

# Determinação Automática dos Parâmetros Estatísticos de Imagens de 2 Regiões de Reflectâncias Constantes para Cálculo do Limiar Ótimo de Binarização

Cristiano Jacques Miosso<sup>1</sup>, Adolfo Bauchspiess<sup>2</sup>, Patrick Letouzé Moreira<sup>3</sup>  
Departamento de Engenharia Elétrica — FT

Universidade de Brasília — UnB

<sup>1</sup>miosso@engineer.com, <sup>2</sup>adolfo@ene.unb.br, <sup>3</sup>letouze@unb.br

## Resumo

*A binarização de imagens digitais apresenta inúmeras aplicações em sistemas de automação baseados em visão computacional, como na extração de trajetórias a serem seguidas por manipuladores robóticos guiados por servo-visão, na determinação da orientação e posição de peças a serem deslocadas por manipuladores em linhas de montagem e no pré-processamento de imagens utilizadas em sistemas de reconhecimento óptico de caracteres (OCR). No processo de limiarização, a escolha de um limiar de binarização apropriado é fundamental, mas seu valor depende de parâmetros estatísticos da imagem que em geral não são conhecidos de antemão. Neste artigo, é apresentado um algoritmo para determinação automática de todos os parâmetros estatísticos da imagem necessários ao cálculo do limiar ótimo. Nas avaliações realizadas, o método apresentou bom desempenho durante a binarização de imagens reais e sintéticas, neste caso permitindo o cálculo dos parâmetros com erros de menos de 3% em relação aos empregados na geração das imagens. O método pode ser aplicado a sistemas que não exijam o cálculo do limiar em tempo real ou em que apenas a proporção de objeto possa variar de uma imagem para outra, sendo os demais determinados uma única vez ou recalculados a uma taxa inferior.*

## 1 Introdução

O processo de binarização tem por objetivo a classificação dos *pixels* que constituem uma imagem representativa de um objeto a ser analisado sobre um fundo, ambos de reflectâncias constantes. Deve-se obter uma função característica que a cada posição na imagem associe o nível lógico 1 se ali é projetado um ponto ou região do objeto, e 0 caso contrário. Nesta definição, não é feita restrição alguma acerca da natureza do objeto, e por fundo entende-se toda a região do campo de visão que não lhe pertença. Desta forma, em diferentes aplicações são binarizados diversos tipos de imagens.

O fato de serem geradas no processo imagens em preto e branco restringe a situações bastante específicas suas aplicações. Demonstra-se, por exemplo, que as imagens binarizadas só permitem a análise de objetos cujos graus de liberdade se restrinjam a translações ou rotações em planos paralelos ao plano de imagem [1]. Diferentes níveis de luminância, mesmo atribuídos a objetos de reflectância constante e iluminados de maneira uniforme,

são necessários à reconstituição de formas tridimensionais, independentemente da técnica utilizada. Ainda assim, a facilidade de processamento e armazenamento de imagens binárias, quando comparadas às imagens com 8 *bits* de quantização, faz da binarização um procedimento bastante utilizado em sistemas de automação, sobretudo em aplicações industriais em que se tem grande controle sobre as condições de iluminação e as tarefas a serem executadas são rigidamente definidas.

Neste caso, a possibilidade de se extrair das imagens binárias informações geométricas precisas como área, posição e orientação é útil, por exemplo, para guiar manipuladores robóticos que deslocam peças em linhas de montagem. A determinação das coordenadas cartesianas de pontos de uma trajetória, diretamente da imagem binarizada, permite também a guiagem de manipuladores por servo-visão; um exemplo são os utilizados em tarefas de soldagem [2]. Em aplicações completamente distintas, a binarização é ainda a primeira etapa de processamento em sistemas de reconhecimento óptico de caracteres (OCR)[3] e de objetos planos em fundos uniformes, bem como um método de compressão, já que imagens binárias conduzem a taxas *bits/pixels* muito inferiores às daquelas com 8 *bits* de quantização. Neste caso, a taxa pode ser reduzida ainda mais pela aplicação de outros codificadores às imagens binárias obtidas, como é o caso do codificador *run-length* para imagens com 2 níveis [4].

O procedimento mais simples utilizado na binarização de imagens é o da limiarização. Considera-se que todos os *pixels* que representam o objeto apresentam luminância acima ou abaixo de um limiar pré-definido, conforme seja ele mais claro ou mais escuro do que o fundo. A idéia se baseia no fato de que às luminâncias do objeto e do fundo são associadas duas densidades de probabilidade, já que elas representam medições da reflectância das duas superfícies multiplicadas pela influência da iluminação em cada *pixel* [1]; neste caso, a densidade de probabilidade global da imagem, denominada *densidade de mistura*, é dada por:

$$f(x) = p_1 \cdot f_1(x) + (1 - p_1) \cdot f_2(x), \quad (1)$$

onde  $f_1$  e  $f_2$  são as densidades de probabilidade associadas às medições das reflectâncias do objeto e do fundo e  $p_1$  é a proporção de objeto na imagem. Desta forma, o histograma da imagem é uma combinação dos histogramas do objeto e do fundo. Se estes histogramas não se sobrepõem, a escolha de um limiar  $L$  apropriado permite

classificar corretamente todos os *pixels* da imagem.

Surge, no entanto, o problema de se determinar o valor apropriado de  $L$ , que depende de  $p_1$  e das médias ( $\mu_1$  e  $\mu_2$ ) e variâncias ( $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$ ) associadas a  $f_1$  e  $f_2$ . A imposição de que  $L$  minimize a probabilidade de que um *pixel* seja classificado incorretamente conduz a [5]:

$$L = \begin{cases} \frac{\mu_2^2 - \mu_1^2 + 2\sigma^2 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{2(\mu_2 - \mu_1)} & \text{se } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma \\ \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (2)$$

onde:

$$A = \sigma_1^2 - \sigma_2^2, B = 2\mu_1\sigma_2^2 - 2\mu_2\sigma_1^2 \\ \text{e } C = \sigma_1^2\mu_2^2 - \sigma_2^2\mu_1^2 + 2\sigma_1^2\sigma_2^2 \ln\left(\frac{\sigma_2 p_1}{\sigma_1 p_2}\right). \quad (3)$$

A equação (2) apresenta, em forma fechada, a solução ao problema de determinação do limiar ótimo  $L$ , supostas gaussianas as distribuições  $f_1$  e  $f_2$ . No entanto, devem ser conhecidos os parâmetros estatísticos destas distribuições,  $\mu_1$ ,  $\sigma_1^2$ ,  $\mu_2$ ,  $\sigma_2^2$ , e a proporção de objeto e de fundo na imagem,  $p_1$  e  $1 - p_1$ . Estes parâmetros não são, em geral, conhecidos de antemão, e de um algoritmo absolutamente automático de determinação do limiar de binarização se espera que permita seu cálculo a partir unicamente da imagem de entrada. O método aqui proposto objetiva o cálculo das 5 variáveis envolvidas.

Apesar de existirem estimadores para a média e para a variância associadas a um sinal, eles apenas permitem determinar, de forma direta, os parâmetros estatísticos globais da imagem, no caso correspondentes à densidade de mistura (1), não às distribuições isoladas  $f_1$  e  $f_2$ , como se faz necessário. Uma possível abordagem para o cálculo de todos os parâmetros envolvidos consiste em definir uma função de erro quadrático ( $e_q$ ) entre o histograma observado do sinal e a densidade de mistura. Este erro depende das variáveis de interesse  $\mu_1$ ,  $\sigma_1^2$ ,  $\mu_2$ ,  $\sigma_2^2$  e  $p_1$ , que devem ser escolhidas de forma a minimizá-lo.

Os pontos de mínimo de uma função contínua são aqueles em que as derivadas parciais de primeira ordem são nulas e as de segunda ordem são positivas [6]. Entretanto, as derivadas parciais de  $e_q$  conduzem, no caso das distribuições  $f_1$  e  $f_2$  serem gaussianas, a equações transcendentais cuja solução requer grande esforço computacional [5], sobretudo considerando o caso típico de imagens com 256 níveis de quantização.

Neste artigo, propõe-se um algoritmo mais simples para a determinação automática dos parâmetros estatísticos descritos. A seção 2 apresenta inicialmente o equacionamento necessário à solução proposta, seguido da descrição das etapas que compõem o método. A seção 3 analisa os resultados da aplicação do algoritmo à determinação dos limiares de binarização de imagens reais e sintéticas, estas favorecendo a comparação direta entre os parâmetros calculados e os empregados em sua geração. Finalmente, a seção 4 apresenta a conclusão desta análise e uma avaliação da aplicabilidade do algoritmo a sistemas reais baseados em imagens binárias, como é o caso de manipuladores robóticos guiados por servo-visão, cuja pesquisa conduziu ao método ora apresentado.

## 2 Descrição do Algoritmo Proposto

A solução aqui proposta para a determinação automática dos parâmetros de interesse se baseia no uso de estimadores estatísticos da média e da variância globais de sinais. A seção 2.1 aborda a relação entre estas grandezas e os parâmetros de interesse, e sugere de que maneira podem ser empregadas para calculá-los. A seção 2.2 descreve a metodologia utilizada durante o particionamento da imagem, procedimento cuja necessidade é mostrada já em 2.1. As seções 2.3 e 2.4 descrevem por fim as duas etapas em que se divide o algoritmo.

### 2.1 Equacionamento

Inicialmente, considere-se a relação entre a média ( $\mu$ ) e a variância ( $\sigma^2$ ) globais e os parâmetros que se deseja obter. Da definição da média [7], tem-se, para o caso da densidade de mistura (1):

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x [p_1 f_1(x) + (1 - p_1) f_2(x)] dx, \quad (4)$$

$$\mu = p_1 \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx + (1 - p_1) \int_{-\infty}^{\infty} x f_2(x) dx, \quad (5)$$

$$\mu = p_1 \mu_1 + (1 - p_1) \mu_2. \quad (6)$$

Analogamente, pela definição da variância [7]:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 [p_1 f_1(x) + (1 - p_1) f_2(x)] dx, \quad (7)$$

o que se reduz a:

$$\sigma^2 = p_1 [\sigma_1^2 + (\mu - \mu_1)^2] + (1 - p_1) [\sigma_2^2 + (\mu - \mu_2)^2]. \quad (8)$$

Nas equações (6) e (8), a média  $\mu$  e a variância  $\sigma^2$  globais da imagem  $I$  podem ser obtidas dos estimadores [8]:

$$\mu = \frac{1}{L \cdot C} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^C I(i, j) \text{ e} \quad (9)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{L \cdot C} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^C (I(i, j) - \mu)^2, \quad (10)$$

onde  $L$  e  $C$  são o número de linhas e de colunas de  $I$ .

As equações (6) e (8) relacionam os parâmetros  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\sigma_1^2$ ,  $\sigma_2^2$  e  $p_1$  a serem calculados a  $\mu$  e  $\sigma^2$ , obtidos diretamente de (9) e (10). Entretanto, dispõe-se aqui de apenas 2 equações para 5 incógnitas, e o sistema é subdeterminado. Na primeira etapa do método aqui proposto, divide-se o suporte da imagem em um número específico de regiões, sendo calculadas a média  $\mu(r)$  e a variância  $\sigma^2(r)$  em cada região  $r$ ; assim, as relações (6) e (8) permanecem válidas  $\forall r$ . A vantagem neste caso é que, embora a proporção  $p_1(r)$  varie de região para região, os parâmetros  $\mu_1$ ,  $\sigma_1^2$ ,  $\mu_2$ ,  $\sigma_2^2$ , intrínsecos às distribuições  $f_1$  e  $f_2$ , permanecem inalterados. Em outras palavras, cada

nova região analisada contribui ao sistema com 2 novas equações ao passo que acrescenta apenas uma incógnita —  $p_1(r)$ . Conclui-se que, se  $R$  é o número total de regiões, há  $4 + R$  incógnitas e  $2R$  equações do tipo:

$$\begin{cases} \mu(r) = p_1(r)\mu_1 + (1 - p_1(r))\mu_2 \\ \sigma^2(r) = p_1(r) \left[ \sigma_1^2 + (\mu(r) - \mu_1)^2 \right] + \\ (1 - p_1(r)) \left[ \sigma_2^2 + (\mu(r) - \mu_2)^2 \right] \end{cases} \quad (11)$$

Trata-se, no entanto, de um sistema de equações não-lineares. Na primeira etapa do algoritmo, propõe-se uma solução numérica ao problema. Entretanto, conforme será abordado na seção 2.3, é mais conveniente expressar a segunda relação em 11 em termos dos momentos de segunda ordem  $\lambda(r)$  de cada região, em substituição às variâncias. Da definição de  $\lambda$  aplicada à densidade (1):

$$\lambda(r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot [p_1(r)f_1(x) + (1 - p_1(r))f_2(x)] dx, \quad (12)$$

e o sistema (11) se reduz a:

$$\begin{cases} \mu(r) = p_1(r)\mu_1 + (1 - p_1(r))\mu_2 & \text{(a)} \\ \lambda(r) = p_1(r)\lambda_1 + (1 - p_1(r))\lambda_2 & \text{(b)} \end{cases} \quad (13)$$

Em (13)-(b), os momentos  $\lambda(r)$  podem ser calculados a partir das estimativas de  $\mu(r)$  e  $\sigma^2(r)$ :

$$\lambda(r) = \sigma^2(r) + [\mu(r)]^2. \quad (14)$$

Inversamente, uma vez calculados os momentos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , determinam-se as variâncias  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  a partir da mesma relação.

Obtidos  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\sigma_1^2$ ,  $\sigma_2^2$ , todos os parâmetros necessários ao cálculo do limiar ótimo de binarização ficam determinados, uma vez que, conforme será mostrado na seção 2.3.1, há uma expressão simples em forma fechada que relaciona  $p_1$  àquelas grandezas e à média e variância globais da imagem.

## 2.2 Particionamento da Imagem

Optou-se, por simplicidade, em dividir a imagem em regiões retangulares que não se sobrepõem, mas que são contíguas, formando, assim, uma partição do suporte da imagem. Em particular, note-se que há mais equações do que incógnitas se  $R > 4$ . Entretanto, o número de regiões não pode ser arbitrariamente grande, pois quanto maior  $R$ , menor o número de *pixels* em cada região, o que diminui a precisão das estimativas de  $\mu(r)$  e  $\sigma^2(r)$  segundo (9) e (10). Observou-se que a divisão em  $R_j = 3$  regiões na horizontal por  $R_i = 3$  regiões na vertical, num total de  $R = R_i \cdot R_j = 9$  regiões, foi suficiente para a convergência do algoritmo que será descrito a seguir, nos casos analisados.

## 2.3 Primeira Etapa

Na proposta de uma solução iterativa ao sistema (11) surge o problema de se determinar uma estimativa inicial antes do início das iterações, seja ela referente às

médias e variâncias associadas às distribuições  $f_1$  e  $f_2$  ou às proporções de objeto em cada região  $r$  da imagem,  $p_1(r)$ . No caso das médias  $\mu_1$  e  $\mu_2$  uma informação ainda não considerada pode ser utilizada com este objetivo: observe-se, da equação (13)-(a), que a média global  $\mu(r)$  associada a cada região é a média ponderada de  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . Desta forma:

$$\mu_1 \leq \mu(r) \leq \mu_2, \forall r, \quad (15)$$

se for arbitrado  $\mu_1$  como o menor valor entre  $\mu_1$  e  $\mu_2$ .

Como as desigualdades 15 se mantêm em todas as regiões, tem-se:

$$\mu_1 \leq \min_{1 \leq r \leq R} [\mu(r)], \quad (16)$$

$$\mu_2 \geq \max_{1 \leq r \leq R} [\mu(r)]. \quad (17)$$

Uma possível estimativa inicial de  $\mu_1$  e  $\mu_2$  consiste, pois, no menor e no maior valor dentre todas as médias estimadas das  $R$  regiões da imagem, respectivamente.

Estimativas deste tipo não são tão imediatas para as variâncias  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$ . No entanto, elas surgem também para os momentos de segunda ordem  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , se eles forem utilizados em substituição às variâncias.

Analogamente às relações obtidas para as médias  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , tem-se, da equação (13)-(b):

$$\lambda_1 \leq \min_{1 \leq r \leq R} [\lambda(r)], \quad (18)$$

$$\lambda_2 \geq \max_{1 \leq r \leq R} [\lambda(r)]. \quad (19)$$

Uma observação adicional acerca do momento de ordem 2 pode ainda ser útil na escolha da estimativa inicial de  $\lambda_2$ . Sabe-se que o momento de ordem 2 associado a uma distribuição é igual à variância mais o quadrado do valor esperado [7], ou seja, para a distribuição  $f_2$ :

$$\lambda_2 = \mu_2^2 + \sigma_2^2. \quad (20)$$

Por ser a variância  $\sigma_2^2$  não-negativa, segue:

$$\lambda_2 \geq \mu_2^2. \quad (21)$$

Considerando-se também a desigualdade (19):

$$\lambda_2 \geq \max(\mu_2^2, \max_{1 \leq r \leq R} [\lambda(r)]), \quad (22)$$

ou seja, a estimativa inicial de  $\lambda_2$  pode ser tomada como o maior valor dentre  $\mu_2^2$  e todos os momentos  $\lambda(r)$ .

Desta forma, dispõe-se também de uma estimativa inicial para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , desde que se possa estimar os momentos  $\lambda(r)$  associados a cada região  $r$ . Felizmente, esta grandeza é obtida diretamente das estimativas  $\mu(r)$  e  $\sigma^2(r)$ , conforme a equação (14).

Também as variâncias  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$ , necessárias para o cálculo do limiar  $L$  em (2), podem ser obtidas a partir de  $\lambda_1$  e  $\mu_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\mu_2$ , segundo a mesma relação.

Isto sugere que, em vez de se calcular  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\sigma_1^2$ ,  $\sigma_2^2$  a partir diretamente das médias e variâncias em cada região da imagem, sejam inicialmente calculados os momentos de ordem 2,  $\lambda(r)$ , a partir daquelas grandezas, e, só então,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , a partir do sistema (13). Somente após o cálculo destes parâmetros, seriam então estimadas  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$ .

Adotou-se uma solução iterativa a este sistema de equações não-lineares, baseada na observação de que, supostos conhecidos os valores de  $p_1(r)$ ,  $1 \leq r \leq R$ , tem-se um sistema linear nas incógnitas  $\mu_1$  e  $\mu_2$  a partir da relação (a) em (13), e outro sistema linear, em  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , a partir da relação (b) em (13). Da mesma forma, supostos conhecidos  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , a equação (13) corresponde a um único sistema linear nas incógnitas  $p_1(r)$ ,  $1 \leq r \leq R$ .

O método iterativo, baseado na resolução destes sistemas lineares, fica assim esquematizado:

1. adotam-se  ${}^0\mu_1 = \min_{1 \leq r \leq R} [\mu(r)]$ ,  ${}^0\mu_2 = \max_{1 \leq r \leq R} [\mu(r)]$ ,  ${}^0\lambda_1 = \min_{1 \leq r \leq R} [\lambda(r)]$  e  ${}^0\lambda_2 = \max({}^0\mu_2^2, \max_{1 \leq r \leq R} [\lambda(r)])$  como estimativas iniciais de  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ ;
2. a partir de  ${}^0\mu_1$ ,  ${}^0\mu_2$ ,  ${}^0\lambda_1$  e  ${}^0\lambda_2$ , calcula-se uma estimativa de  $\mathbf{p} = [p_1(1) \ p_1(2) \ \cdots \ p_1(R)]^T$  pela solução do sistema (13), linear em  $\mathbf{p}$ ;
3. a partir de  $\mathbf{p}$  estimado no item 2, obtêm-se novas estimativas de  $\mu_1$  e de  $\mu_2$  pela resolução do sistema linear (13)-(a), pelo método dos mínimos quadrados com a restrição de que as raízes sejam positivas;
4. a partir de  $\mathbf{p}$  e de  $\mu_1$  e  $\mu_2$  estimados no item 3, obtêm-se novas estimativas de  $\lambda_1$  e de  $\lambda_2$  pela resolução do sistema linear (13)-(b), pelo método dos mínimos quadrados com a restrição:
$$\lambda_1 \leq \min_{1 \leq r \leq R} [\lambda(r)]$$

$$\lambda_2 \geq \max(\mu_2^2, \max_{1 \leq r \leq R} [\lambda(r)]);$$
5. determina-se a diferença:
$$\mathbf{d} = [\mu_1 \ \mu_2 \ \lambda_1 \ \lambda_2]^T - [{}^0\mu_1 \ {}^0\mu_2 \ {}^0\lambda_1 \ {}^0\lambda_2]^T.$$
 Se o maior elemento de  $\mathbf{d}$ , em módulo, for maior do que um valor  $\epsilon$  especificado, segundo um critério de parada, então adotam-se  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  como novos valores de  ${}^0\mu_1$ ,  ${}^0\mu_2$ ,  ${}^0\lambda_1$  e  ${}^0\lambda_2$  e reinicia-se o processo, a partir do item 2. Caso contrário, foi satisfeito o critério de parada.

### 2.3.1 Cálculo da Proporção $p_1$ de Objeto (Trajetória) na Imagem

Os métodos propostos na seção anterior permitem o cálculo de  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\sigma_1^2$ ,  $\sigma_2^2$ . Para a determinação do limiar ótimo de binarização a partir da equação (2), resta apenas determinar  $p_1$ .

Nas equações (6) e (8) constata-se que apenas este parâmetro permanece indeterminado. Como se trata de equações lineares nesta incógnita, uma alternativa é simplesmente isolá-la em qualquer uma das equações, o que fornece uma expressão para seu cálculo.

Em princípio, deveriam ser obtidos valores idênticos independentemente da equação a partir da qual se opte por calcular  $p_1$ . No entanto, isto na prática não ocorre, em virtude dos procedimentos numéricos adotados no cálculo de todas as variáveis envolvidas. Optou-se, portanto, por aplicar no cálculo de  $p_1$  o método dos mínimos quadrados, para satisfazer simultaneamente as duas equações com o menor erro quadrático possível. Reescrevendo (6) e (8):

$$\begin{cases} \delta_{1,2} \cdot p_1 = \delta_2 \\ (\alpha + \delta_1^2 - \delta_2^2) \cdot p_1 = \beta - \delta_2^2 \end{cases}, \quad (23)$$

onde  $\alpha = \sigma_1^2 - \sigma_2^2$ ,  $\beta = \sigma^2 - \sigma_2^2$ ,  $\delta_{1,2} = \mu_1 - \mu_2$ ,  $\delta_1 = \mu - \mu_1$  e  $\delta_2 = \mu - \mu_2$ .

Trata-se de um sistema linear em  $p_1$ , cuja solução pelo método dos mínimos quadrados conduz à solução em forma fechada aqui utilizada:

$$p_1 = \frac{\delta_{1,2} \cdot \delta_2 + [\alpha + \delta_1^2 - \delta_2^2] \cdot [\beta - \delta_2^2]}{\delta_{1,2}^2 + [\alpha + \delta_1^2 - \delta_2^2]^2}. \quad (24)$$

## 2.4 Segunda Etapa

A primeira etapa do método proposto, apresentada na seção anterior, fornece uma primeira estimativa do limiar de binarização. Uma segunda etapa, que passa agora a ser descrita, se faz necessária à obtenção do valor ótimo deste limiar.

O objetivo é calcular com maior precisão as médias e variâncias associadas às distribuições de probabilidade do objeto (trajetória) e do fundo do que as fornecidas pela resolução ao sistema (11) ou (13) proposta. A diferença é que, neste estágio, já se dispõe de uma estimativa do limiar de binarização, ou seja, já é possível uma separação entre objeto e fundo na imagem, ainda que alguns *pixels* sejam classificados incorretamente.

A segunda etapa do método é baseada na separação das duas distribuições a partir de estimativas do limiar de binarização, a primeira das quais é obtida na etapa descrita na seção 2.3. O que se observou é que a aplicação dos estimadores da média (9) e da variância (10) apenas aos *pixels* associados a cada distribuição, segundo a binarização utilizando a primeira estimativa do limiar, conduziu a valores mais precisos daquelas grandezas do que os obtidos na primeira etapa e então utilizados no cálculo deste limiar. Conseqüentemente, uma segunda estimativa do limiar, mais próxima do valor ótimo, pôde ser obtida a partir da equação (2). Como a aplicação deste limiar conduz a menos classificações incorretas do que a do anterior, as médias e variâncias obtidas para cada distribuição a partir dos estimadores (9) e (10) são ainda mais precisas. Isto sugere a sucessiva aplicação dos estimadores aos *pixels* que, segundo os limiares calculados, pertençam a cada distribuição, e a atualização daqueles limiares com base nas novas médias e variâncias obtidas. Já que a cada vez menos *pixels* são classificados incorretamente, o limiar calculado converge para o valor ótimo.

O processo iterativo fica assim esquematizado:

1. calcula-se a primeira estimativa  $L_0$  do limiar de binarização, utilizando-se o método apresentado na seção 2.3;
2. determinam-se estimativas de  $\mu_1$  e  $\sigma_1^2$  pela aplicação dos estimadores (9) e (10) aos *pixels* com nível de cinza inferior a  $L_0$ ;
3. determinam-se estimativas de  $\mu_2$  e  $\sigma_2^2$  pela aplicação dos estimadores (9) e (10) aos *pixels* com nível de cinza superior a  $L_0$ ;
4. a partir de  $\mu_1$ ,  $\sigma_1^2$ ,  $\mu_2$  e  $\sigma_2^2$ , determina-se  $p_1$  a partir da equação (24);
5. calcula-se uma nova estimativa do limiar  $L$  a partir da equação (2);
6. determina-se a diferença  $d = L - L_0$ . Se  $d$  for, em módulo, maior do que um valor  $\epsilon$  especificado, segundo um critério de parada, então adota-se  $L$  como

novo valor de  $L_0$  e reinicia-se o processo, no item 2. Caso contrário, foi satisfeito o critério de parada.

### 3 Resultados Experimentais

O algoritmo aqui proposto foi aplicado a imagens sintéticas e reais. As tabelas 1 e 2 mostram os parâmetros teóricos utilizados na geração de duas imagens sintéticas de exemplo, bem como os parâmetros correspondentes obtidos pelo algoritmo. Observa-se, nestas tabelas, que o método permitiu determinar todos os parâmetros com erro inferior a 3%. Na figura 1 ilustra-se o resultado da binarização para o caso da primeira imagem sintética (tabela 1): em (a), apresenta-se uma imagem sintética degradada com ruído gaussiano aditivo, em (c), o seu histograma ressaltando-se o limiar calculado e utilizado na binarização, e em (b), a imagem binarizada obtida. Como o limiar obtido é bastante próximo do valor teórico, e como as duas distribuições não se sobrepõem, todos os *pixels* da imagem são classificados corretamente.

Como exemplo da aplicação do algoritmo a uma imagem real, apresenta-se na figura 2-(a) a imagem de uma trajetória sobre um fundo, juntamente com seu histograma com destaque para o limiar de binarização obtido (figura 2-(c)) e com o resultado da binarização (figura 2-(b)). Novamente as duas distribuições não se sobrepõem, e como o limiar calculado se situa entre elas, todos os *pixels* são classificados corretamente.

Por fim, apresenta-se, na figura 3-(a), uma imagem sintética altamente degradada como com ruído gaussiano aditivo, de tal forma que passa a haver sobreposição entre as duas distribuições. Neste caso, se observa (figura 3-(c)) que nem mesmo o limiar teórico é capaz de separar corretamente as duas distribuições, de forma que vários *pixels* são classificados incorretamente durante a binarização (figura 3-(b)). Entretanto, observou-se neste caso que a utilização de um filtro que reduza o ruído aditivo pode permitir separar as duas distribuições e utilizar com sucesso a mesma técnica para a binarização. O teste foi realizado utilizando o filtro de Wiener [9]. Na figura 4-(a), mostra-se o resultado da aplicação deste filtro à imagem 3-(a). Em 4-(c), é apresentado o histograma correspondente, onde se nota que houve a redução do ruído aditivo e a conseqüente separação das duas distribuições. O novo limiar de binarização, calculado com o método aqui proposto, situa-se entre as duas distribuições. Em 4-(b), é apresentada a imagem binarizada a partir deste limiar, com todos os *pixels* classificados corretamente.

### 4 Conclusão

Neste artigo, foi proposto um algoritmo para determinação dos parâmetros estatísticos de imagens de 2 regiões de reflectâncias constantes, necessário ao cálculo do limiar ótimo de binarização. O método se baseia em duas etapas iterativas, a primeira necessária à obtenção de uma primeira estimativa do limiar, a segunda ao cálculo do limiar ótimo por sucessivas aproximações das médias e variâncias das distribuições de probabilidade do objeto e do fundo. Este procedimento apresentou bom desempenho quando aplicado a imagens reais e sintéticas. Nes-

Parâmetro	Teórico	Calculado	Erro (%)
$\mu_1$	0,1000	0,0995	0,53
$\mu_2$	0,2000	0,2001	0,05
$\sigma_1^2 \cdot 10^4$	2,0000	1,9597	2,02
$\sigma_2^2 \cdot 10^4$	2,0000	1,9923	0,39
$\lambda_1$	0,0102	0,0101	1,08
$\lambda_2$	0,0402	0,0402	0,09
$p_1$	0,0368	0,368	0,05
limiar ( $L$ )	0,1435	0,1431	0,21

Tabela 1: Comparação entre os parâmetros teóricos utilizados na geração da imagem sintética 1 (figura 1) e os calculados.

Parâmetro	Teórico	Calculado	Erro (%)
$\mu_1$	0,3000	0,3003	0,10
$\mu_2$	0,5000	0,5000	0,00
$\sigma_1^2 \cdot 10^4$	3,0000	3,0604	2,01
$\sigma_2^2 \cdot 10^4$	2,0000	1,9885	0,57
$\lambda_1$	0,0903	0,0905	0,21
$\lambda_2$	0,2502	0,2502	0,00
$p_1$	0,0491	0,0491	0,00
limiar ( $L$ )	0,4062	0,4070	0,18

Tabela 2: Comparação entre os parâmetros teóricos utilizados para gerar a imagem sintética 2 e os calculados.

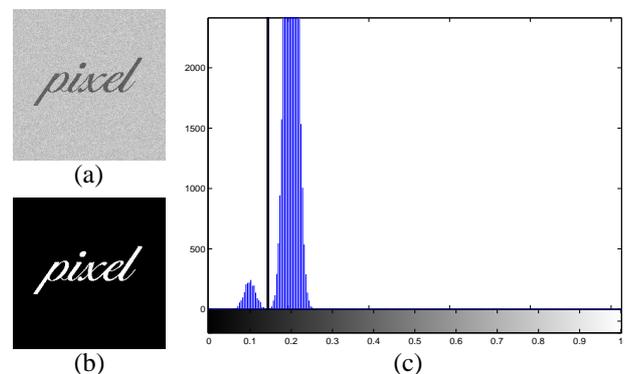


Figura 1: (a) Exemplo de uma imagem sintética com 2 regiões de reflectância afetadas por ruído gaussiano aditivo. (b) Imagem binarizada a partir do limiar calculado. (c) Histograma correspondente, com destaque para o limiar calculado.

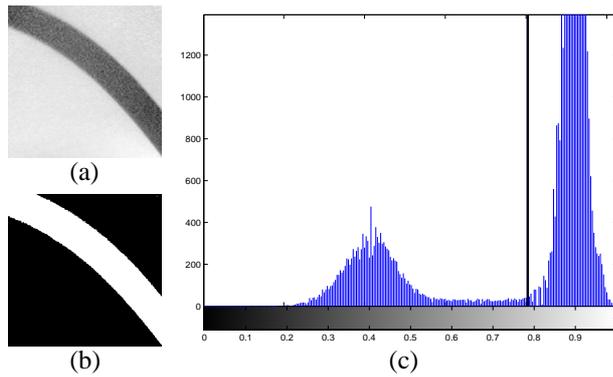


Figura 2: (a) Exemplo de uma imagem real de uma trajetória sobre um fundo. (b) Imagem binarizada a partir do limiar calculado. (c) Histograma correspondente, com destaque para o limiar calculado.

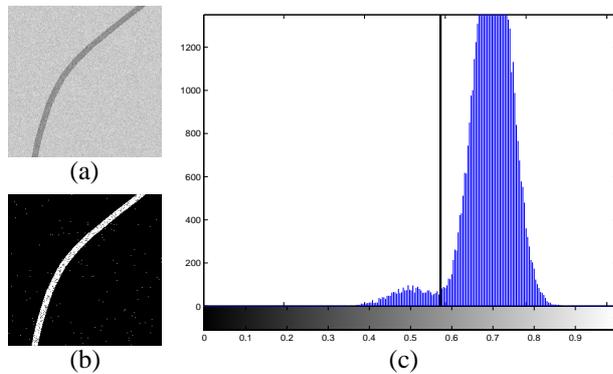


Figura 3: (a) Exemplo de uma imagem sintética com 2 regiões de reflectância altamente degradadas por ruído gaussiano aditivo. (b) Imagem binarizada a partir do limiar teórico ótimo. (c) Histograma correspondente, com destaque para o limiar teórico; observa-se a sobreposição das duas distribuições.

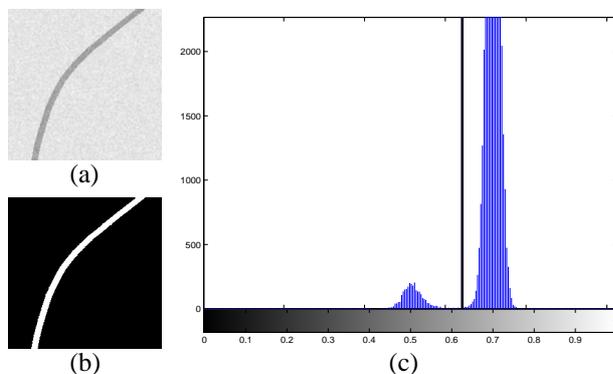


Figura 4: (a) Resultado da aplicação do filtro de Wiener à imagem 3. (b) Imagem binarizada a partir do limiar calculado. (c) Histograma correspondente, com destaque para o limiar calculado.

te caso, observou-se que os parâmetros foram calculados com erros inferiores a 3% em relação aos utilizados na geração das imagens.

Por se basear em métodos numéricos iterativos, o algoritmo se mostrou adequado a sistemas que não requerem o cálculo do limiar em tempo real, ou ainda em que apenas as proporções de objeto e de fundo,  $p_1$  e  $1 - p_1$ , possam variar consideravelmente de uma imagem para outra ao longo do processo. Um exemplo desta situação é a guiagem de manipuladores robóticos por servo-visão, cuja pesquisa conduziu ao algoritmo proposto. O processo de binarização se faz necessário para extrair das imagens as trajetórias a serem seguidas. O parâmetro  $p_1$  claramente pode variar de uma imagem para outra, conforme o campo de visão presente mais ou menos trajetória em relação ao fundo. Os demais parâmetros permanecem inalterados e só necessitam ser calculados uma vez. A cada nova imagem adquirida, o valor de  $p_1$  pode então ser atualizado a partir da equação (24), permitindo o cálculo do limiar ótimo por (2) e minimizando a probabilidade de classificações incorretas durante todo o processo.

Outras aplicações que justificam o emprego do algoritmo são a binarização de imagens de texto para reconhecimento óptico de caracteres e a compressão de imagens de 2 regiões de reflectâncias, casos em que o limiar não necessita ser determinado em tempo real.

## Referências

- [1] Horn, B. K. P., *Robot Vision*. The MIT Electrical Engineering and Computer Science Series, The MIT Press, 1998.
- [2] Bauchspiess, A., Alfaro, S. C. A., Trier, W., e Drews, P., “Sistema de visão computacional inteligente para robôs de soldagem,” *3<sup>o</sup> Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, Setembro de 1997.
- [3] Chow, C. K. e Kaneko, T., “Automatic boundary detection of the left ventricle from cineangiograms,” *Computers and Biomedical Research*, vol. 5, pp. 388–410, Agosto de 1972.
- [4] Jayant, N. S. e Noll, P., *Digital Coding of Waveforms*. Prentice-Hall Signal Processing Series, Englewood Cliffs, New Jersey 07632: Prentice-Hall, Inc., 1984.
- [5] Gonzalez, R. C. e Woods, R. E., *Processamento de Imagens Digitais*. Rua Pedroso Alvarenga, 1245 – cj. 22, São Paulo – SP, Brasil: Edgard Blücher, 2000.
- [6] Apostol, T. M., *Cálculo*, vol. 2. Loreto, 13–15, Local B, 08029 Barcelona: Editora Reverté Ltda., 1994.
- [7] Papoulis, A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [8] Helstrom, C. W., *Probability and Stochastic Processes for Engineers*. 866 Third Avenue, New York, New York 10022: Macmillan Publishing Company, 1984.
- [9] Lim, J. S., *Two-Dimensional Signal and Image Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1990.