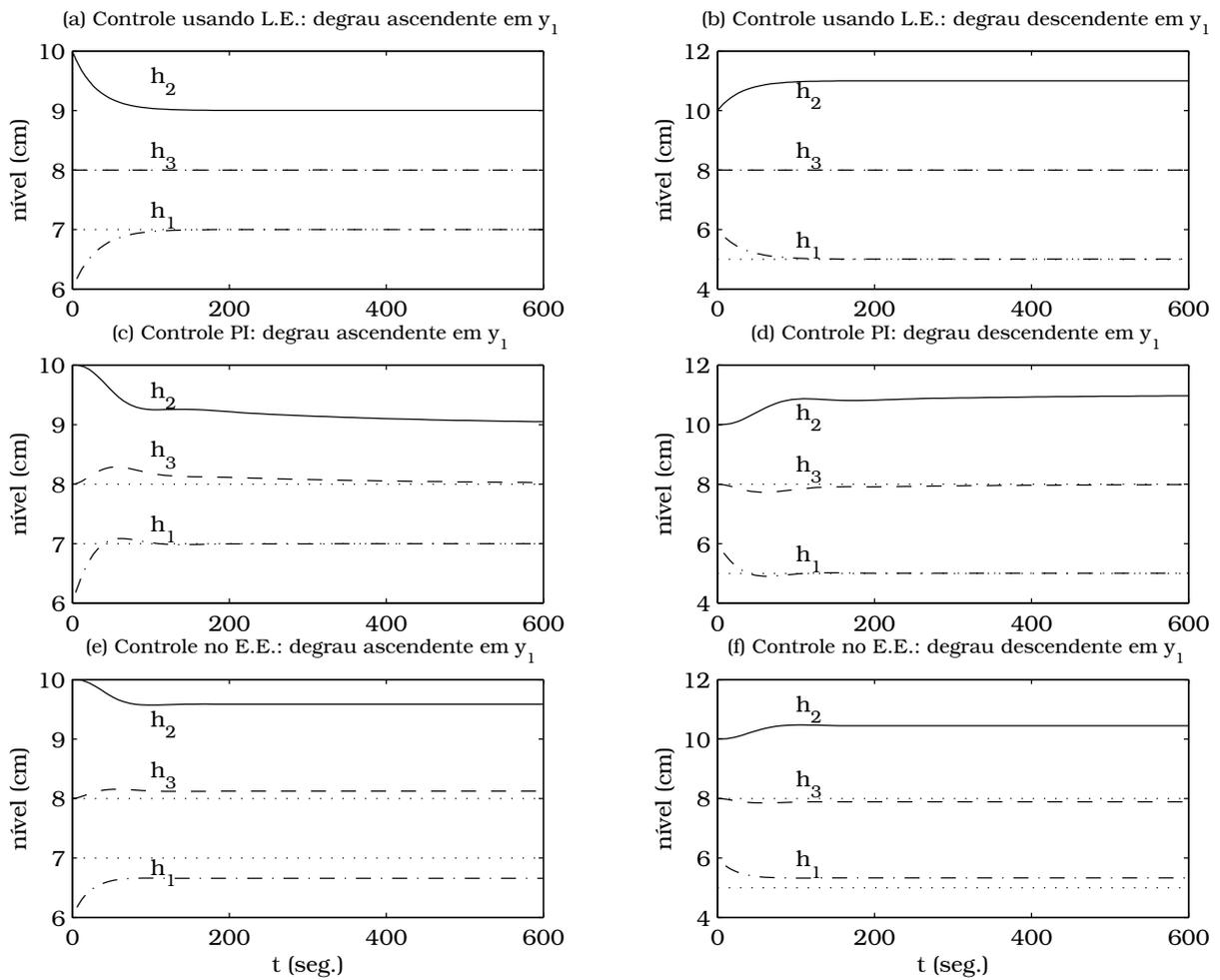
Observa-se que o controlador baseado em linearização exata (L.E.) apresenta o mesmo padrão de resposta para todos os experimentos. Pode-se observar ainda que as especificações para a característica dinâmica do sistema em malha fechada são atendidas, ou seja,  $t_s \leq 150$  s e  $M_p \leq 10\%$ .

A resposta do controlador no espaço-de-estados mostra um erro em regime permanente para a mudança de referência. Isso se deve ao fato de existir o acoplamento entre os tanques, que não foi levado em conta no modelo, sendo considerado uma perturbação. Apesar do erro em regime permanente, pode-se observar que o tempo de acomodação fica próximo do valor especificado no projeto.

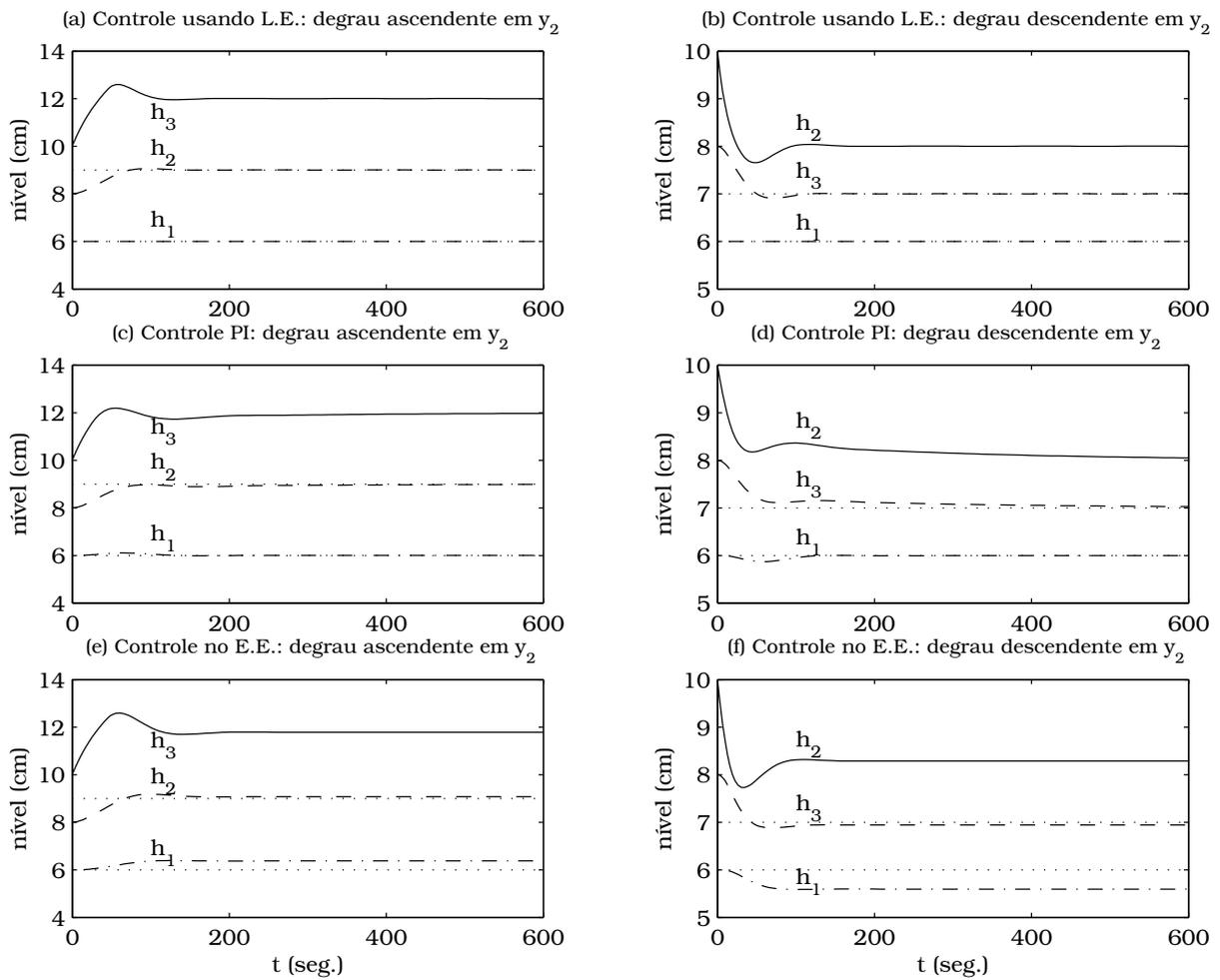
A resposta do controlador PI para uma mudança na referência da saída  $y_2$  (sub-sistema de segunda ordem) apresentou uma resposta lenta que não atende às especificações de controle estabelecidas. A razão para esse comportamento em malha fechada reside no fato de que a disposição dos pólos em malha aberta dificulta o projeto de um controlador PI que atenda às especificações de controle, como pode ser visto no gráfico do lugar geométrico das raízes mostrado na Figura 4.3.

Nesse caso, uma solução seria acrescentar o termo derivativo no controlador, para tornar a resposta transitória mais rápida. Seria possível, dessa forma, conseguir um desempenho mais adequado em malha fechada. Entretanto, não é objetivo principal deste trabalho realizar o melhor projeto de um controlador clássico PI, e sim, apenas comparar o desempenho desse controlador em relação ao controlador baseado na linearização exata.

Por isso, optou-se por manter o controlador apenas com a estrutura PI. Como o termo integrativo é que torna a resposta do sistema mais lenta, outra alternativa seria a utilização de um controlador P (apenas proporcional), mas nesse caso o erro em regime permanente seria inevitável.



**Figura 7.1:** Comparação entre o desempenho dos três controladores para mudanças de referência ascendentes e descendentes para a saída  $y_1$  em torno do ponto de operação  $PO$ .



**Figura 7.2:** Comparação entre o desempenho dos três controladores para mudanças de referência ascendentes e descendentes para a saída  $y_2$  em torno do ponto de operação  $PO$ .

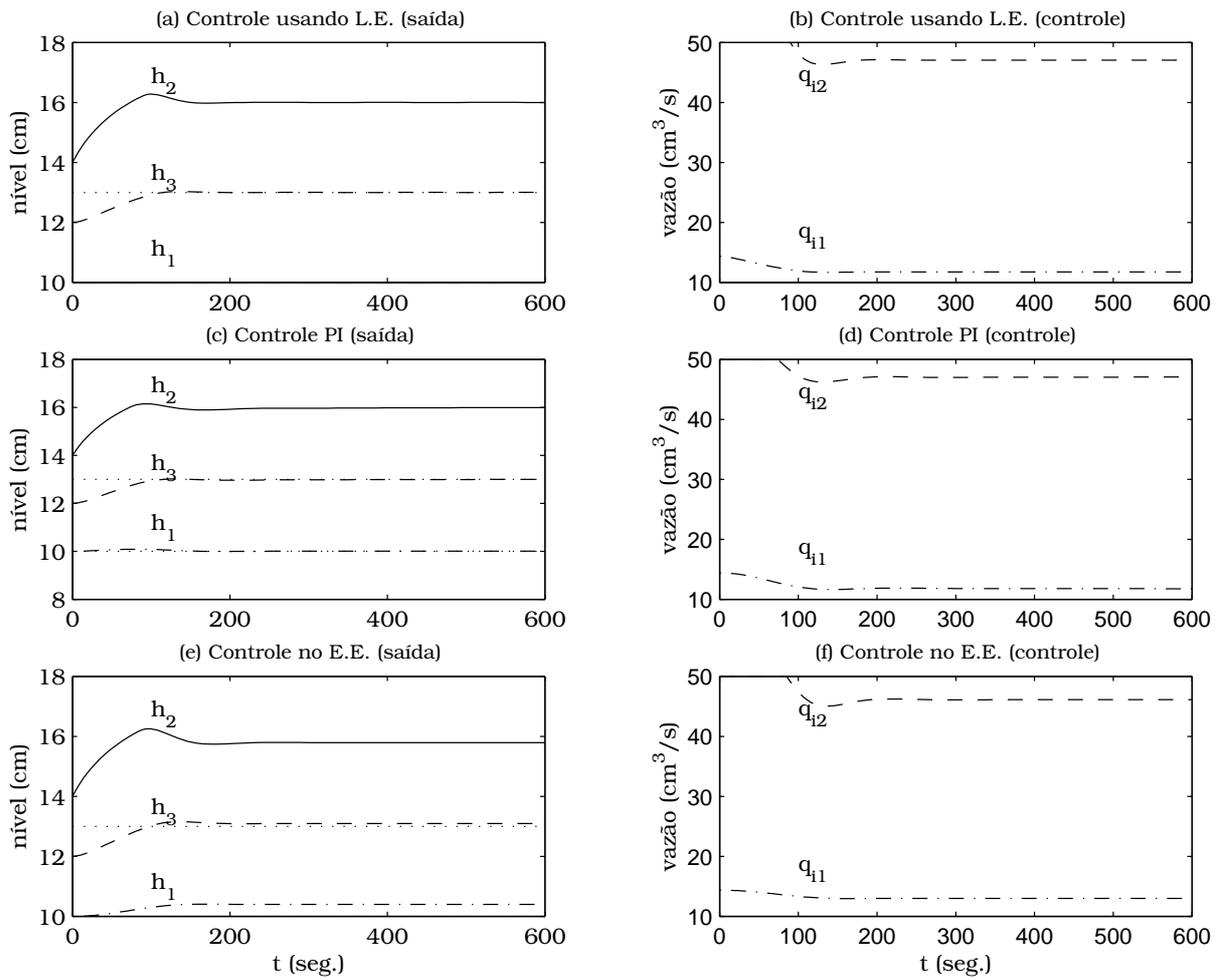
O segundo experimento avalia a saturação no controle, como mostra a Figura 7.3. Para isso, são considerados degraus de amplitude 1 cm em torno de  $PO_+$ . Observa-se que para uma mudança de referência ascendente, todos os controladores apresentam um pequena saturação no controle. Esse comportamento aparece, com maior frequência, tanto maior for a diferença de nível entre os tanques.

De fato, levando-se em conta que a característica de todas as válvulas é a mesma, a constante  $k$  que aparece nas Equações (2.7)-(2.10) das vazões do processo são iguais. Dessa forma, o nível do tanque intermediário ( $h_3$ ) será sempre a média entre os níveis dos tanques das extremidades ( $h_1$  e  $h_2$ ). Caso as características das válvulas sejam diferentes, o nível do tanque intermediário será uma média ponderada entre os níveis dos tanques das extremidade. Isso faz com que o valor da vazão de entrada no tanque de menor nível seja bem menor que a vazão de entrada do tanque de maior nível. Ou seja, degraus que levam a um distanciamento maior entre os níveis têm maior tendência de causar saturação no atuador.

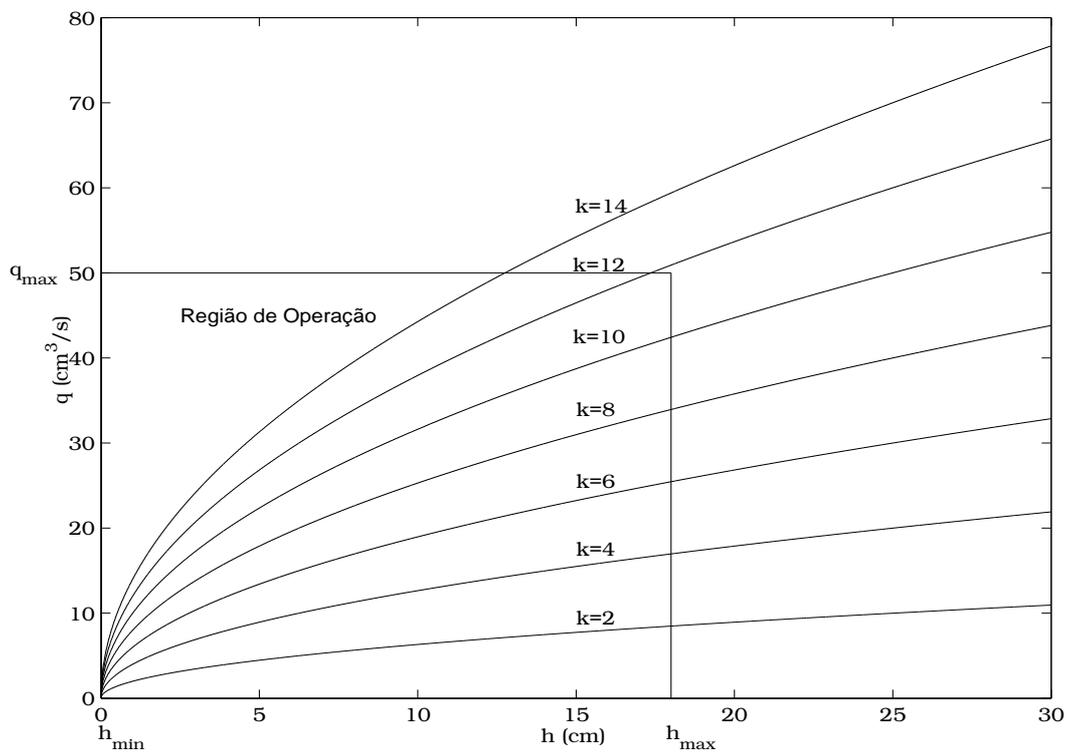
Além disso, quanto mais alto for o ponto de operação, com relação a faixa de operação de 0-16cm, maior será o esforço de controle necessário para manter o processo nesse ponto. Por essa razão é que foram considerados degraus em torno de  $PO_+$ . Isso decorre, naturalmente, da característica da vazão em relação à altura, como mostra a Figura 2.4.

Processos mais lentos, com valores maiores de  $k$  tendem a apresentar uma curva  $q_o \times h$  mais lenta. Isso dá mais margem de atuação para as bombas. Por outro lado, processos com dinâmicas mais rápidas ( $k$  “grande”), deixam uma margem menor para o controle, o que causa maior saturação dos atuadores, ou ainda a impossibilidade de estabilizar o processo em determinados pontos de operação.

A Figura 7.4 ilustra as curvas  $q_o \times h$  para diferentes valores de  $k$ , confinadas à região de operação do processo.



**Figura 7.3:** Esforço de atuação para uma mudança de referência  $y_2$  no ponto de operação  $PO_+$



**Figura 7.4:** Curvas  $q_o \times h$  para diferentes valores de  $k$ , confinadas à região de operação do processo.

Para avaliar os aspectos de linearidade e desacoplamento são considerados experimentos de mudança de referência em torno dos três pontos de operação, como mostra a Figura 7.5.

Com relação ao aspecto da linearidade, a simulação mostra que os valores de sobre-sinal e erro em regime permanente, para os controladores PI e espaço-de-estados, respectivamente, variam de acordo com o ponto de operação, como mostra a Tabela 7.2.

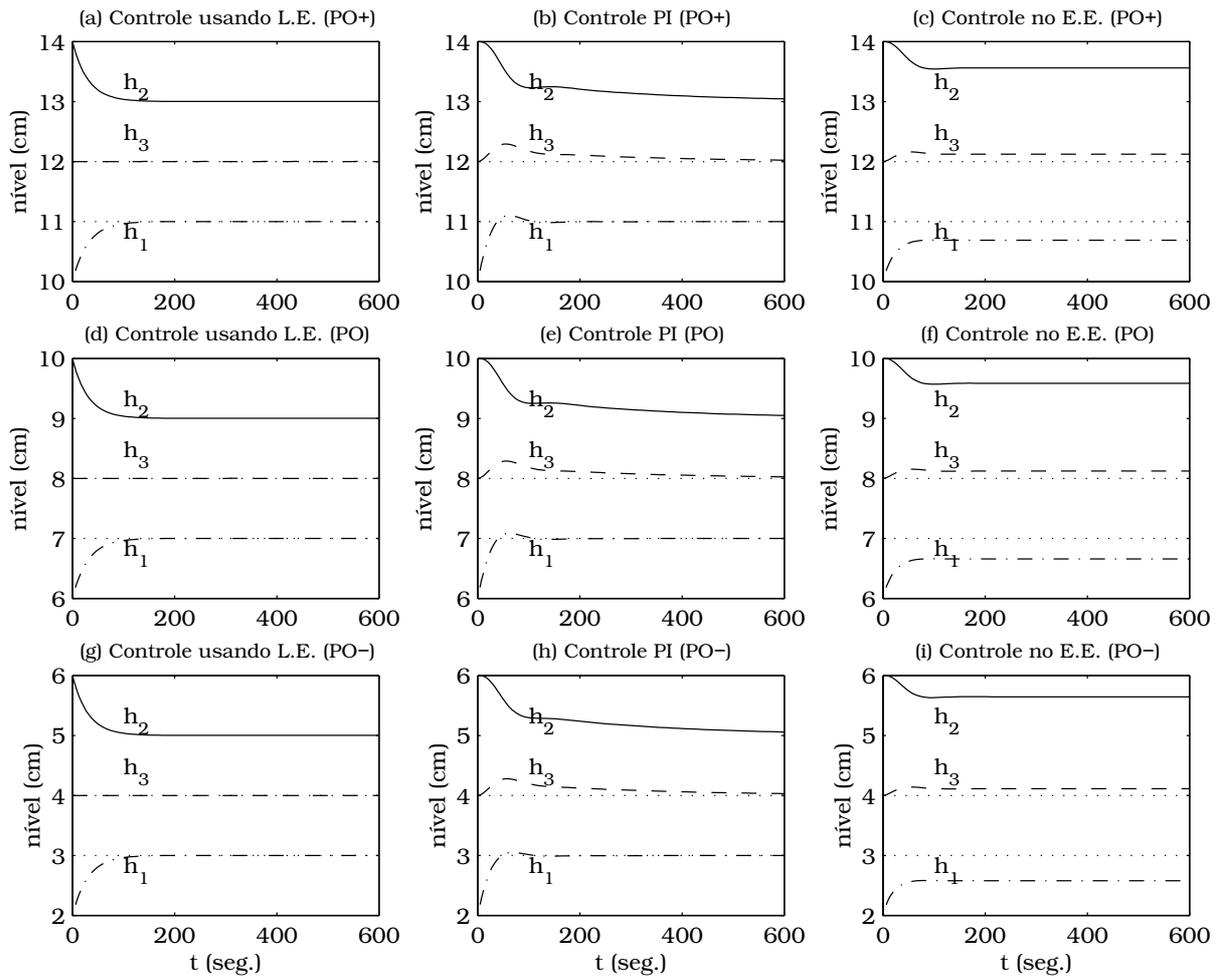
**Tabela 7.2:** Comparação entre o desempenho dos controladores PI, espaço-de-estados e linearização exata em torno dos três pontos de operação

Ponto de Operação	L.E.	PI	E.E.
$PO_+$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 2.7\%$
	$M_p = 0$	$M_p = 1\%$	$M_p = 0$
$PO$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 5\%$
	$M_p = 0$	$M_p = 1.4\%$	$M_p = 0$
$PO_-$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 13\%$
	$M_p = 0$	$M_p = 1.6\%$	$M_p = 0$

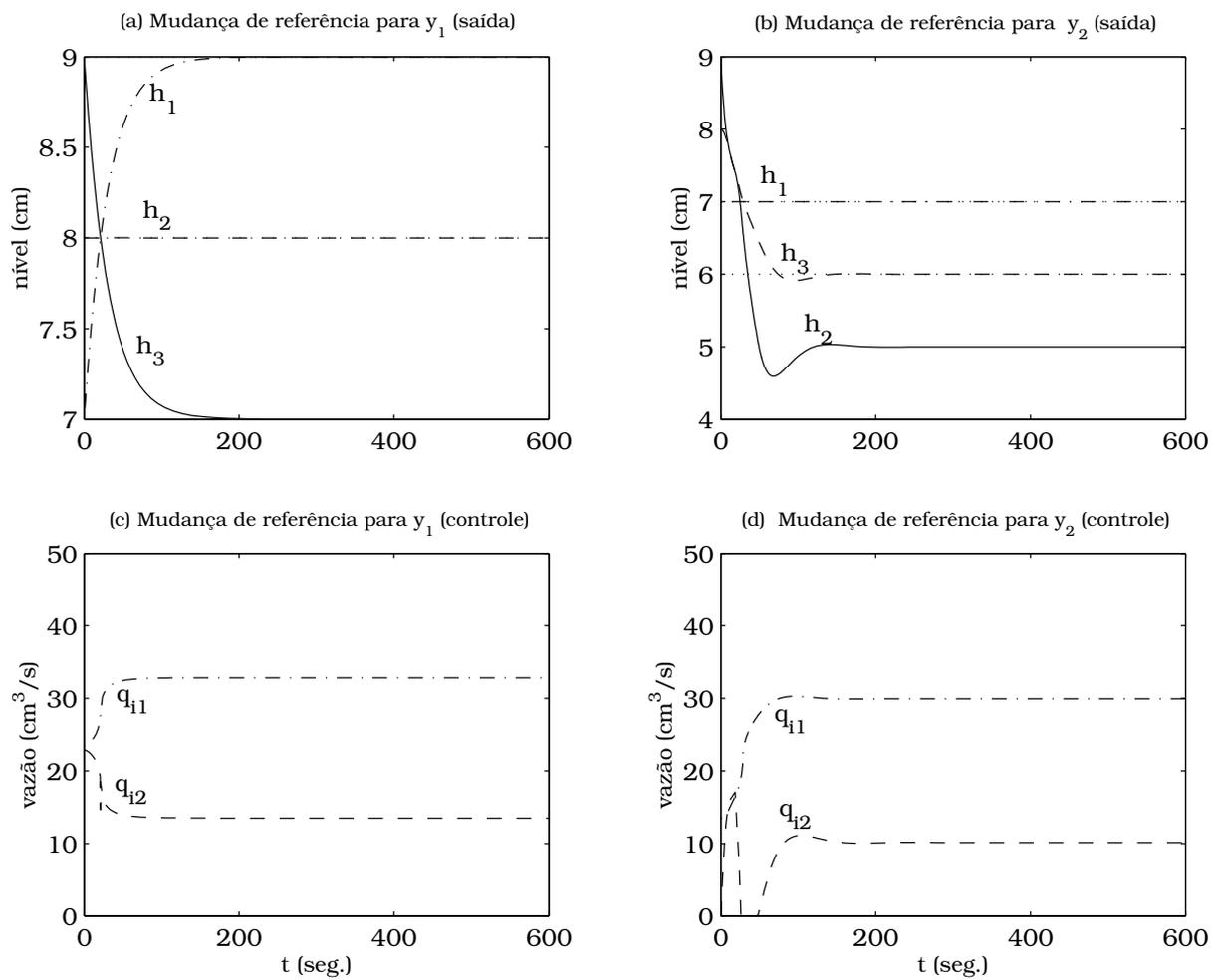
Com relação ao aspecto do desacoplamento entre as variáveis do sistema, os resultados mostram que de fato apenas no caso da linearização exata isso ocorre. No caso dos controladores PI e espaço-de-estados, a mudança de referência para uma das saídas causa uma perturbação na outra.

É interessante notar que no caso do controlador PI, isso faz com que o sobre-sinal seja sempre diferente daquele especificado para o sistema em malha fechada. Isso já era esperado uma vez que existe a vazão de acoplamento entre os tanques 1 e 3 ( $q_{13}$ ), que não é considerada no modelo de pequenos sinais.

Outro aspecto interessante a ser analisado é o comportamento do sistema próximo dos pontos de singularidade, no caso do controlador baseado em linearização exata. A Figura 7.6 mostra o resultado de uma mudança de referência onde existe um cruzamento entre os níveis, ou seja, uma passagem pelo ponto de singularidade ( $x_1 = x_3$ ), o gráfico do controle apresenta uma variação brusca nesse ponto, representada por um pico no gráfico. Entretanto, esse ponto de singularidade é “vencido” pela inércia do sistema.



**Figura 7.5:** Comparação entre o desempenho dos três controladores para uma mudança de amplitude de 1 cm na referência da saída  $y_1$  em torno dos pontos de operação  $PO_-$ ,  $PO$  e  $PO_+$

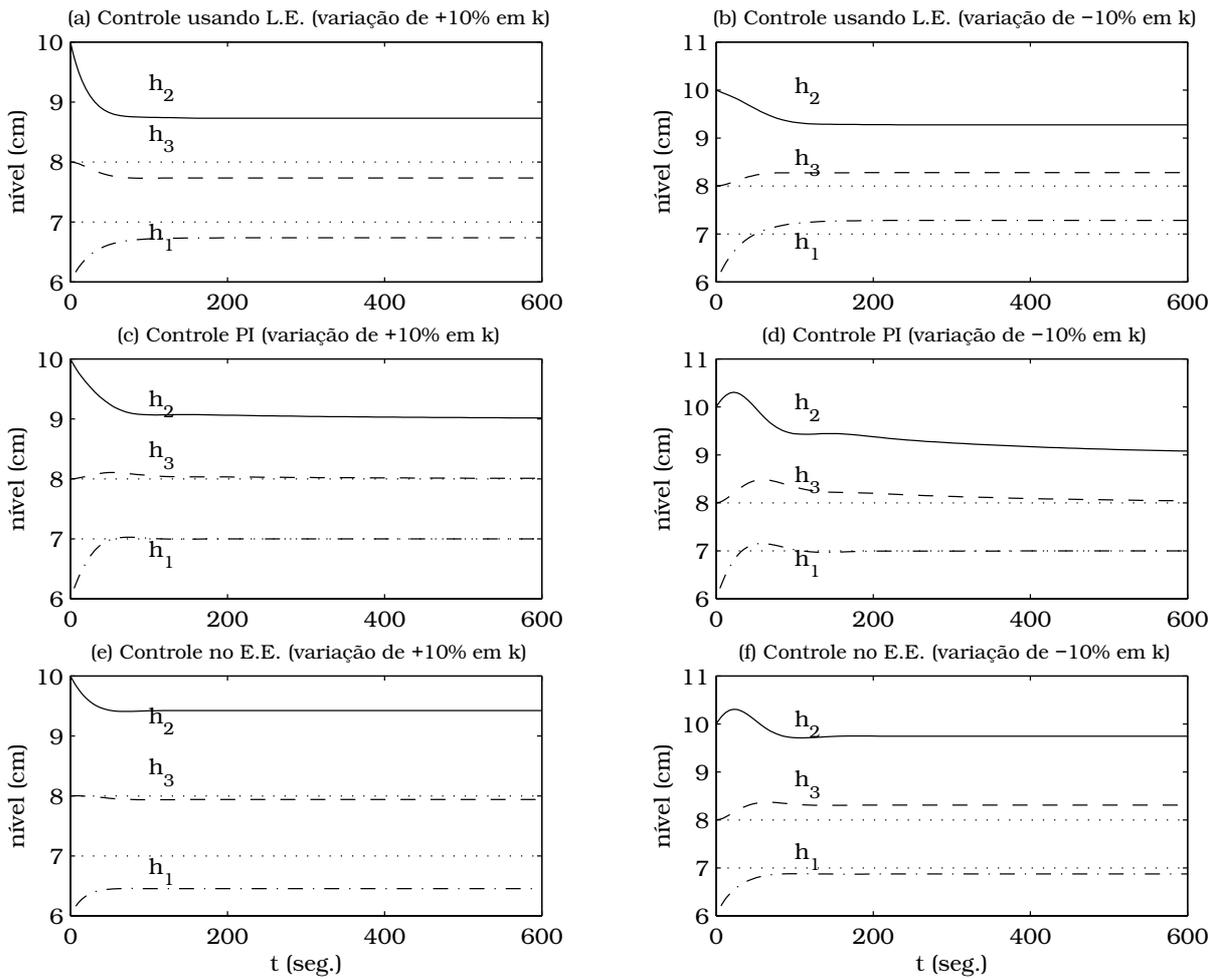


**Figura 7.6:** Comportamento do sistema durante a passagem pelos pontos de singularidade  $x_3 = x_1$  e  $x_3 = x_2$ .

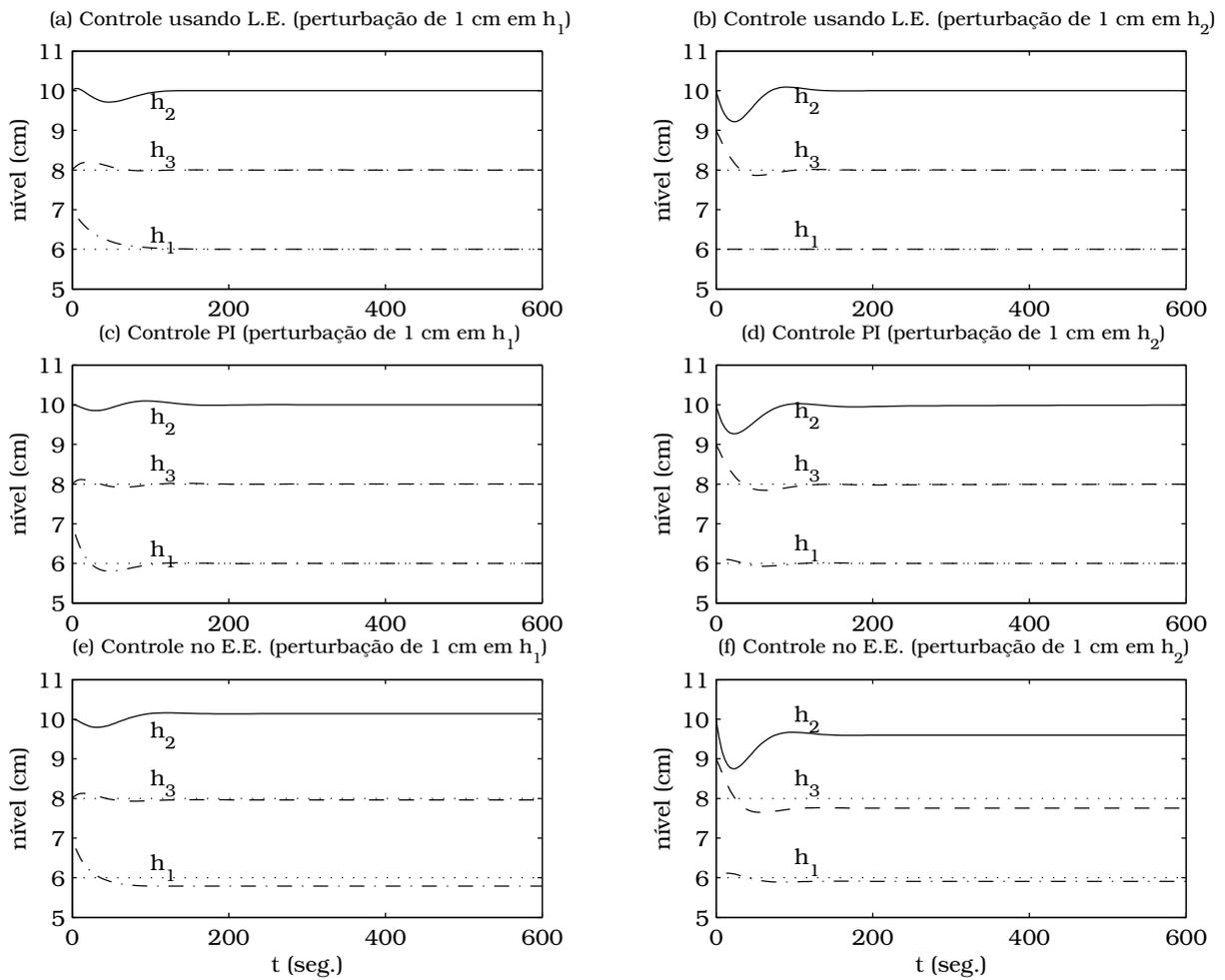
Para analisar a robustez dos controladores com relação a variações nos parâmetros do modelo do processo, serão considerados dois experimentos em torno do ponto de operação  $PO$ , como mostra a Figura 7.7. Serão analisadas respostas do sistema a dois degraus ascendentes de referência, um para  $y_1$  e outro para  $y_2$ . No primeiro experimento será considerada uma variação de +10% no valor de  $k$  e no segundo uma variação de -10%. Na prática, seria possível a ocorrência de uma variação em apenas uma das válvulas do sistema, o que leva a várias possibilidades. Escolheu-se variar a mesma quantidade em todas as válvulas para considerar o pior caso.

Os resultados mostram que uma variação de +10% no valor de  $k$  deteriora o comportamento do controlador baseado em linearização exata, causando um erro em regime permanente de 3.8% na saída  $y_1$  e um erro de 3.4% na saída  $y_2$ . É interessante fazer uma analogia entre esse comportamento e aquele apresentado pelo controlador no espaço-de-estados estudado anteriormente. O fato de existir uma variação no modelo do processo, faz com que o sistema linearizado não corresponda, de fato, a duas cadeias de integradores, como mostrado na Figura 6.4. Esse mesmo comportamento ocorre no caso do controlador no espaço-de-estados, que também apresenta um erro em regime permanente, basicamente pelo mesmo motivo, a inexatidão do modelo linearizado. Esse experimento ilustra que quando a linearização exata é utilizada, o conhecimento preciso do modelo é muito importante. Isso nem sempre é possível na prática. Nesse caso, seria adequado utilizar por exemplo, técnicas de controle adaptativo, que levam em conta possíveis variações nos parâmetros do modelo, ou então da mais alta derivada, que não sofre tanta influência dessa variação.

Por fim, uma discussão relacionada à rejeição de perturbações externas. Como especificado no Capítulo 3, deseja-se rejeitar perturbações que atuem diretamente na saída do processo, ou seja, correspondentes a um aumento instantâneo no nível de água em um tanque. A Figura 7.8 mostra o resultado de uma perturbação de 1 cm no nível  $h_1$  e outra de 1 cm no nível  $h_2$ . Observa-se que os controladores PI e Linearização Exata, rejeitam essas perturbações. Isso não ocorre no caso do controle no espaço-de-estados (uma alternativa para esse caso seria a utilização de uma realimentação de estados com canal integral). O ponto interessante está relacionado com o desacoplamento do sistema no caso da linearização exata. Na Figura 7.8 (b) nota-se que uma perturbação em  $h_2$  não afeta o nível em  $h_1$  (o mesmo ocorre se houvesse uma perturbação em  $h_3$ ). Entretanto, quando o nível  $h_1$  é perturbado, essa perturbação também influencia  $h_2$ . Isso pode ser explicado pelo grau relativo do sistema. O grau relativo de  $h_1$  em relação à  $u_1$  é 1, ou seja,  $u_1$  atua diretamente em  $h_1$ . Isso quer dizer que havendo uma mudança na vazão  $q_{13}$  (“perturbação interna”), ela é automaticamente rejeitada pelo controlador. Entretanto, o grau relativo de  $h_2$  em relação a  $u_2$  é 2, ou seja,  $u_2$  não atua diretamente sobre  $y_2$ .



**Figura 7.7:** Comparação entre o desempenho dos três controladores para variações de  $\pm 10\%$  no parâmetro  $k$  do modelo. São considerados degraus de referência de 1 cm para a saída  $y_1$ .



**Figura 7.8:** Comparação entre as três técnicas de controle para rejeição de uma perturbação nas saídas  $y_1$  e  $y_2$  em  $t = 0$

## 7.3 RESUMO DO CAPÍTULO

Neste capítulo, foram apresentados os resultados de simulações e de testes experimentais. Os desempenhos dos controladores foram avaliados tomando como base as especificações de controle estabelecidas. No capítulo seguinte, são apresentadas as principais conclusões deste trabalho e sugeridos alguns temas para trabalhos futuros.

## Capítulo 8

# CONCLUSÕES

Este trabalho contemplou o estudo comparativo de algumas técnicas de controle aplicadas a um processo multivariável não-linear.

O processo escolhido foi o de tanques acoplados, onde o objetivo é controlar a altura do nível de líquido nos mesmos. Esse tipo de processo está presente em vários tipos de indústria, o que caracteriza sua relevância.

Os resultados mostraram que o desempenho de controladores lineares do tipo PID ou espaço-de-estados é deteriorado quando o processo opera longe do ponto de operação utilizado para linearizar o modelo. Além disso, o acoplamento entre as variáveis do sistema faz com que uma mudança de referência para uma das saídas afete as demais, efeito indesejado na prática.

Por outro lado, quando a técnica da linearização exata é utilizada isso não acontece e o sistema de controle mantém o mesmo desempenho em toda a faixa de operação. O completo desacoplamento entre as variáveis do sistema simplifica bastante o projeto dos controladores, além de possibilitar que alterações em uma das saídas não afetem as demais.

Entretanto, essa técnica apresenta maior sensibilidade quanto a variações paramétricas no modelo da planta. Esse efeito já era esperado, uma vez que para realizar o cancelamento das não-linearidades da planta assume-se que o modelo seja conhecido de forma precisa.

Uma importante contribuição deste trabalho foi a construção de um ambiente completo para o desenvolvimento de atividades de ensino e pesquisa na área de controle, melhorando a estrutura do Laboratório de Automação, Visão e Sistemas Inteligentes (LAVSI). O protótipo construído é bastante versátil, podendo ser configurado de diversas formas

visando abordar diferentes problemas práticos.

Três trabalhos já estão sendo desenvolvidos na seqüência deste. O primeiro utiliza a abordagem do controle *fuzzy*, com o objetivo de obter um controlador que opere de forma satisfatória em todo o domínio de trabalho do processo. A principal vantagem dessa técnica em relação à linearização exata está no fato de que o modelo da planta não precisa ser conhecido. O segundo trabalho, de cunho educacional, tem como objetivo disponibilizar acesso *on line* ao processo, para que experimentos possam ser realizados de forma remota. Esse sistema já está operacional e pode ser acessado através do endereço <http://www.ene.unb.br/~lavsi>. O terceiro trabalho, recém iniciado, diz respeito à aplicação de técnicas de controle preditivo para controlar o processo de tanques acoplados.

Como indicação para outros trabalhos futuros sugere-se, inicialmente, explorar outras configurações possíveis para o processo. Pequenas alterações nas válvulas e na posição das bombas, por exemplo, possibilitariam o estudo da influência de zeros na dinâmica do processo.

Sugere-se ainda o estudo de técnicas alternativas à linearização exata como a do controle da mais alta derivada ou o controle por modos deslizantes, que são robustas com relação a variações nos parâmetros do modelo da planta.

Além disso, uma abordagem de controle sob restrições seria bastante interessante pois no processo existem restrições tanto nas entradas (vazão máxima das bombas) quanto nos estados (altura máxima dos níveis nos tanques).

## Referências Bibliográficas

- [1] Aguirre, L. A. *Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. Editora UFMG, Belo Horizonte, 2000.
- [2] Andersson, M. A Matlab tool for rapid process identification and PID design. Dissertação de Mestrado, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Lund, Suécia, setembro de 2000.
- [3] Bauchspiess, A. Notas de aula: Tópicos em controle e automação. Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, 1996.
- [4] Caon Jr., J. R. Controladores PID com sintonia automática por realimentação a relê. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 1999.
- [5] Castelan Neto, E. B. Notas de aula: Sistemas multivariáveis. Departamento de Automação e Sistemas, Universidade Federal de Santa Catarina, 1997.
- [6] de Souza, E. *Sobre o Método de Interpolação Polinomial para o Problema de Linearização Exata*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, dezembro de 1998.
- [7] Eker, J. e Malmberg, J. Design and implementation of a hybrid control strategy. *IEEE Control Systems Magazine*, 19(4):12–21, agosto de 1999.
- [8] Franklin, G. F., Powell, J. D., e Emami-Naeini, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, 3a. edição, 1994.
- [9] Gambier, A. e Unbehauen, H. Adaptive predictive state-space control of a multivariable 3-tank system. Em *38th Conference on Decision & Control*, páginas 1234–1239, Phoenix, Arizona, dezembro de 1999.
- [10] Garcia, C. *Modelagem e Simulação de Processos Industriais e de Sistemas Eletromecânicos*. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.
- [11] Grega, W. e Maciejczyk, A. Digital control of a tank system. *IEEE Transactions on Education*, 37(3):271–276, agosto de 1994.
- [12] Halliday, D. e Resnick, R. *Fundamentos de Física*, volume 2. Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, RJ, 2a. edição, 1991.
- [13] Isidori, A. *Nonlinear Control Systems: An Introduction*. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag, 2a. edição, 1989.
- [14] Johansson, K. H. The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(3):456–465, maio de 2000.

- [15] Johansson, K. H., Horch, A., Wijk, O., e Hansson, A. Teaching multivariable control using the quadruple-tank process. Em *38th Conference on Decision & Control*, páginas 807–812, Phoenix, Arizona, dezembro de 1999.
- [16] Ko, C. C., Chen, B. M., Chen, J., Zhuang, Y., e Tan, K. C. Development of a web-based laboratory for control experiments on a coupled tank apparatus. *IEEE Transactions on Education*, 44(1):76–86, fevereiro de 2001.
- [17] Kocijan, J., O'Reilly, J., e Leithead, W. E. An integrated undergraduate teaching laboratory approach to multivariable control. *IEEE Transactions on Education*, 40(4):266–272, novembro de 1997.
- [18] Kozick, R. J. e Crane, C. C. An integrated environment for modeling, simulation, digital signal processing and control. *IEEE Transactions on Education*, 39(2):114–119, maio de 1996.
- [19] Luiz, C. C., Silva, A. C., Coelho, A. A. R., e Bruciapaglia, A. H. Controle adaptativo versus controle fuzzy: Um estudo de caso em um processo de nível. *SBA Controle & Automação*, 8(2):43–51, agosto de 1997.
- [20] Mazo, M. Teaching equipment for training in the control of DC, brushless, and stepper servomotors. *IEEE Transactions on Education*, 41(2):146–158, maio de 1998.
- [21] Normey-Rico, J. E. Projeto de controladores PID industriais. Departamento de Automação e Sistemas, Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.
- [22] Ogata, K. *Engenharia de Controle Moderno*. Editora Prentice Hall do Brasil Ltda., Rio de Janeiro, 2a. edição, 1993.
- [23] Ogata, K. *System Dynamics*. Prentice-Hall, Inc., 3a. edição, 1998.
- [24] Oliveira, J. C. P., Resende, P., e Maia, C. A. Controle neural *gain scheduling* de tanques interativos. Em *III Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, páginas 224–228, Vitória, ES, 1997.
- [25] Pereira, L. F. A. e Lima, J. C. M. Reestruturação do ensino de automação e controle através da implantação de laboratórios. Em *XII CBA - Brazilian Automatic Control Conference*, páginas 637–642, Uberlândia, MG, setembro de 1998.
- [26] Poulsen, N. K., Kouvaritakis, B., e Cannon, M. Nonlinear constrained predictive control applied to a coupled-tank apparatus. *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, 148(1):17–24, janeiro de 2001.
- [27] Simas, H., Bruciapaglia, A. H., e Coelho, A. A. R. Advanced control using three low-cost laboratory models: Experiments and design issues. Em *XII CBA - Brazilian Automatic Control Conference*, páginas 431–436, Uberlândia, MG, setembro de 1998.
- [28] Slotine, J.-J. E. e Li, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1990.
- [29] Strang, G. *Linear Algebra and Its Applications*. Harcourt Brace Jovanovich, Inc., 3a. edição, 1988.
- [30] Takatsu, H., Itoh, T., e Araki, M. Future needs for the control theory in industries: report and topics of the control technology survey in the japanese industry. *Journal of Process Control*, 8(5-6):369–374, 1998.
- [31] Tsai, M.-C., Chou, C.-C., e Hsieh, M.-F. Development of a real-time servo control test bench. *IEEE Transactions on Education*, 40(4):242–252, novembro de 1997.
- [32] Vibet, C. Control teaching via low cost setups. *IEEE Transactions on Education*, 37(3):269–270, agosto de 1994.

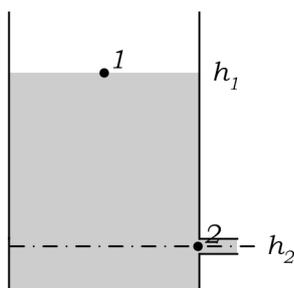
- [33] Waurajitti, N., Ngamwiwit, J., e Prempraneerach, Y. Adaptive fuzzy sliding mode controller for two cascaded tanks level control. Em *TENCON 2000*, páginas 592–597, 2000.
- [34] Yurkovich, S. e Passino, K. M. A laboratory course on fuzzy control. *IEEE Transactions on Education*, 42(1):15–21, fevereiro de 1999.

## Apêndice A

### A EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Seja o tanque mostrado na Figura A.1. Considerando o nível em que se encontra o furo como sendo o nível de referência, nota-se que as pressões no topo do tanque ( $P_1$ ) e na saída do furo ( $P_2$ ) são iguais à pressão atmosférica. Aplicando a equação de Bernoulli entre os pontos 1 e 2 obtém-se [12]

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2. \quad (\text{A.1})$$



**Figura A.1:** Aplicação da equação de Bernoulli a um tanque

No lado esquerdo da equação, o segundo termo pode ser igualado a zero pois a velocidade do líquido no topo do tanque (isto é, a velocidade com que o nível diminui) pode ser desprezada. No lado direito da equação, o terceiro termo também é igual a zero pois o nível de referência situa-se à altura do furo. Lembrando que  $P_1 = P_2 = P_{atm}$  a equação fica da seguinte forma

$$P_{atm} + 0 + \rho g h_1 = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0.$$

Logo, pode-se obter o valor da velocidade do fluido na saída do tanque

$$v_2 = \sqrt{2gh_1}.$$

Se na saída do furo houver um tubo, a equação de Bernoulli deve ser modificada de forma a contemplar um termo referente a perda de carga no escoamento. Assim, a Equação A.1 deve ser reescrita da seguinte forma

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + f \frac{L_T}{D} \frac{1}{2}\rho v_2^2. \quad (\text{A.2})$$

onde  $f$  é o coeficiente de perda de carga,  $L_T$  é o comprimento do tubo e  $D$  é o diâmetro do tubo. Realizando a mesma análise anterior, chega-se a nova expressão da velocidade

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh_1}{(f \frac{L_T}{D} + 1)}}.$$

O coeficiente de perda de carga é determinado experimentalmente e os valores mais usados são obtidos através do diagrama de Moody, [10]. É importante ressaltar que o valor de  $f$  depende do número de Reynolds ( $Re$ ), dado por

$$Re = \frac{\rho D v}{\mu},$$

onde  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $D$  é o diâmetro interno do tubo,  $v$  é a velocidade média do fluido no tubo e  $\mu$  é a viscosidade absoluta do fluido.

Portanto, tanto no caso da Equação A.1 quanto no caso da Equação A.2, a velocidade (e consequentemente a vazão) de saída do fluido é dada por uma equação do tipo

$$v = k\sqrt{h}, \quad (\text{A.3})$$

sendo que no segundo caso  $k$  é variável.