Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 3 – 2012/1 (27/09/2012)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de quatro questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda resposta deverá está contida nas folhas da prova. Folhas de rascunho serão fornecidas caso necessário, mas não devem ser entregues.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	**Nota**
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

UnB

departamento de engenharia elétrica

Questão 1 (2,5 pontos)

Um sistema de transmissão digital utiliza modulação QPSK em um canal com múltiplos percursos, caracterizado pela resposta ao impulso discreta

$$h[k]=0{,}02\,\delta[k]-0{,}01\,j\,\delta[k-1]\quad ,$$

e com ruído aditivo gaussiano com densidade espectral de potência $\frac{N_0}{2}=-170\,\mathrm{dBm/Hz}$.

O sistema transmite a uma taxa de 1Mbps.

Considerando o uso de OFDM com 4 subportadoras e prefixo cíclico de tamanho mínimo, qual a potência mínima no transmissor para atingirmos uma probabilidade de erro média de 10^{-5} ? (considere que a taxa de erro é muito maior na pior subportadora do que nas outras)

A razão $\frac{E_b}{N_0}$ em cada subportadora é dada por

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_k=|H_k|^2\frac{E_b}{N_0}\frac{T_s}{T_s+T_G}\quad .$$

Temos um atraso máximo de apenas uma amostra, e portanto $\frac{T_s}{T_s+T_G}=\frac{4}{5}$.

$$H_k=\sum_{n=0}^{N-1}h_n e^{-j2\pi\frac{nk}{N}}$$, e portanto

$$H_0=0{,}02-0{,}01\,j\,;\quad H_1=0{,}01\,;\quad H_2=0{,}02+0{,}01\,j\,;\quad H_3=0{,}03$$ e

$$|H_0|^2=0{,}0005\,;\quad |H_1|^2=0{,}0001\,;\quad |H_2|^2=0{,}0005\,;\quad |H_3|^2=0{,}0009\quad .$$

Considerando a BER do pior canal dominante, temos que

$$P_b\approx\frac{1}{4}Q\left(\sqrt{2|H_1|^2\frac{E_b}{N_0}\frac{4}{5}}\right)\leq 10^{-5}\Rightarrow Q\left(\sqrt{2|H_1|^2\frac{E_b}{N_0}\frac{4}{5}}\right)<4\times 10^{-5}$$

Portanto, pela tabela

$$\sqrt{2|H_1|^2\frac{E_b}{N_0}\frac{4}{5}}\geq 4\Rightarrow|H_1|^2\frac{E_b}{N_0}\geq 10\Rightarrow\frac{E_b}{N_0}\geq 10^9$$

Como $N_0=2\times 10^{-17}\times 10^{-3}\,\mathrm{W}$, portanto $E_b\geq 2\times 10^{-11}\,\mathrm{J}$

e $P=E_b R_b=2\times 10^{-11}\times 10^6=2\times 10^{-5}\,\mathrm{W}=-51\,\mathrm{dBm}$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 2 (2,5 pontos)

Um sistema OFDM utiliza uma IFFT de 2048 pontos, com espaçamento entre subportadoras de 12kHz. O intervalo de guarda (T_G) tem a duração de 1/8 do intervalo de símbolo útil (T_S). São utilizadas 16 subportadoras piloto e 10% das subportadoras são mantidas nulas nas bordas do espectro.

a) Qual a taxa de amostragem do sistema e sua largura de banda aproximada? Qual o atraso máximo no canal para que não haja interferência intersimbólica? (0,8 ponto)

b) Supondo o uso de modulação 64-QAM e codificação com taxa R= 3/4 em todas as subportadoras, qual a taxa de bits bruta deste sistema? (0,9 ponto)

c) Neste sistema são transmitidos pacotes de 1000 bytes, sendo que em cada pacote é enviado um preâmbulo com duração de três símbolos OFDM (incluindo intervalo de guarda), e um cabeçalho de sinalização de 8 bytes. É utilizado um código convolucional com 8 bits de terminação. Além disso, entre dois pacotes consecutivos é incluído um tempo de guarda de 50 μs. Considerando que 10% dos pacotes são perdidos, em quanto tempo conseguimos transmitir um arquivo de vídeo com tamanho de 1 GByte? (0,8 ponto)

a)

$$f_a = N\Delta f = 2048 \times 12 \times 10^3 = 24{,}576\,\text{MHz} \quad .$$

Considerando 90% das subportadoras, ou seja, 1844 subportadoras, a banda será de

$$B \approx 1844 \times \Delta f = 22{,}128\,\text{MHz}$$

$$T_G = \frac{T_s}{8} = \frac{1}{\Delta f}\frac{1}{8} = 10{,}4\,\mu\text{s} \geq \tau_{max}$$

b)

Temos K_d = 1844 – 16 = 1828 subportadoras de dados, com 6 bits em cada por símbolo.

Cada símbolo dura $T = T_s + T_g = \frac{9}{8}\frac{1}{\Delta f} = 93{,}75\,\mu\text{s}$

Portanto,

$$R_b = K_d R \log_2 M \frac{1}{T} = 1828\left(\frac{3}{4}\right)(6)\frac{1}{93{,}75 \times 10^{-6}} = 87{,}744\,\text{Mbps}$$

c)

Para 1 GByte são necessários N_{pac} = 10^6 pacotes de 1000 bytes. (ou 1024^2, dependendo da definição). Como 10% são perdidos, precisamos enviar $\frac{N_{pac}}{0{,}9} = 1{,}11 \times 10^6$ pacotes.

Cada pacote transmite N = 8000 bits de dados + 8(8) de sinalização + 8 bits de terminação de código = 8072 bits.

Cada símbolo OFDM transmite $K_d R \log_2 M = 8226\,\text{bits}$, ou seja, precisamos de apenas um símbolo por pacote.

Cada pacote leva então 3 símbolos de preâmbulo ($3T$) + 1 símbolo de dados (T) + 50 μs, ou seja T_{pac} = 425 μs.

O tempo total de transmissão será então

$T_{pac}N_{pac}$ =(1,11 x $10^{6)}$ (425 x 10^{-6}) = 472s

UnB

departamento de engenharia elétrica

Questão 3 (2,5 pontos)

Dado o código de bloco sistemático definido pela matriz de verificação de paridade:

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Qual a sua taxa? (0,5 pontos)
b) Qual a sua matriz geradora? (0,5 pontos)
c) Qual sua distância mínima? (0,7 pontos)
d) Em relação a um sistema sem codificação, qual seu ganho de codificação aproximado, para uma probabilidade de erro de 10^{-6}? (0,8 ponto)

a)
a matriz de verificação de paridade tem tamanho *n-k* X *n*. Portanto, neste caso *n* = 9 e *k* = 4, e a taxa é *R*=4/9.

b)

$$\mathbf{G}=[\mathbf{I}_k\,\mathbf{P}]\Rightarrow\mathbf{H}=[\mathbf{P}^T\,\mathbf{I}_{n-k}] \quad .$$

Neste caso

$$\mathbf{P}^T=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)
Para achar a distância mínima, podemos encontrar todas as palavras possíveis e achar aquela com o menor peso. As mensagens e palavras de código possíveis são

m	**c**	**m**	**c**
{0000}	{000000000},	{0001}	{000111001},
{0010}	{001001111},	{0011}	{001110110},
{0100}	{010010110},	{0101}	{010101111},
{0110}	{011011001},	{0111}	{011100000},
{1000}	{100011010},	{1001}	{100100011},
{1010}	{101010101},	{1011}	{101101100},
{1100}	{110001100},	{1101}	{110110101},
{1110}	{111000011},	{1111}	{111111010}

logo a distância mínima é igual a 3.

d)
t = 1
sem codificação

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)=10^{-6}\Rightarrow\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}=4{,}8\Rightarrow\frac{E_b}{N_0}=11{,}52=10{,}6\,\mathrm{dB}$$

com codificação

$$p_{ec}\approx 8\left(p_c\right)^2=10^{-6}\Rightarrow p_c=3{,}5\times10^{-4}$$, ou seja,

$$Q\left(\sqrt{\frac{8E_b}{9N_0}}\right)=3{,}5\times10^{-4}\Rightarrow\sqrt{\frac{8E_b}{9N_0}}=3{,}4\Rightarrow\frac{E_b}{N_0}=11{,}14\,\mathrm{dB}$$

Nesta BER o código não apresenta nenhum ganho de codificação. (Na verdade ele apresentaria ganhos de codificação com taxas de BER mais baixas, com decodificação soft ou lembrando que algumas sequências de 2 erros também podem ser corrigidas)

Questão 4 (2,5 pontos)

Um código convolucional sistemático é representado pelas seguintes expressões

$$c_k^{(1)} = m_k$$
$$c_k^{(2)} = m_{k-1} + m_{k-3}$$
$$c_k^{(3)} = m_{k-1} + m_{k-2} + m_{k-3}$$
$$c_k^{(4)} = m_k + m_{k-2} + m_{k-3}$$

a) Qual sua taxa? Justifique. (0,5 ponto)
b) Qual seu *constraint length*? Justifique. (0,5 ponto)
c) Qual a palavra de código para uma entrada m = [1 0 0 1 0]? (0,7 ponto)
d) Desenhe sua treliça (apenas uma transição é necessária). (0,8 ponto)

a)
o codificador tem um bit de entrada e 4 de saída. Consequentemente, sua taxa é R=1/4.

b)
O *constraint length* é o tamanho do registro de deslocamento, ou seja, a memória do codificador. Neste caso o CL = 4 (ou 3 em alguns textos, desconsiderando o bit atual).

c)

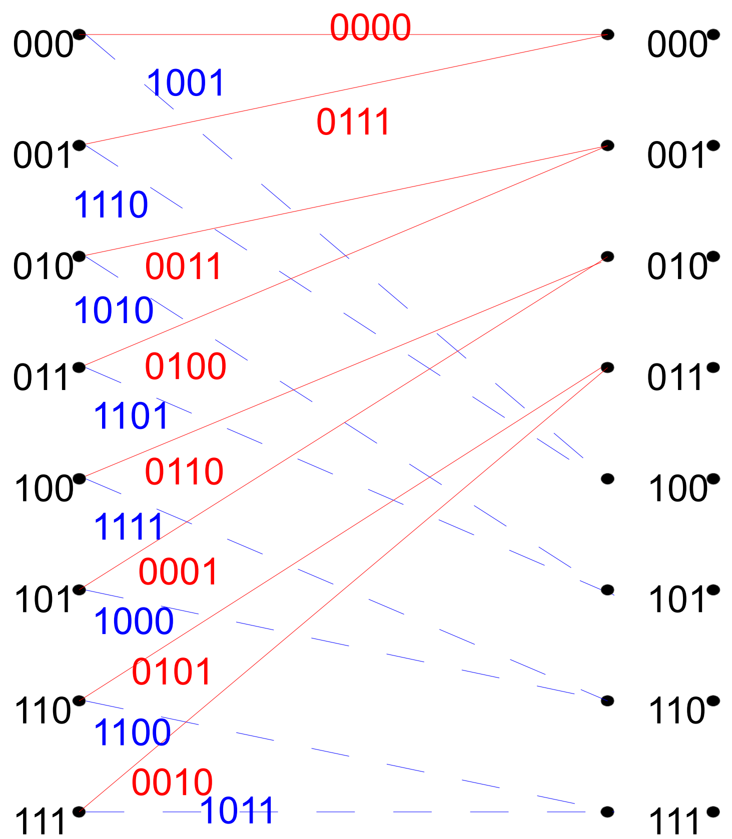
$$k=0,\ \ m_k=1 \quad \Rightarrow c_0^{(1)}=1,\ \ c_0^{(2)}=0,\ \ c_0^{(3)}=0,\ \ c_0^{(4)}=1$$
$$k=1,\ \ m_k=0,\ \ m_{k-1}=1 \quad \Rightarrow c_0^{(1)}=0,\ \ c_0^{(2)}=1,\ \ c_0^{(3)}=1,\ \ c_0^{(4)}=0$$
$$k=2,\ \ m_k=0,\ \ m_{k-1}=0,\ \ m_{k-2}=1 \quad \Rightarrow c_0^{(1)}=0,\ \ c_0^{(2)}=0,\ \ c_0^{(3)}=1,\ \ c_0^{(4)}=1$$
$$k=3,\ \ m_k=1,\ \ m_{k-1}=0,\ \ m_{k-2}=0, m_{k-3}=1 \quad \Rightarrow c_0^{(1)}=1,\ \ c_0^{(2)}=1,\ \ c_0^{(3)}=1,\ \ c_0^{(4)}=0$$
$$k=4,\ \ m_k=0,\ \ m_{k-1}=1,\ \ m_{k-2}=0, m_{k-3}=0 \quad \Rightarrow c_0^{(1)}=0,\ \ c_0^{(2)}=1,\ \ c_0^{(3)}=1,\ \ c_0^{(4)}=0$$

e a sequência é
1001 0110 0011 1110 0110

d)
A treliça tem 8 estados diferentes, correspondentes às 8 possibilidades de preenchimento do registro de deslocamento. Eles podem ser representados pela tabela abaixo

s_k	m_k	m_{k-1}	m_{k-2}	m_{k-3}	$c^{(1)}_k c^{(2)}_k c^{(3)}_k c^{(4)}_k$	s_{k+1}
000	0	0	0	0	0000	000
	1	0	0	0	1001	100
001	0	0	0	1	0111	000
	1	0	0	1	1110	100
010	0	0	1	0	0011	001
	1	0	1	0	1010	101
011	0	0	1	1	0100	001
	1	0	1	1	1101	101
100	0	1	0	0	0110	010
	1	1	0	0	1111	110
101	0	1	0	1	0001	010
	1	1	0	1	1000	110
110	0	1	1	0	0101	011
	1	1	1	0	1100	111
111	0	1	1	1	0010	011
	1	1	1	1	1011	111

Com base na tabela, podemos construir a seguinte treliça, em que linhas tracejadas representam um bit de dados igual a 0 e linhas sólidas representam bits iguais a 1.



Comunicações Digitais
Prof. André Noll Barreto

Fórmulas Úteis

Transmissão Digital

banda de transmissão com pulsos de Nyquist:

$B=(1+r)R_s$ para sistemas em banda passante, $B=(1+r)\frac{R_s}{2}$ em banda base

Probabilidade de Erro de Símbolo (P_e) e de Bit (P_b) de Esquemas de Modulação Comuns

$$P_{b,BPSK}=P_{b,QPSK}=Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \qquad P_{b,OOK}=Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_{b,2-FSK,coerente}=Q\left(\sqrt{\frac{E_b(1-\mathrm{sinc}(2\pi\Delta f T_s))}{N_0}}\right) \qquad P_{b,2-FSK,não-coerente}=\frac{1}{2}e^{-E_b/N_0}$$

$$P_{e,M-PAM}=2\left(\frac{M-1}{M}\right)Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2 M}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_{e,M-QAM}=1-(1-P_{e,M_1-PAM})(1-P_{e,M_2-PAM}), \qquad M_1M_2=M$$

$$P_{e,M-PSK}\approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b\log_2 M}{N_0}}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{M}\right)$$

DFT/IDFT

$$H_k=\sum_{n=0}^{N-1}h_n e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} \qquad h_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H_k e^{j2\pi\frac{nk}{N}}$$

Probabilidade de erro de códigos de bloco com detecção *hard*

$$p_{ec}\approx\binom{n-1}{t}(p_c)^{t+1} \quad ,$$

em que, para BPSK

$$p_c=Q\left(\sqrt{\frac{2RE_b}{N_0}}\right)$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Função Q

x	Q(x)	x	Q(x)
0,1	4,60E-001	3,1	9,68E-004
0,2	4,21E-001	3,2	6,87E-004
0,3	3,82E-001	3,3	4,83E-004
0,4	3,45E-001	3,4	3,37E-004
0,5	3,09E-001	3,5	2,33E-004
0,6	2,74E-001	3,6	1,59E-004
0,7	2,42E-001	3,7	1,08E-004
0,8	2,12E-001	3,8	7,23E-005
0,9	1,84E-001	3,9	4,81E-005
1,0	1,59E-001	4,0	3,17E-005
1,1	1,36E-001	4,1	2,07E-005
1,2	1,15E-001	4,2	1,33E-005
1,3	9,68E-002	4,3	8,54E-006
1,4	8,08E-002	4,4	5,41E-006
1,5	6,68E-002	4,5	3,40E-006
1,6	5,48E-002	4,6	2,11E-006
1,7	4,46E-002	4,7	1,30E-006
1,8	3,59E-002	4,8	7,93E-007
1,9	2,87E-002	4,9	4,79E-007
2,0	2,28E-002	5,0	2,87E-007
2,1	1,79E-002	5,1	1,70E-007
2,2	1,39E-002	5,2	9,96E-008
2,3	1,07E-002	5,3	5,79E-008
2,4	8,20E-003	5,4	3,33E-008
2,5	6,21E-003	5,5	1,90E-008
2,6	4,66E-003	5,6	1,07E-008
2,7	3,47E-003	5,7	5,99E-009
2,8	2,56E-003	5,8	3,32E-009
2,9	1,87E-003	5,9	1,82E-009
3,0	1,35E-003	6,0	9,87E-010