Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 2 – 2013/1 (13/06/2013)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de quatro questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h30
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda resposta deverá está contida nas folhas da prova. Folhas de rascunho serão fornecidas caso necessário, e, caso entregues ao profesor, devem conter o nome e a matrícula. Não será aceita reclamação por sumiço de folhas adicionais.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

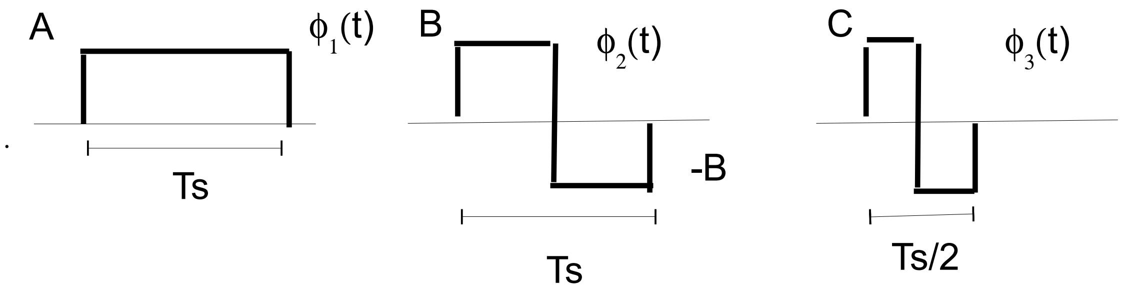
Questão	**Nota**
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

UnB

departamento de engenharia elétrica

Questão 1 (2,5 pontos)

Um esquema de transmissão é baseado no espaço de sinais ortonormal abaixo



a) ache os valores de A, B e C (0,7 pontos)

b) Supondo que seja utilizado um sistema de transmissão octal, cujos sinais são representados pelos vetores

$$\bar{s}_1=(\alpha,0,0) \qquad \bar{s}_5=(\alpha,0,\sqrt{2}\alpha)$$
$$\bar{s}_2=(0,\alpha,0) \qquad \bar{s}_6=(0,\alpha,-\sqrt{2}\alpha)$$
$$\bar{s}_3=(-\alpha,0,0) \qquad \bar{s}_7=(-\alpha,0,\sqrt{2}\alpha)$$
$$\bar{s}_4=(0,-\alpha,0) \qquad \bar{s}_8=(0,-\alpha,-\sqrt{2}\alpha)$$

i) Esboce o conjunto de sinais possíveis (0,8 pontos)

ii) Calcule sua probabilidade de erro de bit aproximada no regime de RSR, alta em termos de Eb/N0. (1 ponto)

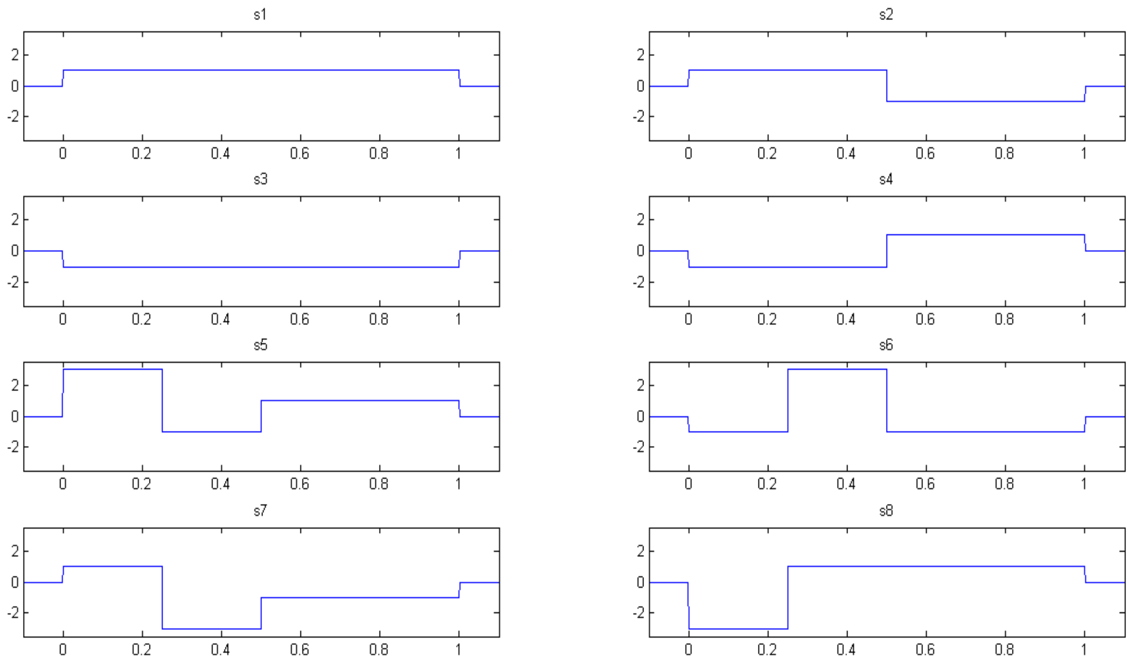
a)

As funções base devem ter energia unitária. Sendo assim,

$$\int \phi_1^2(t)\,dt=A^2T_s=1\Rightarrow A=\frac{1}{\sqrt{T_s}}$$
$$\int \phi_2^2(t)\,dt=B^2T_s=1\Rightarrow B=\frac{1}{\sqrt{T_s}}$$
$$\int \phi_3^2(t)\,dt=C^2\frac{T_s}{2}=1\Rightarrow C=\sqrt{\frac{2}{T_s}}$$

b)

i)



ii)

$$E_s = \frac{1}{8}\left(4\alpha^2 + 4\left(3\alpha^2\right)\right) = 2\alpha^2$$

Cada um dos pontos s_1 a s_4 tem 3 vizinhos com distância mínima $d_{min} = \sqrt{2\alpha^2} = \sqrt{E_s}$. Por exemplo s1 é vizinho de s_3, s_4 e s_5. Cada um dos pontos s_5 a s_8 tem apenas 1 vizinho, por exemplo s_5 é vizinho de s_1. Portanto o número médio de vizinhos é 2

Considerando que um erro será cometido apenas para seu vizinho, temos que

$$P_e \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right)$$

Considerando também apenas um bit errado a cada erro de símbolo

$$P_b \approx \frac{2}{3}Q\left(\sqrt{\frac{3E_b}{2N_0}}\right) .$$

Questão 2 (2,5 pontos)

É utilizado em um esquema de modulação um pulso de transmissão

$$p(t)=\text{sinc}^2\left(\pi\frac{t}{T_s}\right) \quad .$$

a) Este pulso satisfaz o critério de Nyquist? Justifique? (0,6 ponto)
b) supondo ruído branco Gaussiano, qual a resposta ao impulso do filtro casado a este pulso? (0,6 ponto)
c) o sinal na saída do filtro casado do item b satisfaz o critério de Nyquist? (0,6 ponto)
d) Supondo agora um ruído Gaussiano colorido, com densidade espectral de potência dada por

$S_n(f)=\frac{N_0}{2}\Delta\left(\frac{f}{2R_s}\right)$, repita os itens b e c. (0,7 ponto)

a) sim, pois $p(kT_S)=0, \quad k=\pm1,\pm2,...$

b)

$$h_m(t)=p(T_0-t)=\text{sinc}^2\left(\pi\frac{(T_0-t)}{T_s}\right)$$

c) isto pode ser visto mais facilmente no domínio da frequência. Considerando $T_m = 0$

$$P(f)=\frac{1}{R_s}\Delta\left(\frac{f}{2R_s}\right)=H_m(f) \quad ,$$

portanto a combinação dos filtros é

$P(f)H_m(f)=\frac{1}{R_s^2}\left[\Delta\left(\frac{f}{2R_s}\right)\right]^2$, que não satisfaz o critério de Nyquist.

d)
no domínio da frequência (considerando $T_m = 0$) temos que

$$H(f)=k\frac{P(-f)}{S_n(f)}=\text{rect}\left(\frac{f}{2R_s}\right)$$

Agora a combinação de P(f) com H(f) é igual a P(f), que, como visto anteriormente, satisfaz o critério de Nyquist

Questão 3 (2,5 pontos)

Um esquema 8-QAM utiliza uma combinação de QPSK com 2 níveis de amplitude diferentes. Nas menor amplitude é utilizado um QPSK com fases 0, π/2, π, e 3π/2, e na maior amplitude as fases são deslocadas π/4.

a)Considerando que a amplitude do anel interno da constelação é A, qual deve ser a amplitude do anel externo, de modo que a distância entre os pontos do anel interno da constelação e entre os pontos de anéis diferentes seja a mesma? (0,8 ponto)

b)Esboce as regiões de decisão. (0,8 ponto)

c) Calcule a probabilidade de erro aproximada. (0,9 ponto)

a) A constelação pode ser vista na figura abaixo

A distância mínima entre dois pontos do anel interior é:

$$d_{min} = A\sqrt{2}$$

Chamando de B a amplitude do anel exterior, existem diversas maneiras de se encontrar o valor de B pela figura.

Por exemplo, temos que

$$\mathbf{s}_5 = \left(\frac{B}{\sqrt{2}}, \frac{B}{\sqrt{2}}\right)$$ e portanto

$$d^2(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_5) = \left(\frac{B}{\sqrt{2}} - A\right)^2 + \frac{B^2}{2} = d_{min}^2 = 2A^2$$

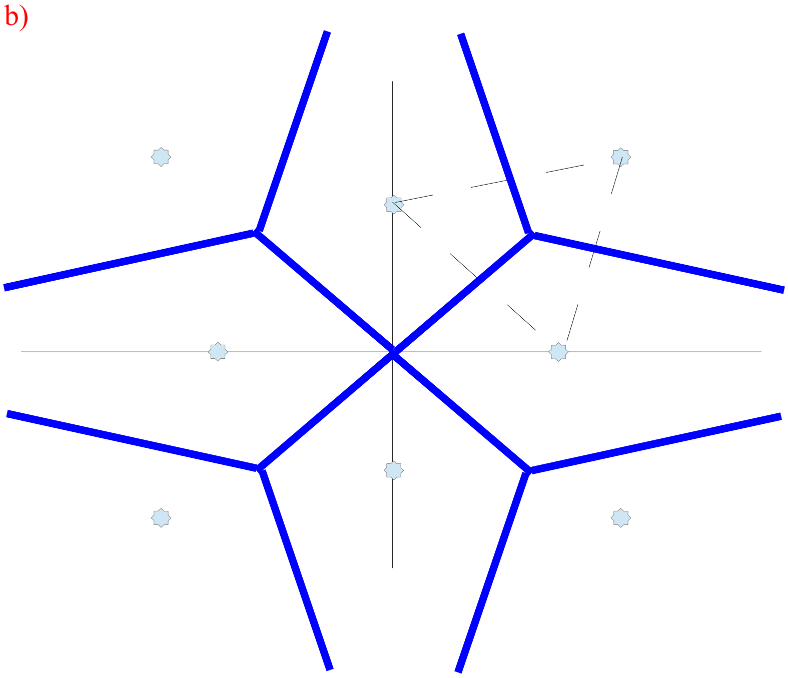
, que recai numa equação quadrática

$$B^2 - \frac{2A}{\sqrt{2}}B - A^2 = 0 \quad ,$$

cuja única solução positiva é

$$B = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}A \approx 1{,}932\,A \quad .$$

b)



c)

$$E_s = \frac{1}{2}(A^2+B^2) = \left(1+\frac{(4+2\sqrt{3})}{2}\right)\frac{A^2}{2} \approx 2{,}366\,A^2 \Rightarrow A^2 = \frac{2}{3+\sqrt{3}}E_s = 0{,}4226\,E_s$$

Os pontos do anel interior têm 4 vizinhos cada e os do anel exterior 2 vizinhos, portando o número de vizinhos é 3. Sendo assim

$$P_e \approx 3\,Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) = 3\,Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{N_0}}\right) = 3\,Q\left(\sqrt{\frac{6}{3+\sqrt{3}}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

e

$$P_b \approx \frac{P_e}{\log_2} M = Q\left(\sqrt{\frac{6}{3+\sqrt{3}}\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{1{,}2679\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Questão 4 (2,5 pontos)

Um sistema de transmissão transmite informações a uma taxa de 1Mbps, e sofre uma atenuação de 120dB entre o transmissor e receptor.
Considerando os seguintes esquemas de transmissão:
a) OOK não coerente (0,4 ponto)
b) BFSK coerente (Δf = 3Rs/4) (0,3 ponto)
c) BFSK não coerente (Δf = Rs) (0,3 ponto)
d) BPSK (0,4 ponto)
e) 4-PAM (0,4 ponto)
f) 8-PSK (0,3 ponto)
g) 16-QAM, (0,4 ponto)
e que, exceto no FSK, são utilizados pulsos de Nyquist com roll-off 0,25,

calcule

i) a banda de transmissão ocupada e
ii) a potência de transmissão necessária, para N0/2 = -170dBm/Hz e uma taxa de erro de bit desejada de 10^{-5}.

a) OOK não coerente

i)

$$B=\frac{R_b}{\log_2 M}(1+\rho)=1{,}25\,\text{MHz}$$

ii) $$P_b=\frac{1}{2}e^{-\frac{E_b}{2N_0}}\leq 10^{-5}\Rightarrow\frac{E_b}{N_0}\geq 21{,}64 \quad \text{com} \quad N_0=2\times 10^{-20}\,\text{W/Hz}$$

$$P_{Tx}=\frac{E_b}{N_0}N_0 R_b(10^{12})=21{,}64(2\times 10^{-20})(10^6)(10^{12})=0{,}4328\,\text{W}=-3{,}63\,\text{dBW}$$

b) BFSK coerente

i) Considerando o uso de pulsos retangulares

$$B\approx 2R_s+\Delta f=\frac{11}{4}R_s=2{,}75\,\text{MHz}$$

ii)

$$P_b=Q\left(\sqrt{\frac{E_b(1-\text{sinc}(2\pi\Delta f T_s))}{N_0}}\right) \quad \text{, com} \quad \text{sinc}(2\pi\Delta f T_s)=\frac{\text{sen}(3\pi/2)}{3\pi/2}=-0{,}2122$$

$$P_b=Q\left(\sqrt{1{,}2122\frac{E_b}{N_0}}\right)\leq 10^{-5}\Rightarrow\frac{E_b}{N_0}\geq 15{,}253$$

$$P_{Tx}=15{,}253(2\times 10^{-20})(10^6)(10^{12})=0{,}3051\,\text{W}=-5{,}15\,\text{dBW}$$

c) BFSK não coerente

i) Considerando o uso de pulsos retangulares

$$B\approx 2R_s+\Delta f=3R_s=3\,\text{MHz}$$

ii)

BER igual a OOK

$$P_{Tx}=0{,}4328\,\text{W}=-3{,}63\,\text{dBW}$$

d)

i) $B=R_b(1+\rho)=1{,}25\,\mathrm{MHz}$

ii) $P_b=Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)\leq 10^{-5}\Rightarrow \frac{E_b}{N_0}\geq 9{,}245$

$P_{Tx}=0{,}1849\,\mathrm{W}=-7{,}32\,\mathrm{dBW}$

e)

i) $$B=\frac{R_b}{2}(1+\rho)=625\,\mathrm{kHz}$$

ii) $$P_b=\frac{P_e}{\log_2 M}=\frac{1}{2}\frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right)\Rightarrow Q\left(\sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right)\leq 1{,}333\times 10^{-5}\Rightarrow \sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0}}\geq 4{,}2\Rightarrow \frac{E_b}{N_0}\geq 22{,}05$$

$$P_{Tx}=22{,}05\,(2\times 10^{-20})(10^{6})(10^{12})=0{,}4410\,\mathrm{W}=-3{,}56\,\mathrm{dBW}$$

f)

i) $$B=\frac{R_b}{3}(1+\rho)=416\,\mathrm{kHz}$$

ii) $$P_b=\frac{P_e}{\log_2 M}=\frac{1}{3}2Q\left(\sqrt{\frac{6E_b}{N_0}}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{8}\right)\Rightarrow 0{,}3827\sqrt{6\frac{E_b}{N_0}}\geq 4{,}2\Rightarrow \frac{E_b}{N_0}\geq 20{,}1$$

$$P_{Tx}=20{,}01\,(2\times 10^{-20})(10^{6})(10^{12})=0{,}4015\,\mathrm{W}=-3{,}96\,\mathrm{dBW}$$

g)

i) $$B=\frac{R_b}{4}(1+\rho)=312{,}5\,\mathrm{kHz}$$

ii) $$P_b=\frac{P_e}{\log_2 M}=\frac{1}{4}3\,Q\left(\sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right)\Rightarrow \sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0}}\geq 4{,}2\Rightarrow \frac{E_b}{N_0}\geq 22{,}05$$

$$P_{Tx}=22{,}05\,(2\times 10^{-20})(10^{6})(10^{12})=0{,}4410\,\mathrm{W}=-3{,}56\,\mathrm{dBW}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Fórmulas Úteis

Tabela de Transformadas de Fourier:

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi f t}df \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G(f)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

$$\delta(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad 1$$

$$1 \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \delta(f)$$

$$t^n e^{-at}u(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{n!}{(a+j2\pi f)^{n+1}}$$

$$e^{-a|t|} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \delta(f-f_0)$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$$

$$u(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$$

$$\operatorname{sgn} t \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{j\pi f}$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad |\tau|\operatorname{sinc}(\pi f \tau)$$

$$\operatorname{sinc}(2\pi B t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{|2B|}\operatorname{rect}(f/2B)$$

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{\tau}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f \tau}{2}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$k_1 g_1(t)+k_2 g_2(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad k_1 G_1(f)+k_2 G_2(f)$$

$$G(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad g(-f)$$

$$g(at) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{|a|}G\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$g(t-t_0) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

$$g(t)e^{j2\pi f_0 t} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G(f-f_0)$$

$$g_1(t)*g_2(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G_1(f)G_2(f)$$

$$g_1(t)g_2(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G_1(f)*G_2(f)$$

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad (j2\pi f)^n G(f)$$

$$\int_{-\infty}^{t} g(x)dx \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{G(f)}{j2\pi f}+\frac{1}{2}G(0)\delta(f)$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Transmissão Digital

filtro de recepção ótimo $H(f)=k\frac{P(-f)e^{-j2\pi fT_m}}{S_n(f)}$

$P_e=Q\left(\frac{\beta}{2}\right)$, $\beta^2=\frac{E_p+E_q-2E_{pq}}{N_0/2}$, com $E_{pq}=\int_0^{T_m}p(t)q(t)dt$

banda de transmissão com pulsos de Nyquist:

$B=(1+r)R_s$ para sistemas em banda passante, $B=(1+r)\frac{R_s}{2}$ em banda base

Probabilidade de Erro de Símbolo (P_e) e de Bit (P_b) de Esquemas de Modulação Comuns

$$P_{b,BPSK}=P_{b,QPSK}=Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \qquad P_{b,OOK}=Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_{b,2-FSK,coerente}=Q\left(\sqrt{\frac{E_b\left(1-\operatorname{sinc}(2\pi\Delta fT_s)\right)}{N_0}}\right)$$

$$P_{b,OOK,não-coerente}=P_{b,2-FSK,não-coerente}=\frac{1}{2}e^{-E_b/2N_0}$$

$$P_{e,M-PAM}=2\left(\frac{M-1}{M}\right)Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2 M}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_{e,M-QAM}\approx 4\left(\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$ apenas para QAM quadrado (M=4^n)

$$P_{e,M-PSK}\approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b\log_2 M}{N_0}}\operatorname{sen}\frac{\pi}{M}\right)$$

Probabilidade de Erro entre dois pontos

$$P_e=Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right)$$

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Função Q

x	Q(x)	x	Q(x)
0,1	4,60E-001	3,1	9,68E-004
0,2	4,21E-001	3,2	6,87E-004
0,3	3,82E-001	3,3	4,83E-004
0,4	3,45E-001	3,4	3,37E-004
0,5	3,09E-001	3,5	2,33E-004
0,6	2,74E-001	3,6	1,59E-004
0,7	2,42E-001	3,7	1,08E-004
0,8	2,12E-001	3,8	7,23E-005
0,9	1,84E-001	3,9	4,81E-005
1,0	1,59E-001	4,0	3,17E-005
1,1	1,36E-001	4,1	2,07E-005
1,2	1,15E-001	4,2	1,33E-005
1,3	9,68E-002	4,3	8,54E-006
1,4	8,08E-002	4,4	5,41E-006
1,5	6,68E-002	4,5	3,40E-006
1,6	5,48E-002	4,6	2,11E-006
1,7	4,46E-002	4,7	1,30E-006
1,8	3,59E-002	4,8	7,93E-007
1,9	2,87E-002	4,9	4,79E-007
2,0	2,28E-002	5,0	2,87E-007
2,1	1,79E-002	5,1	1,70E-007
2,2	1,39E-002	5,2	9,96E-008
2,3	1,07E-002	5,3	5,79E-008
2,4	8,20E-003	5,4	3,33E-008
2,5	6,21E-003	5,5	1,90E-008
2,6	4,66E-003	5,6	1,07E-008
2,7	3,47E-003	5,7	5,99E-009
2,8	2,56E-003	5,8	3,32E-009
2,9	1,87E-003	5,9	1,82E-009
3,0	1,35E-003	6,0	9,87E-010