

# Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto  
Prova 2 – 2013/2 (22/10/2013)

Aluno: \_\_\_\_\_

Matrícula: \_\_\_\_\_

## Instruções

- A prova consiste de cinco questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h30
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda resposta deverá está contida nas folhas da prova. Folhas de rascunho serão fornecidas caso necessário, e, caso entregues ao professor, devem conter o nome e a matrícula. Não será aceita reclamação por sumiço de folhas adicionais.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	Nota
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
<b>Total</b>	

# Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

## Questão 1 (2,5 pontos)

No sistema de telefonia celular de 2ª Geração GSM, existe a possibilidade de transmissão de dados por meio do esquema GPRS/EDGE. Neste esquema são usados canais de 200kHz de banda e modulação 8-PSK, com fator de roll-off igual a 0,3.

i) Qual a taxa de transmissão de bits bruta neste sistema?. (0,7 ponto)

ii) Considerando-se que desejamos uma probabilidade de erro de bit de  $10^{-5}$ , e que temos no receptor uma densidade espectral de potência do ruído igual a  $-150\text{dBm/Hz}$ , qual a potência recebida necessária. (0,6 ponto)

iii) Também é previsto o uso de GMSK binário, que tem um desempenho similar ao BPSK. Qual seria a potência recebida necessária neste caso, e qual a taxa de bits alcançada? (0,6 ponto)

iv) Suponha agora que desejamos alcançar uma certa taxa de erro de pacotes. Repita o item (ii) considerando pacotes de 100 bytes, com uma probabilidade de erro de pacotes de  $10^{-1}$ . (0,6 ponto)

i)

$$R_b = R_s \log_2 M = \frac{B_T}{1+r} \log_2 M = \frac{2 \times 10^5}{1,3} (3) = 461,5 \text{ kbps}$$

ii)

$$P_b \approx \frac{2}{3} Q \left( \sqrt{\frac{6 E_b}{N_0}} \sin \frac{\pi}{8} \right) = 10^{-5} \Rightarrow Q \left( \sqrt{\frac{6 E_b}{N_0}} \sin \frac{\pi}{8} \right) = 1,5 \times 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{0,8787 \frac{E_b}{N_0}} = 4,2 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 20,1$$

$$P_{rx} = \frac{E_b}{N_0} R_b = \frac{E_b}{N_0} N_0 R_b = 20,1 (2 \times 10^{-15} \times 10^{-3}) 461,5 \times 10^3 = 1,853 \times 10^{-11} = -107,3 \text{ dBW}$$

iii)

$$R_b = R_s \log_2 M = \frac{B_T}{1+r} \log_2 M = \frac{2 \times 10^5}{1,3} = 153,8 \text{ kbps}$$

$$P_b = Q \left( \sqrt{\frac{2 E_b}{N_0}} \right) = 10^{-5} \Rightarrow \sqrt{\frac{2 E_b}{N_0}} = 4,3 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 9,245$$

$$P_{rx} = \frac{E_b}{N_0} N_0 R_b = 9,245 (2 \times 10^{-15} \times 10^{-3}) 153,8 \times 10^3 = 2,845 \times 10^{-12} = -115,5 \text{ dBW}$$

iv)

$$PER = 1 - (1 - P_b)^N = 10^{-1} \Rightarrow (1 - P_b) = 0,9^{1/800} \Rightarrow P_b = 1,317 \times 10^{-4}$$

$$P_b \approx \frac{2}{3} Q \left( \sqrt{\frac{6 E_b}{N_0}} \sin \frac{\pi}{8} \right) = 10^{-5} \Rightarrow Q \left( \sqrt{\frac{6 E_b}{N_0}} \sin \frac{\pi}{8} \right) = 1,975 \times 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{0,8787 \frac{E_b}{N_0}} = 3,6 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 14,74$$

$$P_{rx} = \frac{E_b}{N_0} N_0 R_b = 14,74 (2 \times 10^{-15} \times 10^{-3}) 461,5 \times 10^3 = 1,361 \times 10^{-11} = -108,7 \text{ dBW}$$

# Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

## Questão 2 (2,5 pontos)

Um sistema de transmissão binário utiliza pulsos senoidais de larguras diferentes, ou seja, caso seja enviado o bit 0, temos  $q(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right) \text{rect}\left(\frac{t}{T_s}\right)$ , e caso seja enviado o bit 1, temos

$$p(t) = \cos\left(\frac{4\pi t}{T_s}\right) \text{rect}\left(\frac{t}{T_s/2}\right).$$

Qual a probabilidade de erro deste sistema?

$$P_e = Q\left(\frac{\beta}{2}\right), \quad \beta^2 = \frac{E_p + E_q - 2E_{pq}}{N_0/2},$$

$$E_p = \int_{-T_s/4}^{T_s/4} \cos^2\left(\frac{4\pi t}{T_s}\right) dt = \int_{-T_s/4}^{T_s/4} \frac{1}{2} dt + \int_{-T_s/4}^{T_s/4} \frac{1}{2} \cos\left(\frac{8\pi t}{T_s}\right) dt = \frac{T_s}{4}$$

$$E_q = \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right) dt = \frac{T_s}{2}$$

manipulando as identidades trigonométricas, temos que

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \cos(x+y) + \frac{1}{2} \cos(x-y), \text{ e portanto}$$

$$\begin{aligned} E_{pq} &= \int_{-T_s/4}^{T_s/4} \cos\left(\frac{4\pi t}{T_s}\right) \cos\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right) dt = \int_{-T_s/4}^{T_s/4} \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right) dt + \int_{-T_s/4}^{T_s/4} \frac{1}{2} \cos\left(\frac{6\pi t}{T_s}\right) dt \\ &= \frac{T_s}{2\pi} \text{sen}(\pi/2) + \frac{T_s}{6\pi} \text{sen}(3\pi/2) = \frac{T_s}{3\pi} \end{aligned}$$

$$E_b = \frac{E_p + E_q}{2} = \frac{3T_s}{8}$$

$$\beta^2 = \frac{\frac{T_s}{4} + \frac{T_s}{2} - \frac{2T_s}{3\pi}}{N_0/2} = 1,0756 \frac{T_s}{N_0} = 2,868 \frac{E_b}{N_0}$$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{\beta^2}{4}}\right) = Q\left(\sqrt{0,717 \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

# Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

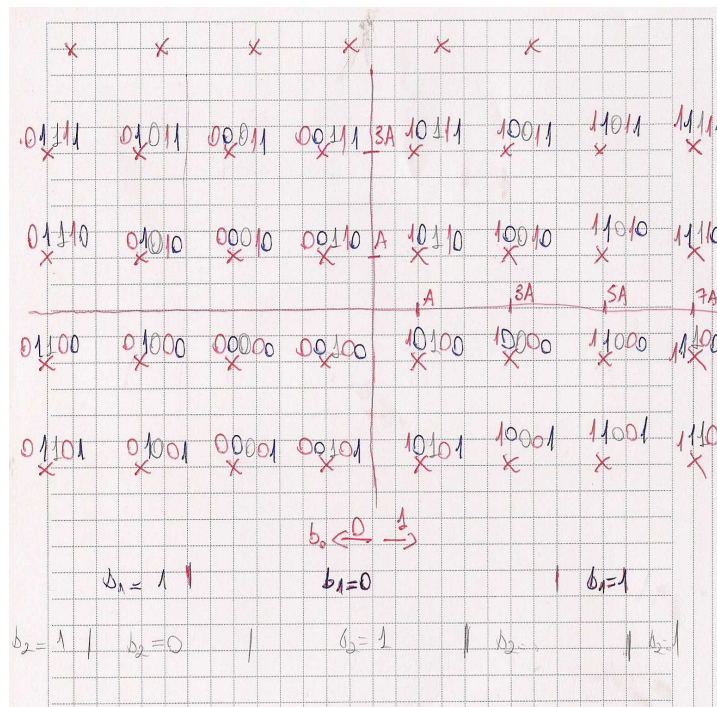
## Questão 3 (2,5 pontos)

Um esquema de transmissão 32 QAM pode ser construído como a combinação de um 8 PAM em uma dimensão e um 4 PAM na outra dimensão.

i) Desenhe a constelação e calcule a probabilidade de erro de bit para este esquema. Sugira um mapeamento de bits seguindo a codificação de Gray. (1,3 pontos)

ii) Entretanto, sabe-se que este não é o esquema 32-QAM ideal em termos de probabilidade de erro de bit. Sugira uma outra constelação 32-QAM que tenha um desempenho melhor que a do esquema do item i, e estime o ganho de desempenho em termos dB a menos de potência necessários neste caso para uma mesma BER. (1,2 pontos)

i)



$$E_s = \frac{4}{32} [(A^2 + A^2) + 2(A^2 + 9A^2) + (A^2 + 25A^2) + (A^2 + 49A^2) + (9A^2 + 9A^2) + (9A^2 + 25A^2) + (9A^2 + 49A^2)]$$

$$= 26A^2 \Rightarrow A^2 = \frac{E_s}{26}$$

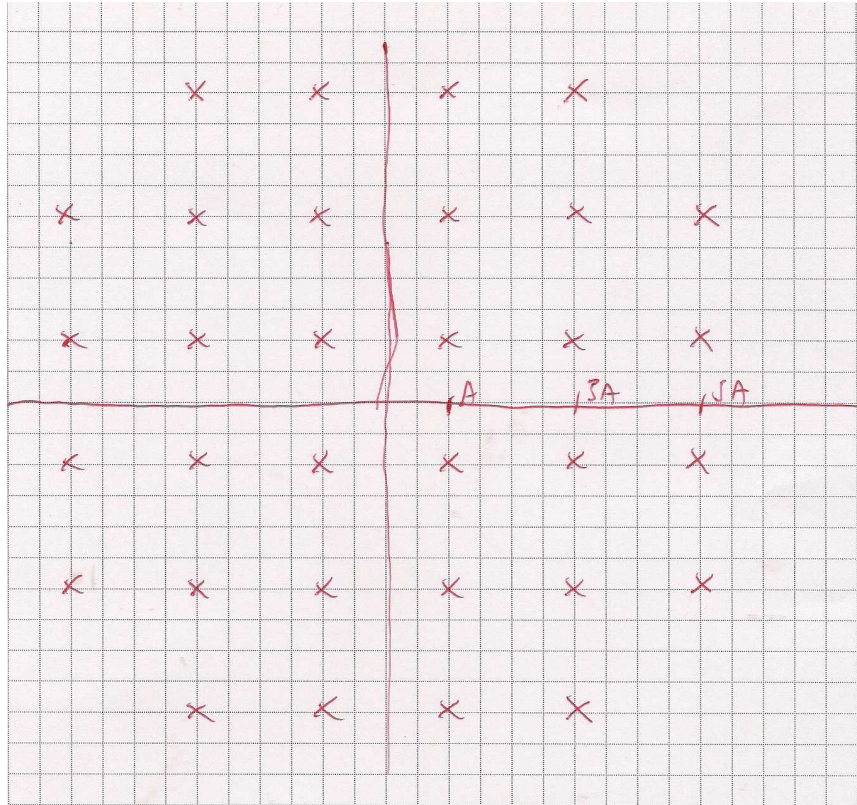
$$\bar{N}_{viz} = \frac{4}{32} (3(4) + 4(3) + 2) = \frac{13}{4} = 3,25$$

$$P_b = \frac{3,25}{5} Q \left( \sqrt{\frac{2A^2}{N_0}} \right) = 0,65 Q \left( \sqrt{\frac{E_s}{13N_0}} \right) = 0,65 Q \left( \sqrt{\frac{5E_b}{13N_0}} \right)$$

# Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

ii)



Uma constelação de menor energia média para uma mesma distância seria melhor, como por exemplo:

$$E_s = \frac{4}{32} [(A^2 + A^2) + 2(A^2 + 9A^2) + 2(A^2 + 25A^2) + (9A^2 + 9A^2) + 2(9A^2 + 25A^2)]$$

$$= 20A^2 \Rightarrow A^2 = \frac{E_s}{20}$$

$$\bar{N}_{viz} = \frac{4}{32} (4(4) + 2(3) + 2(2)) = \frac{13}{4} = 3,25$$

$$P_b = \frac{3,25}{5} Q \left( \sqrt{\frac{2A^2}{N_0}} \right) = 0,65 Q \left( \sqrt{\frac{E_s}{10N_0}} \right)$$

O ganho de desempenho é

$$G = \frac{13}{10} = 1,4 \text{ dB}$$

# Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

## Questão 4 (1,5 pontos)

Dado o seguinte espaço de sinais

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= A \Delta\left(\frac{t}{T_s}\right) \\ \varphi_2(t) &= B \Delta\left(\frac{2(t - T_s/4)}{T_s}\right) \\ \varphi_3(t) &= B \Delta\left(\frac{2(t + T_s/4)}{T_s}\right)\end{aligned}$$

i) esboce os sinais do esquema de transmissão quaternário representado abaixo:

$$\bar{s}_1 = (\alpha, 0, 0)$$

$$\bar{s}_2 = (-\alpha, 0, 0)$$

$$\bar{s}_3 = (0, \alpha, \alpha)$$

$$\bar{s}_4 = (0, \alpha, -\alpha)$$

ii) Qual a energia de cada um dos 4 sinais? Qual a energia de bit?

iii) Qual a distância entre  $s_1(t)$  e  $s_3(t)$ ?

iv) Qual o valor do produto interno  $\langle s_1(t), s_4(t) \rangle$ ?

Esta questão foi anulada, uma vez que os sinais não são ortogonais. A nota será a maior dentre as duas opções abaixo:

1) Quem fez considerando que os sinais são ortogonais terá os pontos validados.

2) Para quem não fez a questão, o restante da prova valerá mais pontos.

# Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

## Questão 5 (1 ponto)

Em que situação se justifica o uso de um esquema M-FSK em vez de um M-QAM, e por que?

O M-FSK deve ser utilizado quando não há restrição de banda, já que no M-FSK a probabilidade de erro de bit diminui com o aumento de  $M$ , ao custo de um aumento na banda ocupada.

Além disso o FSK apresenta duas vantagens, uma amplitude constante e a possibilidade de detecção não coerente.

# Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

## Fórmulas Úteis

### Identidades Trigonométricas:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x + \tan^{-1}(-b/a))$$

### Transmissão Digital

filtro de recepção ótimo  $H(f) = k \frac{P(-f) e^{-j2\pi f T_m}}{S_n(f)}$

$$P_e = Q\left(\frac{\beta}{2}\right), \quad \beta^2 = \frac{E_p + E_q - 2E_{pq}}{N_0/2}, \quad \text{com } E_{pq} = \int_0^{T_m} p(t)q(t)dt$$

banda de transmissão com pulsos de Nyquist:

$$B = (1+r)R_s \quad \text{para sistemas em banda passante,} \quad B = (1+r)\frac{R_s}{2} \quad \text{em banda base}$$

Probabilidade de Erro de Símbolo ( $P_e$ ) e de Bit ( $P_b$ ) de Esquemas de Modulação Comuns

$$P_{b,BPSK} = P_{b,QPSK} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \quad P_{b,OOK} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_{b,2-FSK,coerente} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b(1 - \text{sinc}(2\pi\Delta f T_s))}{N_0}}\right)$$

$$P_{b,OOK,não-coerente} = P_{b,2-FSK,não-coerente} = \frac{1}{2} e^{-E_b/2N_0}$$

$$P_{e,M-PAM} = 2\left(\frac{M-1}{M}\right) Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M E_b}{M^2 - 1 N_0}}\right)$$

$$P_{e,M-QAM} \approx 4\left(\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M E_b}{M-1 N_0}}\right) \quad \text{apenas para QAM quadrado } (M=4^n)$$

$$P_{e,M-PSK} \approx 2 Q\left(\sqrt{\frac{2 E_b \log_2 M}{N_0}} \text{sen } \frac{\pi}{M}\right)$$

Probabilidade de Erro entre dois pontos

$$P_e = Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right)$$



# Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Função Q

x	Q(x)	x	Q(x)
0,1	4,60E-001	3,1	9,68E-004
0,2	4,21E-001	3,2	6,87E-004
0,3	3,82E-001	3,3	4,83E-004
0,4	3,45E-001	3,4	3,37E-004
0,5	3,09E-001	3,5	2,33E-004
0,6	2,74E-001	3,6	1,59E-004
0,7	2,42E-001	3,7	1,08E-004
0,8	2,12E-001	3,8	7,23E-005
0,9	1,84E-001	3,9	4,81E-005
1,0	1,59E-001	4,0	3,17E-005
1,1	1,36E-001	4,1	2,07E-005
1,2	1,15E-001	4,2	1,33E-005
1,3	9,68E-002	4,3	8,54E-006
1,4	8,08E-002	4,4	5,41E-006
1,5	6,68E-002	4,5	3,40E-006
1,6	5,48E-002	4,6	2,11E-006
1,7	4,46E-002	4,7	1,30E-006
1,8	3,59E-002	4,8	7,93E-007
1,9	2,87E-002	4,9	4,79E-007
2,0	2,28E-002	5,0	2,87E-007
2,1	1,79E-002	5,1	1,70E-007
2,2	1,39E-002	5,2	9,96E-008
2,3	1,07E-002	5,3	5,79E-008
2,4	8,20E-003	5,4	3,33E-008
2,5	6,21E-003	5,5	1,90E-008
2,6	4,66E-003	5,6	1,07E-008
2,7	3,47E-003	5,7	5,99E-009
2,8	2,56E-003	5,8	3,32E-009
2,9	1,87E-003	5,9	1,82E-009
3,0	1,35E-003	6,0	9,87E-010