Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 2 – 2012/1 (31/05/2012)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de três questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda resposta deverá está contida nas folhas da prova. Folhas de rascunho serão fornecidas caso necessário, mas não devem ser entregues.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	Nota
Q1	
Q2	
Q3	
Total	

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 1 (3,5 pontos)

Um sistema de transmissão digital transmite com potência 1mW e sofre uma atenuação de 80dB. Queremos transmitir a maior taxa de bits possível em um canal em banda passante com largura de banda igual a 1MHz, desde que seja atingida uma taxa de erro de bit menor ou igual a 10^{-4} . São utilizados pulsos de Nyquist com fator de roll-off igual a 0,25. Sabendo que temos na recepção um ruído com densidade espectral de potência igual a -190 dBW/Hz. Podemos usar qualquer esquema M-PSK ou M-QAM (com constelação quadrada). Qual a taxa de bits que poderá ser alcançada?

A potência recebida é dada por

$$P_{RX}=10^{-8}P_{TX}=10^{-11}\,\mathrm{W}$$

A taxa de símbolos é dada por

$$R_S=\frac{B}{1+r}=\frac{10^6}{1{,}25}=0{,}8\times10^6$$

Temos também que

$$\frac{N_0}{2}=10^{-19}\,\mathrm{W/Hz}\Rightarrow N_0=2\times10^{-19}\,\mathrm{W/Hz}$$

e

$$E_s=\frac{P_{RX}}{R_s}=\frac{10^{-11}}{0{,}8\times10^6}=1{,}25\times10^{-17}\Rightarrow\frac{E_s}{N_0}=0{,}625\times10^2$$

Com BPSK,

$$P_b=Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)=Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)=Q\left(\sqrt{1{,}25\times10^2}\right)=Q(11{,}2)=2{,}5\times10^{-29}$$

ComQPSK,

$$P_b=Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)=Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)=Q\left(\sqrt{62{,}5}\right)=Q(7{,}9)=1{,}3\times10^{-15}$$

Com 8-PSK,

$$P_b\approx\frac{2}{\log_2 M}Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right)=\frac{2}{3}Q\left(\sqrt{1{,}25\times10^2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=\frac{2}{3}Q(4{,}2785)=6{,}3\times10^{-6}$$

Com 16-QAM, a probabilidade de erro de símbolo em cada componente de fase e quadratura é

$$P_{SC}=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}\frac{E_s}{N_0}}\right)=2\left(\frac{3}{4}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3}{15}62{,}5}\right)=\frac{3}{2}Q(3{,}54)=3\times10^{-4}$$

Como em cada componente são transmitidos $(\log_2 M)/2=2$ bits, a probabilidade de erro de bit é

$$P_b\approx\frac{1}{2}P_{SC}=1{,}5\times10^{-4}$$

Devemos usar portanto **8-PSK** para garantir a taxa de erro de bit desejada.

Neste caso, temos 3 bits por símbolo, e a taxa de bits é

$$R_b=R_s\log_2 M=3\left(0{,}8\times10^6\right)=2{,}4\,\mathrm{Mbps}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 2 (3,5 pontos)

Queremos transmitir 3 bits por símbolo utilizando modulação digital em fase e quadratura. Para isso temos à disposição três moduladores diferentes: 8-PSK, 8-QAM retangular e 8-QAM em cruz. Qual deles apresenta o melhor desempenho em termos de BER para uma dada razão sinal ruído? Qual o pior? Considere uma RSR alta.

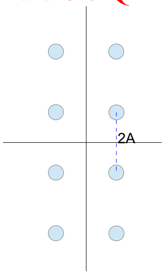
Para altas razões sinal-ruído, a probabilidade de erro é dominada pelos pontos mais próximos da constelação. Seja a distância entre dois pontos igual a *d*, a probabilidade de erro para um ponto vizinho é dada por

$$P_e = Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right) \text{ , com } \sigma = \sqrt{N_0/2} \ .$$

Para o 8-PSK a BER é dada aproximadamente por (ver notas de aula)

$$P_b \approx \frac{2}{\log_2 M} Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) = \frac{2}{3} Q\left(0{,}5412\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

Para o 8-QAM retangular, temos a constelação



e a distância é dada por 2A.

A energia média por símbolo é dada por

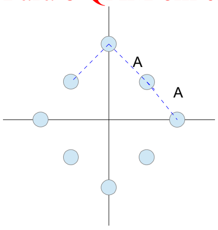
$$E_s = \frac{4}{8}(2A^2) + \frac{4}{8}(A^2 + 9A^2) = 6A^2 \quad \text{e} \quad P_e = Q\left(\frac{A}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{6}\frac{2}{N_0}}\right) \ .$$

Sabendo que metade dos símbolos tem 3 vizinhos e a outra metade 2 vizinhos, e supondo apenas um bit errado a cada erro de símbolo

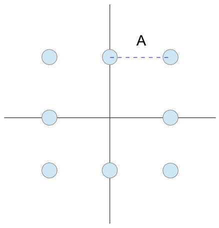
$$P_b = \frac{5}{2}\frac{1}{3} Q\left(\sqrt{\frac{1}{3}\frac{E_s}{N_0}}\right) = \frac{5}{6} Q\left(0{,}5774\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \ .$$

Alternativamente, poderia ser feito considerando-se dois PAMs, um 2-PAM e um 4-PAM, mas neste caso deve ser tomado cuidado, pois a Eb a ser usada na fórmula para cada PAM é diferente.

Para o QAM em cruz



, que equivale a



A energia média por símbolo é dada por

$$E_s=\frac{4}{8}(A^2)+\frac{4}{8}(2A^2)=\frac{3}{2}A^2 \quad \text{e} \quad P_e=Q\left(\frac{A/2}{\sqrt{N_0/2}}\right)=Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{3N_0}}\right) \quad .$$

Sabendo que todos símbolos têm 2 vizinhos, e supondo apenas um bit errado a cada erro de símbolo

$$P_b=\frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{1}{3}\frac{E_s}{N_0}}\right)=\frac{2}{3}Q\left(0,5774\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \quad .$$

Sabendo que quanto maior o argumento da função Q, melhor é o desempenho, temos na ordem do melhor para o pior:
8-QAM em cruz, 8-QAM retangular, e 8-PSK.

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 3 (4 pontos)

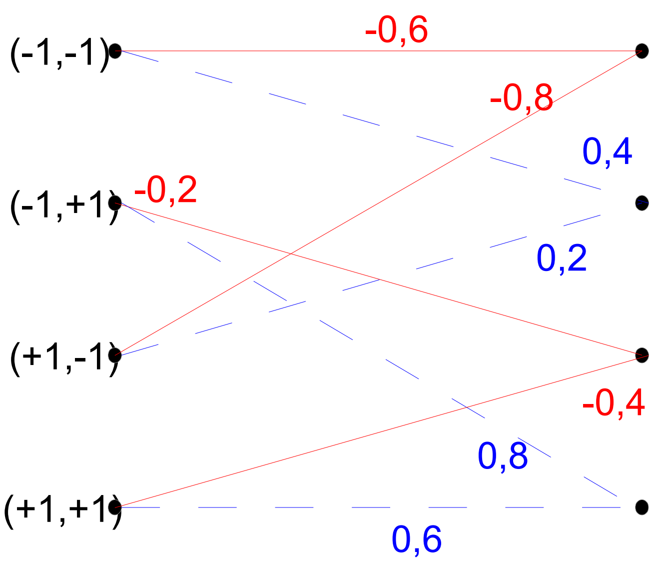
Um sistema BPSK apresenta um modelo de canal discreto
$h[k]=0{,}5\,\delta[k]+0{,}2\,\delta[k-1]-0{,}1\,\delta[k-2]$.
Após o filtro casado temos um ruído com variância $\sigma_w^2=0{,}02$, e suponha que os símbolos BPSK amostrados têm amplitude unitária.

a) Desenhe a treliça do decodificador MLSE de Viterbi
b) Qual a resposta no domínio da transformada *z* do equalizador zero-forcing ideal?
c) Projete um equalizador ZF e um MMSE com 4 taps cada. (Para o ZF utilize a fórmula para o MMSE, porém sem ruído, e lembre-se que neste caso teremos um ZF aproximado)
d) Qual o erro quadrático médio para os dois equalizadores do item (c)?
(Lembre-se, $MSE=E\left\{\left|y[k]-x[k]\right|^2\right\}$)

a)
o sinal recebido pode ser modelado como
$y[k]=x[k]*h[k]+n[k]=0{,}5\,x[k]+0{,}2\,x[k-1]-0{,}1\,x[k-2]+n[k]$
o decodificador MLSE tem M^{L-1} estados s, em que cada estado corresponde aos *L*-1 últimos bits, que podem ser descritos pela tabela abaixo

s[*k*]=(*x*[*k*-2],*x*[*k*-1])	*b*[*k*]	*y*[*k*]	*s*[*k*-1]
(-1,-1)	-1	-0,5-0,2+0,1= **-0,6**	(-1,-1)
	1	0,5-0,2+0,1= **0,4**	(-1,1)
(-1,1)	-1	-0,5+0,2+0,1= **-0,2**	(1,-1)
	1	0,5+0,2+0,1= **0,8**	(1,1)
(1,-1)	-1	-0,5-0,2-0,1= **-0,8**	(-1,-1)
	1	0,5-0,2-0,1= **0,2**	(-1,1)
(1,1)	-1	-0,5+0,2-0,1= **-0,4**	(1,-1)
	1	0,5+0,2-0,1= **0,6**	(1,1)

Que corresponde à treliça



UnB
departamento de engenharia elétrica

b)

A transformada z do canal é dada por

$$H(z)=0{,}5+0{,}2\,z^{-1}-0{,}1\,z^{-2}$$

O equalizador ZF ideal teria a resposta

$$F(z)=\frac{1}{H(z)}=\frac{1}{0{,}5+0{,}2\,z^{-1}-0{,}1\,z^{-2}}$$

c)

Podemos considerar um atraso u = 0 para simplificar. Com 4 taps (M=3), a equação fica equação

$$\begin{bmatrix} R_y[0] & R_y[-1] & R_y[-2] & R_y[-3] \\ R_y[1] & R_y[0] & R_y[-1] & R_y[-2] \\ R_y[2] & R_y[1] & R_y[0] & R_y[-1] \\ R_y[3] & R_y[2] & R_y[1] & R_y[0] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ f[3] \end{bmatrix}=E_s\begin{bmatrix} h^*[0] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Para ZF, consideramos ruído igual a zero

$$R_y[0]=E\{y[k]y^*[k]\}=E\{(0{,}5\,x[k]+0{,}2\,x[k-1]-0{,}1\,x[k-2])^2\}$$

Sabemos que $E\{(x[k-m])^2\}=E_s=1$ e $E\{x[k-m]x[k-l]\}=0\,;\ m\neq l$ portanto

$$R_y[0]=0{,}25+0{,}04+0{,}01=0{,}3 \quad .$$

Da mesma forma

$$\begin{aligned} R_y[1]&=E\{y[k]y^*[k+1]\}=R_y[-1] \\ &=E\{(0{,}5\,x[k]+0{,}2\,x[k-1]-0{,}1\,x[k-2])(0{,}5\,x[k+1]+0{,}2\,x[k]-0{,}1\,x[k-1])\} \\ &=0{,}1-0{,}02=0{,}08 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y[2]&=E\{y[k]y^*[k+2]\}=R_y[-2] \\ &=E\{(0{,}5\,x[k]+0{,}2\,x[k-1]-0{,}1\,x[k-2])(0{,}5\,x[k+2]+0{,}2\,x[k+1]-0{,}1\,x[k])\} \\ &=-0{,}05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y[3]&=E\{y[k]y^*[k+3]\}=R_y[-3] \\ &=E\{(0{,}5\,x[k]+0{,}2\,x[k-1]-0{,}1\,x[k-2])(0{,}5\,x[k+3]+0{,}2\,x[k+2]-0{,}1\,x[k+1])\} \\ &=0 \end{aligned}$$

Ou seja, temos que resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}08 & -0{,}05 & 0 \\ 0{,}08 & 0{,}3 & 0{,}08 & -0{,}05 \\ -0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}3 & 0{,}08 \\ 0 & -0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ f[3] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

, ou seja

$$\begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ f[3] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1{,}96 \\ -0{,}728 \\ 0{,}596 \\ -0{,}28 \end{bmatrix}$$

, e a estimativa após equalização será

$$\hat{x}_{ZF}[k]=1{,}96\,y[k]-0{,}728\,y[k-1]+0{,}596\,y[k-2]-0{,}28\,y[k-3]$$

Para o MMSE muda o cálculo dos $R_y[n]$, sabendo que $E\{(n[k-m])^2\}=\sigma_w^2=0{,}02$ e $E\{n[k-m]x[k-l]\}=0$, portanto

$$R_y[0]=E\{y[k]y^*[k]\}=E\{(0{,}5\,x[k]+0{,}2\,x[k-1]-0{,}1\,x[k-2]+n[k])^2\}=3{,}2$$

. Todos os outros valores são iguais, já que $E\{n[k-m]n[k-l]\}=0\,;\ m\neq l$.

Agora, temos que resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 0{,}32 & 0{,}08 & -0{,}05 & 0 \\ 0{,}08 & 0{,}32 & 0{,}08 & -0{,}05 \\ -0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}32 & 0{,}08 \\ 0 & -0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ f[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$, ou seja $$\begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ f[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}788 \\ -0{,}602 \\ 0{,}484 \\ -0{,}215 \end{bmatrix}$$, e a estimativa após equalização será

$$\hat{x}_{MMSE}[k] = 1{,}788\, y[k] - 0{,}602\, y[k-1] + 0{,}484\, y[k-2] - 0{,}215\, y[k-3]$$

d)

Lembrando que

$$y[k] = 0{,}5\, x[k] + 0{,}2\, x[k-1] - 0{,}1\, x[k-2] + n[k]$$

$$\hat{x}_{ZF}[k] = 1{,}96\, y[k] - 0{,}728\, y[k-1] + 0{,}596\, y[k-2] - 0{,}28\, y[k-3]$$

Portanto para o ZF

$$\begin{aligned} \hat{x}_{ZF}[k] = {} & 0{,}98\, x[k] + 0{,}028\, x[k-1] - 0{,}0436\, x[k-2] + 0{,}052\, x[k-3] - 0{,}1156\, x[k-4] \\ & + 0{,}028\, x[k-5] + 1{,}96\, n[k] - 0{,}728\, n[k-1] + 0{,}596\, n[k-2] - 0{,}28\, n[k-3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MSE_{ZF} = E\left\{\left|\hat{x}_{ZF}[k] - x[k]\right|^2\right\} = {} & 0{,}02^2 + 0{,}028^2 + 0{,}0436^2 + 0{,}052^2 + 0{,}1156^2 + 0{,}028^2 + \ldots \\ & \ldots + 1{,}96^2(0{,}02) + 0{,}728^2(0{,}02) + 0{,}28^2(0{,}02) = 0{,}1089 \end{aligned}$$

e parao o MMSE

$$\begin{aligned} \hat{x}_{ZF}[k] = {} & 0{,}8942\, x[k] + 0{,}0569\, x[k-1] - 0{,}0574\, x[k-2] + 0{,}0494\, x[k-3] - 0{,}0913\, x[k-4] \\ & + 0{,}0215\, x[k-5] + 1{,}7885\, n[k] - 0{,}6016\, n[k-1] + 0{,}4836\, n[k-2] - 0{,}2149\, n[k-3] \end{aligned}$$

$$MSE_{MMSE} = E\left\{\left|\hat{x}_{MMSE}[k] - x[k]\right|^2\right\} = 0{,}1058$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Fórmulas Úteis

Integrais:

$$\int x \sin ax\, dx = \frac{1}{a^2}(\sin ax - ax\cos ax)$$

$$\int x^2 \sin ax\, dx = \frac{1}{a^3}(2ax\sin ax + 2\cos ax - a^2x^2\cos ax)$$

$$\int x \cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax\sin ax)$$

$$\int x^2 \cos ax\, dx = \frac{1}{a^3}(2ax\cos ax - 2\sin ax + a^2x^2\sin ax)$$

$$\int x e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$

$$\int x^2 e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$$

$$\int \frac{x}{a^4+x^4}dx = \frac{1}{2a^2}\tan^{-1}\frac{x^2}{a^2}$$

Funções Importantes:

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & , |t| < 1/2 \\ 1/2 & , |t| = 1/2 \\ 0 & , |t| > 1/2 \end{cases} \qquad \Delta(t) = \mathrm{rect}(t)(1-2|t|)$$

Tabela de Transformadas de Fourier:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$\delta(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} 1 \qquad 1 \overset{F}{\Leftrightarrow} \delta(f)$$

$$t^n e^{-at}u(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{n!}{(a+j2\pi f)^{n+1}} \qquad e^{-a|t|} \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)] \qquad e^{j2\pi f_0 t} \overset{F}{\Leftrightarrow} \delta(f-f_0)$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)] \qquad u(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

$$\mathrm{sgn}\ t \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{j\pi f} \qquad \mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} |\tau|\mathrm{sinc}(\pi f\tau)$$

$$\mathrm{sinc}(2\pi Bt) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|2B|}\mathrm{rect}(f/2B) \qquad \Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{\tau}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi f\tau}{2}\right)$$

$$k_1g_1(t)+k_2g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} k_1G_1(f)+k_2G_2(f) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$G(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} g(-f) \qquad g(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|a|}G\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$g(t-t_0) \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f)e^{-j2\pi ft_0} \qquad g(t)e^{j2\pi f_0 t} \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f-f_0)$$

$$g_1(t)*g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} G_1(f)G_2(f) \qquad g_1(t)g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} G_1(f)*G_2(f)$$

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \overset{F}{\Leftrightarrow} (j2\pi f)^n G(f) \qquad \int_{-\infty}^{t} g(x)dx \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{G(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}G(0)\delta(f)$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Identidades Trigonométricas:

$$\sin(2x) = 2\sin x \ \cos x \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \qquad \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\left(x + \tan^{-1}(-b/a)\right)$$

Probabilidade

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

eventos são independentes se $P(B|A) = P(B)$.

se $A_i,\ 1 \le i \le N$ são eventos disjuntos e $\cup_{i=1}^{N} A_i = S \ \Rightarrow \ P(B) = \sum_{i=1}^{N} P(B|A_i)P(A_i)$

Variáveis Aleatórias

$$P_{\mathrm{y}}(y) = \sum_i P_{\mathrm{x,y}}(x_i, y)$$

CDF $F_{\mathrm{X}}(x) = Pr(\mathrm{x} \le x)$ PDF $p_{\mathrm{x}}(x) = \frac{d F_{\mathrm{x}}(x)}{dx}$

v.a exponencial $p_{\mathrm{x}}(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$ v.a. Gaussiana $p_{\mathrm{x}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

$$E\{f(\mathrm{x})\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_{\mathrm{x}}(x) dx \qquad p_{\mathrm{x}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathrm{x,y}}(x, y) dy$$

Teorema Central do Limite $\mathrm{y}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{x}_i - \mu}{\sigma} \rightarrow Normal(0,1)$

Desigualdade de Chebyshev $Pr(|x - \bar{x}| \le k\sigma) \ge 1 - \frac{1}{k^2}$

Correlação $\sigma_{xy} = E\{(x - \bar{x})(y - \bar{y})\}$ Coeficiente de correlação $\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y \sigma_y}$

Estimação LMS

$\hat{\mathrm{x}}_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{x}_i$ com $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{n1} & \cdots & \cdots & R_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{01} \\ R_{02} \\ \vdots \\ R_{0n} \end{bmatrix}$, e $R_{ij} = E\{\mathrm{x}_i \mathrm{x}_j\}$

$$E\{\epsilon^2\} = R_{00} - (a_1 R_{01} + a_2 R_{02} + \cdots + a_n R_{0n})$$

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Processos Estocásticos

$$R_x(\tau)=E\{x(t)x(t+\tau)\} \qquad S_x(f)=F_\tau\{R_x(\tau)\}$$

$$y(t)=x(t)*h(t)\Rightarrow S_y(f)=|H(f)|^2 S_x(f) \text{ e } \bar{y}=H(0)\bar{x}$$

$$R_{x,y}(\tau)=E\{x(t)y(t+\tau)\}$$

x e y são descorrelatados se $R_{x,y}(\tau)=\bar{x}\,\bar{y}$ e são ortogonais se $R_{x,y}(\tau)=0$

Filtro de Wiener

$$H_{opt}(f)=\frac{S_m(f)}{S_m(f)+S_n(f)}$$

Transmissão Digital

filtro de recepção ótimo $H(f)=k\dfrac{P(-f)e^{-j2\pi f T_m}}{S_n(f)}$

$$P_e=Q\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad , \quad \beta^2=\frac{E_p+E_q-2E_{pq}}{N_0/2} \quad \text{, com } E_{pq}=\int_0^{T_m} p(t)q(t)dt$$

banda de transmissão com pulsos de Nyquist:

$B=(1+r)R_s$ para sistemas em banda passante, $B=(1+r)\dfrac{R_s}{2}$ em banda base

Probabilidade de Erro de Símbolo (P_e) e de Bit (P_b) de Esquemas de Modulação Comuns

$$P_{b,BPSK}=P_{b,QPSK}=Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \qquad P_{b,OOK}=Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_{b,2-FSK,coerente}=Q\left(\sqrt{\frac{E_b(1-\mathrm{sinc}(2\pi\Delta f T_s))}{N_0}}\right) \qquad P_{b,2-FSK,não-coerente}=\frac{1}{2}e^{-E_b/N_0}$$

$$P_{e,M-PAM}=2\left(\frac{M-1}{M}\right)Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2 M}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_{e,M-QAM}=1-(1-P_{e,M_1-PAM})(1-P_{e,M_2-PAM}), \qquad M_1M_2=M$$

$$P_{e,M-PSK}\approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b\log_2 M}{N_0}}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{M}\right)$$

Equalização TSE

$$F_{ZF}(z)=\frac{1}{H(z)} \qquad F_{MMSE}(z)=\frac{H^*(z)}{|H(z)|^2+\dfrac{S_x(z)}{S_n(z)}}$$

MMSE:

$$\begin{bmatrix} R_y[0] & R_y[-1] & \dots & R_y[-M] \\ R_y[1] & R_y[0] & \dots & R_y[1-M] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_y[M] & R_y[M-1] & \dots & R_y[0] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ \vdots \\ f[M] \end{bmatrix}=E_s\begin{bmatrix} h^*[u] \\ h^*[u-1] \\ \vdots \\ h^*[0] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$R_y[m]=E\{y[n+m]y[n]\},$$

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Equalização FSE

ZF: $\sum_{i=1}^{m} F_i(z) H_i(z) = z^{-u}$

MMSE:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{M} f_i E\{y_i[n-k] y_j^*[n-l]\} = E\{x_{n-u} y_j^*[n-l]\}, \qquad l=0,1,\dots,M; \quad j=1,2,\dots,m$$

Equalização MLSE

queremos obter a sequência xi que minimiza $\sum_i \left| y[i] - \sum_k h[k] x_{i-k} \right|^2$

Função Q

z	$Q(z)$	z	$Q(z)$
0.0	0.50000	2.0	0.02275
0.1	0.46017	2.1	0.01786
0.2	0.42074	2.2	0.01390
0.3	0.38209	2.3	0.01072
0.4	0.34458	2.4	0.00820
0.5	0.30854	2.5	0.00621
0.6	0.27425	2.6	0.00466
0.7	0.24196	2.7	0.00347
0.8	0.21186	2.8	0.00256
0.9	0.18406	2.9	0.00187
1.0	0.15866	3.0	0.00135
1.1	0.13567	3.1	0.00097
1.2	0.11507	3.2	0.00069
1.3	0.09680	3.3	0.00048
1.4	0.08076	3.4	0.00034
1.5	0.06681	3.5	0.00023
1.6	0.05480	3.6	0.00016
1.7	0.04457	3.7	0.00011
1.8	0.03593	3.8	0.00007
1.9	0.02872	3.9	0.00005