

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto
Prova 3 – 2012/2 (05/03/2013)

Aluno: _____

Matrícula: _____

Instruções

- A prova consiste de quatro questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda resposta deverá está contida nas folhas da prova. Folhas de rascunho serão fornecidas caso necessário, mas não devem ser entregues.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	Nota
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 1 (2,5 pontos)

Um sinal é transmitido em um canal com resposta ao impulso discreta igual a

$$h[k] = 0,5\delta[k] - 0,2j\delta[k-1] + 0,2\delta[k-2]$$

Quantos estados e transições teria o equalizador de Viterbi caso fossem utilizados BPSK, QPSK e 16-QAM? (1 ponto)

Construa a treliça do equalizador de Viterbi considerando que seja empregado BPSK. (1,5 ponto)

O número de estados é dado por $N_s = M^L$, e temos M transições de cada estado. Ou seja,

para BPSK, $N_s = 2^2 = 4$, $M = 2$

para QPSK, $N_s = 4^2 = 16$, $M = 4$

para 16-QAM, $N_s = 16^2 = 256$, $M = 16$

Sabemos que $y[k] = 0,5x[k] - 0,2jx[k-1] + 0,2x[k-2]$

A treliça pode ser construída a partir da tabela

s_k	x_k	x_{k-1}	x_{k-2}	y_k	s_{k+1}
0	-1	-1	-1	$-0,7+0,2j$	0
0	1	-1	-1	$0,3+0,2j$	2
1	-1	-1	1	$-0,3+0,2j$	0
1	1	-1	1	$0,7+0,2j$	2
2	-1	1	-1	$-0,7-0,2j$	1
2	1	1	-1	$0,3-0,2j$	3
3	-1	1	1	$-0,3-0,2j$	1
3	1	1	1	$0,7-0,2j$	3

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 2 (2,5 pontos)

O sistema 3GPP-LTE (4G) utiliza OFDM com espaçamento entre frequências de 15kHz e tamanho de FFT variável, podendo ser $N = 128, 512, 1024$ ou 2048 . O número de subportadoras não nulas é igual a 72, 300, 600 e 1200, respectivamente.

i) Qual a largura de banda aproximada do sistema nestes 4 casos? (0,5 pontos)

ii) Qual o intervalo de símbolo e a taxa de amostragem em cada caso? (0,5 ponto)

Dentre as diferentes opções de prefixo cíclico, pode ser utilizado um prefixo cíclico estendido, com duração de $50/3 \mu s$.

iii) Sabendo-se que um slot do LTE tem a duração de 0,5ms e um quadro, 10ms, quantos símbolos OFDM cabem em um slot e em um quadro (arredonde pro inteiro mais próximo)? (0,8 ponto)

A combinação de um símbolo OFDM com uma subportadora é chamada de elemento de recurso, e são definidos blocos de recurso contendo 12 subportadoras adjacentes em um slot (0,5ms) de duração. Em cada bloco de recurso são utilizados 4 elementos de recurso como sinal piloto.

iv) supondo o uso de 16-QAM em todas as subportadoras com um código de taxa $R=1/3$, qual a taxa de dados alcançada para o esquema com 2048 subportadoras? (0,7 ponto)

i)

$$B_T \approx (N - N_0 + 1) \Delta f$$

$$B_{T,128} \approx 73 \Delta f = 1,095 \text{ GHz}$$

$$B_{T,512} \approx 301 \Delta f = 4,515 \text{ GHz}$$

$$B_{T,1024} \approx 601 \Delta f = 9,015 \text{ GHz}$$

$$B_{T,2048} \approx 1201 \Delta f = 18,015 \text{ GHz}$$

ii)

para todos os casos

$$T_s = \frac{1}{\Delta f} = 66,67 \mu s$$

já a taxa de amostragem

$$f_a = \frac{N}{T_s} = N \Delta f$$

$$f_{a,128} = 1,92 \text{ MHz} \quad f_{a,512} = 7,68 \text{ MHz}$$

$$f_{a,1024} = 15,36 \text{ MHz} \quad f_{a,2048} = 30,72 \text{ MHz}$$

iii)

$$T = T_s + T_G = 66,67 \mu s + 50/3 \mu s = 83,33 \mu s$$

$$N_{slot} = \frac{0,5 \text{ ms}}{T} = 6 \quad N_{quadro} = 20 N_{slot} = 120$$

iv) cada bloco de recursos contém 6 símbolos OFDM x 12 subportadoras = 72 elementos de recurso, dos quais 4 são reservados para piloto.

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

$$R_b = \frac{68}{72} (1200) \frac{1}{3} (\log_2 16) \frac{1}{T} = 18,133 \text{ Mbps}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 3 (3 pontos)

Dado o código de bloco sistemático definido pela matriz geradora:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

- Qual a sua taxa? (0,5 ponto)
- Ele é sistemático? Se não for, ache uma matriz geradora sistemática equivalente. (0,5 ponto)
- Qual sua matriz de verificação de paridade? (0,5 ponto)
- Qual sua distância mínima? (0,5 ponto)
- Dado que foi recebido o vetor $[0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$, calcule sua síndrome. Ele é um vetor válido? (0,5 ponto)
- Em relação a um sistema sem codificação, qual seu ganho de codificação aproximado, para uma probabilidade de erro de 10^{-6} com decodificação hard. (0,5 ponto)

a) $R = \frac{1}{3}$

b) não, o código não é sistemático.

Podemos por exemplo, fazer a seguinte série de manipulações:

- $I_1 = I_4, I_2 = I_3, I_3 = I_2, I_4 = I_1$
- $I_3 = I_3 + I_1$
- $I_2 = I_2 + I_3$
- $I_4 = I_4 + I_2$
- $I_1 = I_1 + I_4$

para obter a matriz sistemática

$$\mathbf{G}_{\text{SIST}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\mathbf{H} = [\mathbf{P}^T \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d)

este código tem 16 palavras possíveis

0000 00000000; 0001 00110011; 0010 11010001; 0011 11100010;
0100 10111000; 0101 10001011; 0110 01101001; 0111 01011010;
1000 10100110; 1001 10010101; 1010 01110111; 1011 01000100;
1100 00011110; 1101 01101101; 1110 11001111; 1111 11111100

e a palavra código não nula de menor peso tem

$$d_{\min} = 5$$

e) $\mathbf{s} = \mathbf{r} \mathbf{H}_T = [00011100]$

Como a síndrome é não nula, o sinal não é válido.

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

f)

considerando BPSK sem codificação

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 10^{-6} \Rightarrow \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = 4,8 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 11,52 = 10,6 \text{ dB}$$

e com codificação, $t = 2$

$$\binom{11}{2} (p_c)^3 = 10^{-6} \Rightarrow p_c = 0,0026$$

$$Q\left(\sqrt{\frac{2RE_b}{N_0}}\right) = 0,0026 \Rightarrow \sqrt{\frac{2RE_b}{N_0}} = 2,8 = 11,76 = 10,7 \text{ dB}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 4 (2 pontos)

Um código convolucional é representado pelas seguintes expressões

$$c_k^{(1)} = m_k$$

$$c_k^{(2)} = m_{k-1} + m_{k-3} + m_{k-4}$$

$$c_k^{(3)} = m_{k-1} + m_{k-2} + m_{k-3} + m_{k-4}$$

$$c_k^{(4)} = m_k + m_{k-2} + m_{k-3}$$

- a) Qual sua taxa? Justifique. (0,6 ponto)
b) Qual a palavra de código para uma entrada $m = [1\ 1\ 1\ 0\ 0]$? (0,7 ponto)
c) Quantos estados terá a treliça deste código? (0,7 ponto)

a)

$$R = 1/4$$

b)

$$c = [1001\ 1111\ 1100\ 0010\ 0010]$$

c)

$$\text{o número de estados é } 2^4 = 16$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Fórmulas Úteis

Transmissão Digital

banda de transmissão com pulsos de Nyquist:

$$B = (1+r)R_s \text{ para sistemas em banda passante, } B = (1+r)\frac{R_s}{2} \text{ em banda base}$$

Probabilidade de Erro de Símbolo (P_e) e de Bit (P_b) de Esquemas de Modulação Comuns

$$P_{b,BPSK} = P_{b,QPSK} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \quad P_{b,OOK} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_{b,2-FSK,coerente} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b(1-\text{sinc}(2\pi\Delta f T_s))}{N_0}}\right) \quad P_{b,2-FSK,não-coerente} = \frac{1}{2}e^{-E_b/N_0}$$

$$P_{e,M-PAM} = 2\left(\frac{M-1}{M}\right)Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2 M E_b}{M^2-1 N_0}}\right)$$

$$P_{e,M-QAM} = 1 - (1 - P_{e,M_1-PAM})(1 - P_{e,M_2-PAM}), \quad M_1 M_2 = M$$

$$P_{e,M-PSK} \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}} \text{sen} \frac{\pi}{M}\right)$$

DFT/IDFT

$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \quad h_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{j2\pi \frac{nk}{N}}$$

Probabilidade de erro de códigos de bloco com detecção *hard*

$$p_{ec} \approx \binom{n-1}{t} (p_c)^{t+1},$$

em que, para BPSK

$$p_c = Q\left(\sqrt{\frac{2RE_b}{N_0}}\right)$$

e com detecção *soft*

$$p_{ec} \approx A_{d_{min}} \frac{d_{min}}{n} Q\left(\sqrt{\frac{2Rd_{min}E_b}{N_0}}\right)$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Função Q

x	Q(x)	x	Q(x)
0,1	4,60E-001	3,1	9,68E-004
0,2	4,21E-001	3,2	6,87E-004
0,3	3,82E-001	3,3	4,83E-004
0,4	3,45E-001	3,4	3,37E-004
0,5	3,09E-001	3,5	2,33E-004
0,6	2,74E-001	3,6	1,59E-004
0,7	2,42E-001	3,7	1,08E-004
0,8	2,12E-001	3,8	7,23E-005
0,9	1,84E-001	3,9	4,81E-005
1,0	1,59E-001	4,0	3,17E-005
1,1	1,36E-001	4,1	2,07E-005
1,2	1,15E-001	4,2	1,33E-005
1,3	9,68E-002	4,3	8,54E-006
1,4	8,08E-002	4,4	5,41E-006
1,5	6,68E-002	4,5	3,40E-006
1,6	5,48E-002	4,6	2,11E-006
1,7	4,46E-002	4,7	1,30E-006
1,8	3,59E-002	4,8	7,93E-007
1,9	2,87E-002	4,9	4,79E-007
2,0	2,28E-002	5,0	2,87E-007
2,1	1,79E-002	5,1	1,70E-007
2,2	1,39E-002	5,2	9,96E-008
2,3	1,07E-002	5,3	5,79E-008
2,4	8,20E-003	5,4	3,33E-008
2,5	6,21E-003	5,5	1,90E-008
2,6	4,66E-003	5,6	1,07E-008
2,7	3,47E-003	5,7	5,99E-009
2,8	2,56E-003	5,8	3,32E-009
2,9	1,87E-003	5,9	1,82E-009
3,0	1,35E-003	6,0	9,87E-010