Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 1 – 2013/2 (17/09/2013)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de quatro questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h30
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda resposta deverá está contida nas folhas da prova. Folhas de rascunho serão fornecidas caso necessário, e, caso entregues ao profesor, devem conter o nome e a matrícula. Não será aceita reclamação por sumiço de folhas adicionais.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	Nota
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

UnB

departamento de engenharia elétrica

Questão 1 (2,5 pontos)

Suponha que em um enlace a probabilidade de erro de bit cresça com a distância, de modo que $P_e = 1 - e^{-d/\lambda}$.

Queremos enviar uma mensagem de Porto Alegre (POA) a Brasília (BSB), sendo que os sequintes enlaces estão disponíveis:
POA – CTB (Curitiba): 600 km
POA – SPO (São Paulo): 900km
SPO – BHZ (Belo Horizonte): 500 km
CTB – RIO (Rio de Janeiro): 700 km
SPO – BSB : 900km
BHZ – BSB : 650km
RIO – BSB: 500km

a) Qual o melhor caminho possível, ou seja, o que resultará na menor probabilidade de erro? Justifique.
b) Para este caminho, quais os valores possíveis de λ , de modo que a probabilidade de erro na comunicação entre POA e BSB seja menor que 0,01?

a) é melhor trabalhar com a probabilidade de acerto $P_c = 1 - P_e = e^{-d/\lambda}$
a probabilidade de acerto após N enlaces é

$$P_{c,N} = \Pr\{\text{nenhum erro}\} + \Pr\{2\text{ erros}\} + \Pr\{4\text{ erros}\} + \cdots \approx \Pr\{\text{nenhum erro}\}$$

$$P_{c,N} = \prod_{n=1}^{N} P_c(n) = \prod_{n=1}^{N} e^{-d(n)/\lambda} = e^{-\sum d(n)/\lambda} \quad .$$

Ou seja, o caminho que apresentar a menor distância total será o melhor. Neste caso, seria o caminho POA-SPO-BSB, com 1800km.

b)
queremos

$$e^{-d_T/\lambda} > 0{,}99 \Rightarrow \frac{d_T}{\lambda} < -\ln 0{,}99 \Rightarrow \lambda > \frac{d_T}{\ln 0{,}99} = 1{,}79 \times 10^5\,\text{km}$$

Questão 2 (2,5 pontos)

Em um canal variante no tempo o sinal recebido é dado por

$$y(t)=x(t)h(t)+w(t) \quad ,$$

em que x(t) é o sinal transmitido, h(t) a atenuação, e w(t) um componente de ruído gaussiano com variância σ^2.

Sabemos que a densidade espectral de potência de h(t) é de $S_h(f)=\frac{2\times 10^2\sigma_h^2}{10^4+4\pi^2 f^2}$, e sabemos o valor do canal h(t) canal nos instantes $t_1 = 0$ e $t_2 = 10$ms.

Qual o estimador LMS ótimo para o canal no instante t3 = 20ms

1) considerando apenas as amostras h(t1) e h(t2)
2) considerando h(t2) e y(t3), supondo que o sinal x(t) = 1 é conhecido

Qual o erro quadrático médio em cada caso?

Sabemos que

$$R_x(\tau)=F^{-1}\{S_h(f)\}=\sigma_h^2 e^{-10^2|\tau|} \quad ,$$

e considerando que h tem média 0

1)

$$\hat{h}_3=a_1 h_1+a_2 h_2 \quad \text{com}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} R_{01} \\ R_{02} \end{bmatrix} \text{, em que}$$

$$R_{01}=E\{h_3 h_1\}=R_x(20\times 10^{-3})=\sigma_h^2 e^{-2}$$

$$R_{02}=E\{h_3 h_2\}=R_x(10\times 10^{-3})=\sigma_h^2 e^{-1}$$

$$R_{12}=R_{21}=E\{h_1 h_2\}=R_x(10\times 10^{-3})=\sigma_h^2 e^{-1}$$

$$R_{11}=R_{22}=E\{h^2\}=R_x(0)=\sigma_h^2$$

Portanto

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\sigma_h^{-2}\begin{bmatrix} 1 & e^{-1} \\ e^{-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} e^{-2} \\ e^{-1} \end{bmatrix}\sigma_h^2=\frac{1}{1-e^{-2}}\begin{bmatrix} 1 & -e^{-1} \\ -e^{-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} e^{-2} \\ e^{-1} \end{bmatrix}$$

$$a_1=\frac{e^{-2}-e^{-2}}{1-e^{-2}}=0 \qquad a_2=\frac{-e^{-3}+e^{-1}}{1-e^{-2}}=e^{-1}$$

$$E\{\epsilon^2\}=R_{00}-a_1 R_{01}-a_2 R_{02}=\sigma_h^2-e^{-1}\sigma_h^2 e^{-1}=\sigma_h^2(1-e^{-2})$$

2)

$$\hat{h}_3=a_1 y_3+a_2 h_2 \quad \text{com}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} R_{01} \\ R_{02} \end{bmatrix}$$, e, considerando que o ruído w e o canal h são independentes

$$R_{01}=E\{h_3 y_3\}=E\{h_3(h_3+w_3)\}=\sigma_h^2$$

$$R_{02}=E\{h_3 h_2\}=R_x(10\times 10^{-3})=\sigma_h^2 e^{-1}$$

$$R_{11}=E\{y_3^2\}=E\{(h_3+w_3)^2\}=\sigma_h^2+\sigma_w^2$$

$$R_{22}=E\{h_2^2\}=\sigma_h^2$$

$$R_{12}=R_{21}=E\{h_2 y_3\}=E\{h_2(h_3+w_3)\}=R_x(10\times 10^{-3})=\sigma_h^2 e^{-1}$$

Portanto

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \sigma_h^{-2} \begin{bmatrix} 1+\dfrac{\sigma_w^2}{\sigma_h^2} & e^{-1} \\ e^{-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-1} \end{bmatrix} \sigma_h^2 \quad .$$

Fazendo a razão sinal ruído $\dfrac{\sigma_h^2}{\sigma_w^2} = \Gamma$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+\Gamma^{-1}-e^{-2}} \begin{bmatrix} 1 & -e^{-1} \\ -e^{-1} & 1+\Gamma^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$a_1 = \frac{1-e^{-2}}{1+\Gamma^{-1}-e^{-2}} \qquad a_2 = \frac{\Gamma^{-1}e^{-1}}{1+\Gamma^{-1}-e^{-2}}$$

$$E\{\epsilon^2\} = R_{00} - a_1 R_{01} - a_2 R_{02} = \sigma_h^2 - \frac{1-e^{-2}}{1+\Gamma^{-1}-e^{-2}}\sigma_h^2 - \frac{\Gamma^{-1}e^{-1}}{1+\Gamma^{-1}-e^{-2}}\sigma_h^2 e^{-1}$$

$$= \sigma_h^2\left(1 - \frac{1-e^{-2}-\Gamma^{-1}e^{-2}}{1+\Gamma^{-1}-e^{-2}}\right) = \sigma_h^2\left(\frac{\Gamma^{-1}(1+e^{-2})}{1+\Gamma^{-1}-e^{-2}}\right)$$

Questão 3 (2,5 pontos)

Um sinal aleatório x(t) representa o chaveamento de um circuito de voz, de modo que x(t) = 1 se o circuito estiver ativo (on) e x(t) = 0 se estiver desligado (off). Sabemos que, uma vez que o canal é ativado ele permanece neste estado por um tempo t_{on}, que é modelado como uma variável aleatória exponencial de média $\overline{t_{on}}=\frac{1}{\lambda_{on}}=100\,\mathrm{s}$, e que quando ele é desligado ele permanece desligado por um tempo t_{off}, modelado como uma variável aleatória exponencial de média $\overline{t_{off}}=\frac{1}{\lambda_{off}}=100\,\mathrm{s}$. Qual a média deste sinal? Qual sua autocorrelação? Ele é estacionário no sentido amplo?

Dicas:

$$\Pr\{\mathrm{x}=1\}=\frac{\overline{t_{on}}}{\overline{t_{on}}+\overline{t_{off}}}$$

Uma v.a. Exponencial não possui memória, ou seja $p_{\mathrm{x}}(x|\mathrm{x}>t_0)=p_{\mathrm{x}}(x-t_0)$

O número de ocorrências k em um intervalo Δt de um processo cujo tempo é modelado por uma v.a exponencial, é uma v.a de Poisson, t.q. $Pr(k)=\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}$, com $\alpha=\frac{\Delta t}{\overline{t}}$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$E\{\mathrm{x}(t)\}=0[\Pr(\mathrm{x}(t)=0)]1[\Pr(\mathrm{x}(t)=1)]=\frac{\overline{t_{on}}}{\overline{t_{on}}+\overline{t_{off}}}=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{x}}(t,t+\tau) &= E\{\mathrm{x}(t)\mathrm{x}(t+\tau)\} = \sum_{x_1=0;1}\sum_{x_2=0;1} x_1x_2\Pr\{\mathrm{x}(t)=x_1; x(t+\tau)=x_2\} \\ &= \Pr\{\mathrm{x}(t)=1; x(t+\tau)=1\} = \Pr\{\mathrm{x}(t)=1\}\Pr\{x(t+\tau)=1|x(t)=1\} \end{aligned}$$

Agora, para τ>0

$\Pr\{x(t+\tau)=1|x(t)=1\}$ é a probabilidade de ocorrer um número par de mudanças de estado entre os instantes t e t +τ, ou seja, considerando o número de mudanças uma v.a. De Poisson,

$$\Pr\{x(t+\tau)=1|x(t)=1\}=\sum_{k=0}^{\infty}\Pr(2k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2k}}{2k!}e^{-\alpha}=\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}e^{-\alpha}=\frac{1-e^{-2\alpha}}{2} \quad .$$

Portanto

$$R_{\mathrm{x}}(\tau)=\frac{1-e^{-2\tau/100}}{4}, \qquad \tau>0$$

Como a autocorrelação depende apenas de τ, o processo é estacionário no sentido amplo.

Questão 4 (2,5 pontos)

A amplitude de um sinal de voz segue usualmente uma distribuição de Laplace, ou seja, sua pdf é dada por

$$p_x(x) = a \exp\left(\frac{-|x|}{b}\right) .$$

Encontre os parâmetros *a* e *b* como função da potência do sinal.

Sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_x(x)\,dx = 1$$, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} a e^{-|x|/b}\,dx = 2\int_0^{\infty} a e^{-x/b}\,dx = -2ab\,e^{-x/b}\Big|_0^{\infty} = 2ab = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2a}$$

A potência é dada por

$$P_x = E\{x^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_x(x)\,dx = 2\int_0^{\infty} x^2 a e^{-2ax}\,dx = \frac{-e^{-2ax}}{4a^2}\left(4a^2x^2 + 4ax + 2\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2a^2}$$

e, portanto,

$$a = \frac{1}{\sqrt{2P_x}} \quad \text{, e} \quad b = \sqrt{\frac{P_x}{2}}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Fórmulas Úteis

Identidades Trigonométricas:

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$
$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x + \tan^{-1}(-b/a)\right)$$

Integrais:

$$\int x \sin ax\, dx = \frac{1}{a^2}(\sin ax - ax\cos ax)$$
$$\int x \cos ax\, dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax\sin ax)$$
$$\int x^2 \sin ax\, dx = \frac{1}{a^3}(2ax\sin ax + 2\cos ax - a^2x^2\cos ax)$$
$$\int x^2 \cos ax\, dx = \frac{1}{a^3}(2ax\cos ax - 2\sin ax + a^2x^2\sin ax)$$
$$\int x e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$$
$$\int x^2 e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$
$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{x}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$$
$$\int \frac{x}{a^4+x^4}\, dx = \frac{1}{2a^2}\tan^{-1}\frac{x^2}{a^2}$$

Funções Importantes:

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & , |t| < 1/2 \\ 1/2 & , |t| = 1/2 \\ 0 & , |t| > 1/2 \end{cases}$$
$$\Delta(t) = \mathrm{rect}(t)(1-2|t|)$$

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Tabela de Transformadas de Fourier:

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi f t}df \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

$$\delta(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} 1$$

$$1 \overset{F}{\Leftrightarrow} \delta(f)$$

$$t^n e^{-at}u(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{n!}{(a+j2\pi f)^{n+1}}$$

$$e^{-a|t|} \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \overset{F}{\Leftrightarrow} \delta(f-f_0)$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right]$$

$$u(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$$

$$\operatorname{sgn} t \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{j\pi f}$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} |\tau|\operatorname{sinc}(\pi f \tau)$$

$$\operatorname{sinc}(2\pi B t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|2B|}\operatorname{rect}(f/2B)$$

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{\tau}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f \tau}{2}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$k_1 g_1(t)+k_2 g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} k_1 G_1(f)+k_2 G_2(f)$$

$$G(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} g(-f)$$

$$g(at) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|a|}G\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$g(t-t_0) \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

$$g(t)e^{j2\pi f_0 t} \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f-f_0)$$

$$g_1(t)*g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} G_1(f)G_2(f)$$

$$g_1(t)g_2(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} G_1(f)*G_2(f)$$

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \overset{F}{\Leftrightarrow} (j2\pi f)^n G(f)$$

$$\int_{-\infty}^{t} g(x)dx \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{G(f)}{j2\pi f}+\frac{1}{2}G(0)\delta(f)$$

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Probabilidade

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

eventos são independentes se $P(B|A)=P(B)$.

se $A_i,\ 1\leq i\leq N$ são eventos disjuntos e $\cup_{i=1}^{N}A_i=S \Rightarrow P(B)=\sum_{i=1}^{N}P(B|A_i)P(A_i)$

Variáveis Aleatórias

$P_{\mathrm{y}}(y)=\sum_i P_{\mathrm{x,y}}(x_i,y)$ CDF $F_{\mathrm{X}}(x)=Pr(\mathrm{x}\leq x)$ PDF $p_{\mathrm{x}}(x)=\frac{d\,F_{\mathrm{x}}(x)}{dx}$

v.a exponencial $p_{\mathrm{x}}(x)=\lambda e^{-\lambda x}u(x)$ v.a. Gaussiana $p_{\mathrm{x}}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}$

$$Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}e^{-x^2/2}dx$$

$E\{f(\mathrm{x})\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)p_{\mathrm{x}}(x)dx \qquad p_{\mathrm{x}}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{\mathrm{x,y}}(x,y)dy$

Teorema Central do Limite $\mathrm{y}_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{x}_i-\mu}{\sigma}\rightarrow Normal(0,1)$

Covariância $\sigma_{\mathrm{xy}}=E\{(x-\bar{x})(y-\bar{y})\}$ Coeficiente de correlação $\rho_{\mathrm{xy}}=\frac{\sigma_{\mathrm{xy}}}{\sigma_{\mathrm{x}}\sigma_{\mathrm{y}}}$

Estimação LMS

supondo $E\{\mathrm{x_i}\}=0$

$\hat{\mathrm{x}}_0=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathrm{x_i}$ com $\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_{11}&R_{12}&\cdots&R_{1\mathrm{n}}\\R_{21}&R_{22}&\cdots&R_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\R_{n1}&\cdots&\cdots&R_{nn}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}R_{01}\\R_{02}\\\vdots\\R_{0\mathrm{n}}\end{bmatrix}$, e $R_{ij}=E\{\mathrm{x_i x_j}\}$

$$E\{\epsilon^2\}=R_{00}-(a_1R_{01}+a_2R_{02}+\cdots+a_nR_{0\mathrm{n}})$$

Processos Estocásticos

$R_{\mathrm{x}}(\tau)=E\{\mathrm{x}(t)\mathrm{x}(t+\tau)\}$ Densidade Espectral de Pot. $S_{\mathrm{x}}(f)=F_{\tau}\{R_{\mathrm{x}}(\tau)\}$

$\mathrm{y}(t)=\mathrm{x}(t)*h(t)\Rightarrow S_{\mathrm{y}}(f)=|H(f)|^2S_{\mathrm{x}}(f)$ e $\bar{\mathrm{y}}=H(0)\bar{\mathrm{x}}$

$R_{\mathrm{x,y}}(\tau)=E\{\mathrm{x}(t)\mathrm{y}(t+\tau)\}$

x e y são descorrelatados se $R_{\mathrm{x,y}}(\tau)=\bar{\mathrm{x}}\,\bar{\mathrm{y}}$ e são ortogonais se $R_{\mathrm{x,y}}(\tau)=0$

Filtro de Wiener

$$H_{opt}(f)=\frac{S_{\mathrm{m}}(f)}{S_{\mathrm{m}}(f)+S_{\mathrm{n}}(f)}$$

$$P_N=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_m(f)S_n(f)}{(S)_m(f)+S_n(f)}df$$

Inversão de Matriz 2x2

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$$

UnB

departamento de engenharia elétrica