

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto
Prova 3– 2013/2 (28/11/2013)

Aluno: _____

Matrícula: _____

Instruções

- A prova consiste de três questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h00
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda resposta deverá está contida nas folhas avulsas distribuídas. Todas as páginas devem conter o nome e a matrícula, o número da página e o número total de páginas. Não será aceita reclamação por sumiço de folhas que não satisfaçam estas condições.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	Nota
Q1	
Q2	
Q3	
Total	

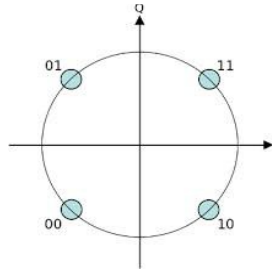
Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 1 (5 pontos)

Um sistema de comunicações digitais emprega modulação QPSK e códigos de Hamming (7,4) (lembre-se que a matriz de verificação de paridade de um código de Hamming é gerada com todos as combinações não nulas de m bits, com $N=2^m-1$).

A constelação utilizada pode ser vista abaixo:



- i) Supondo que foram enviados os bits 01110001, qual o sinal enviado após o codificador e o mapeador QPSK? (1 ponto)
- ii) Qual a probabilidade de erro deste sistema (em relação ao E_b/N_0), e qual o ganho de codificação em um canal AWGN, com decodificação soft, para uma BER de 10^{-5} ? (1 ponto)
- iii) Supondo agora que o sinal passa por um canal com resposta discreta $h[k]=0,5\delta[k]+0,25j\delta[k-1]-0,25\delta[k-2]$, qual o sinal recebido sem ruído? (1 ponto)
- iv) Desenhe a treliça do equalizador de Viterbi neste caso. (1 ponto)
- v) Projete um equalizador ZF para este canal. Qual sua RSR na saída? (1 ponto)

O código de Hamming tem (por exemplo) matriz de verificação de paridade

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{P}^T \mathbf{I}]$$

e matriz geradora

$$\mathbf{G} = [\mathbf{I} \mathbf{P}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

As mensagens enviadas são

$\mathbf{m}_1 = [0111]$ e $\mathbf{m}_2 = [0001]$, que correspondem às palavras código

$\mathbf{c}_1 = \mathbf{m}_1 \mathbf{G} = [0111000]$ e $\mathbf{c}_2 = \mathbf{m}_2 \mathbf{G} = [0001011]$

ou seja, será enviada a sequência de bits

01 11 10 00 00 10 11,

que corresponde à sequência de símbolos

$$\mathbf{x} = \sqrt{\frac{E_c}{2}} [-1+j; 1+j; 1-j; -1-j; -1-j; 1-j; 1+j]$$

ii)

com decodificação soft

$$p_{b,c} \approx N_{min} \frac{d_{min}}{N} Q \left(\sqrt{\frac{2 R d_{min} E_b}{N_0}} \right) = 3 \frac{3}{7} Q \left(\sqrt{2 \left(\frac{4}{7} \right) (3) \frac{E_b}{N_0}} \right) = \frac{9}{7} Q \left(\sqrt{\frac{24 E_b}{7 N_0}} \right)$$

para BER = 10^{-5} , com QPSK e sem codificação

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

$$P_{b,u} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 10^{-5} \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 9,245 = 9,66 \text{ dB}$$

e com codificação

$$P_{b,u} = \frac{9}{7} Q\left(\sqrt{\frac{24}{7} \frac{E_b}{N_0}}\right) = 10^{-5} \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 5,65 = 7,52 \text{ dB}$$

Portanto, o ganho é de 2,14dB;

iii)

O sinal recebido é dado por $y[k] = 0,5x[k] + 0,25jx[k-1] - 0,25x[k-2]$

Ou seja,

$$y[0] = 0,5x[0] = \sqrt{\frac{E_c}{2}}(-0,5 + 0,5j)$$

$$y[1] = 0,5x[1] + 0,25jx[0] = \sqrt{\frac{E_c}{2}}(0,25 + 0,25j)$$

$$y[2] = 0,5x[2] + 0,25jx[1] - 0,25x[0] = \sqrt{\frac{E_c}{2}}(-0,5 - 0,5j)$$

$$y[3] = \sqrt{\frac{E_c}{2}}(-0,5 - j) \quad y[4] = \sqrt{\frac{E_c}{2}}(-0,5j) \quad y[5] = \sqrt{\frac{E_c}{2}}(1 - 0,5j)$$

$$y[6] = \sqrt{\frac{E_c}{2}}(1 + j)$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

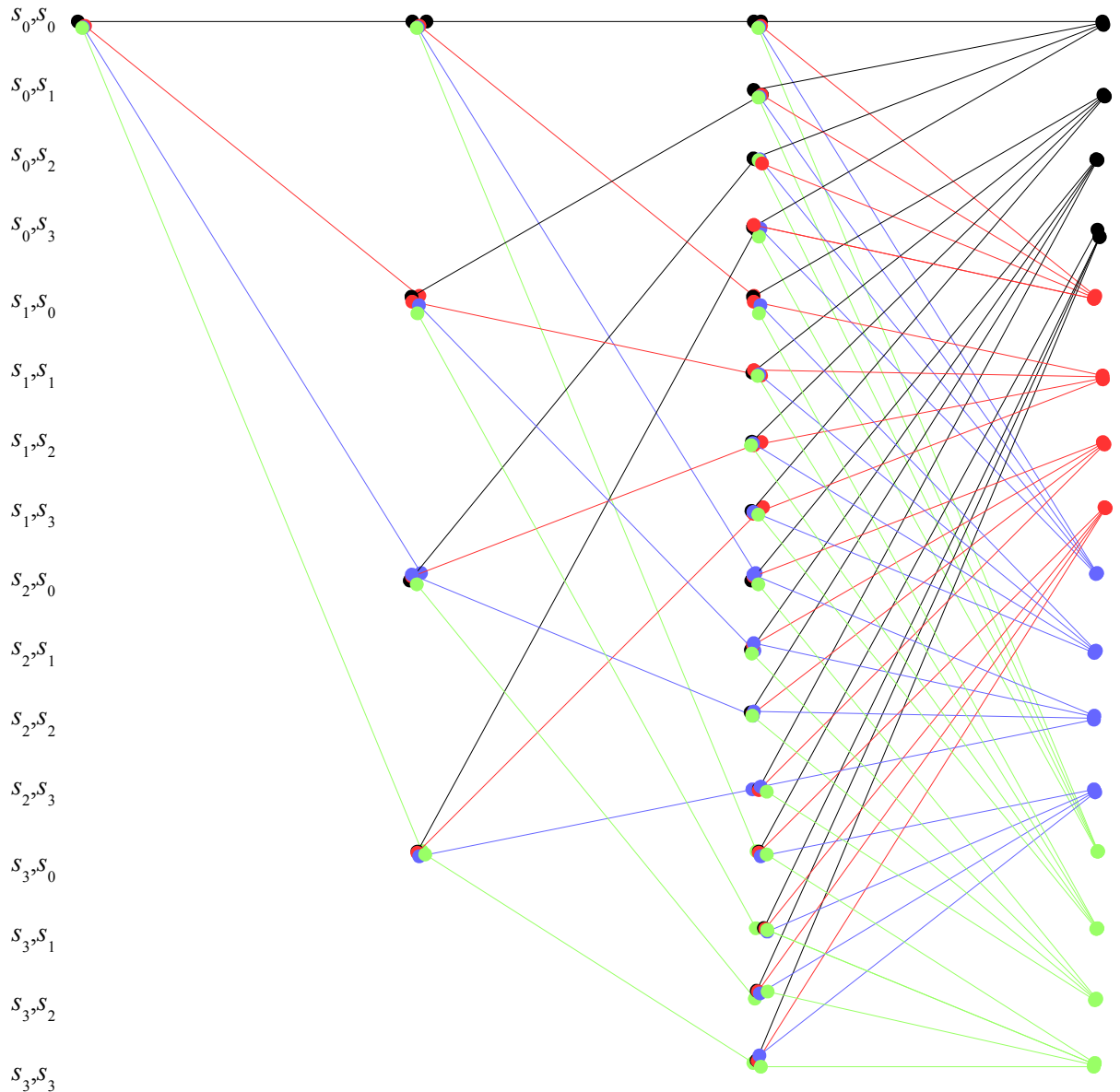
iv)

A treliça terá neste caso 16 estados, correspondentes às 16 combinações dos dois últimos símbolos, e de cada estado saem 4 diferentes ramos, correspondentes aos 4 símbolos do QPSK.

Chamando $s_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$ $s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j)$ $s_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-j)$ $s_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j)$,

temos a seguinte treliça:

$x[k-1], x[k-2]$



Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

v)

$$H(z) = 0,5 + 0,25jz^{-1} - 0,25z^{-2}$$

$$F_{ZF}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{0,5 + 0,25jz^{-1} - 0,25z^{-2}}$$

$$= 2 - jz^{-1} + 0,5z^{-2} - 0,75jz^{-3} - 0,125z^{-4} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$$

A razão sinal ruído na saída é dada por

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{out} = \frac{E_b}{N_0 \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2} = \frac{E_b}{N_0 (4 + 1 + 0,25 + 0,5625 + 0,015625 + \dots)}$$

que, calculando numericamente,

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{out} = \frac{E_b}{6N_0}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 2 (2,5 pontos)

Um sistema de transmissão no esquema OFDM é projetado para um canal indoors, cujo atraso máximo é de 500ns. Este sistema utiliza subportadoras espaçadas de 400kHz utilizando uma IFFT de 32 pontos. Considerando apenas as subportadoras de dados, este sistema ocupa uma banda de 10 MHz.

- i) Supondo o uso de modulação 64-QAM com códigos corretores de erro de taxa $R=3/4$, qual a eficiência espectral deste sistema (bps/Hz)? (1,2 pontos)
- ii) caso o sistema tivesse que ser adaptado para um ambiente outdoors, com atraso máximo de 5 μ s, qual seria a eficiência espectral? O que poderia ser feito para termos a mesma eficiência espectral que no item (i)?

i)

$$T_s = \frac{1}{400\text{kHz}} = 2,5\mu s$$

$$T = T_s + T_G = 3\mu s$$

$$B_T = 10\text{MHz} \approx N_d (400\text{kHz}) \Rightarrow N_d = 25$$

$$\eta = \frac{R_b}{B_T} = \frac{N_d R \log_2 M}{T B_T} = \frac{37,5 \text{ Mbps}}{10\text{MHz}} = 3,75$$

ii)

o que muda agora é o valor de T_G

$$\eta = \frac{R_b}{B_T} = \frac{N_d R \log_2 M}{(T_s + T_G) B_T} = \frac{15 \text{ Mbps}}{10\text{MHz}} = 1,5$$

Para mantermos a eficiência, temos que aumentar o intervalo de símbolo (o que é equivalente a diminuir o intervalo entre subportadoras). Devemos manter o overhead do intervalo de guarda igual.

Substituindo acima e $\Delta f = \frac{B_T}{N_d}$

Queremos que

$$\eta_{\text{in}} = \frac{R \log_2 M}{\left(\frac{1}{\Delta f_{\text{in}}} + T_{G,\text{in}}\right) \Delta f_{\text{in}}} = \eta_{\text{out}} = \frac{R \log_2 M}{\left(\frac{1}{\Delta f_{\text{out}}} + T_{G,\text{out}}\right) \Delta f_{\text{out}}}$$

ou seja,

$$\frac{\Delta f_{\text{out}}}{\Delta f_{\text{in}}} = \frac{T_{G,\text{in}}}{T_{G,\text{out}}}$$

Portanto queremos agora um sistema com $\Delta f_{\text{out}} = 40\text{kHz}$ e $T_{s,\text{out}} = 25\mu s$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 3 (2,5 pontos)

Um código corretor de erros é gerado pela matriz geradora

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Qual sua taxa de codificação? (0,4 ponto)
- Qual sua matriz de verificação de paridade? (0,4 ponto)
- A palavra [0 1 0 1 0 1 0 1 0] é uma palavra código válida? Por quê? (0,4 ponto)
- Se não for uma palavra válida, qual a palavra código mais provável e qual a mensagem correspondente? (0,4 ponto)
- Quantas síndromes diferentes podem ser obtidas? (0,4 ponto)
- Qual seu ganho de codificação para uma BER de 10^{-5} com decodificação hard? (0,5 ponto)

i)

$$R = \frac{4}{9}$$

ii)

com algumas manipulações, chegamos à matriz geradora sistemática

$$\mathbf{G}_{sist} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e à matriz de verificação de paridade correspondente

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iii)

$$\mathbf{r} \mathbf{H}^T = [00001] \neq 0, \text{ portanto a palavra não é válida}$$

iv)

podemos ver que a palavra difere apenas de 1 bit da terceira linha da matriz G, e, portanto, a palavra mais provável (com $d_H = 1$) é 010101010, que corresponde à mensagem 0010

v)

temos $2^{n-k} = 32$ síndromes possíveis

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

vi)

verificando todas as palavras possíveis, verificamos que $d_{min} = 4$ e $t=1$

sem codificação, temos que

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 10^{-5} \Rightarrow \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = 4,3 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 9,245$$

com codificação

$$p_{b,c} \approx \binom{8}{1} (p_c)^2 = 10^{-5} \Rightarrow p_c = 0,0011$$

$$Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot \frac{4}{9} E_b}{N_0}}\right) = 0,0011 \Rightarrow \sqrt{\frac{8 E_b}{9 N_0}} = 3,1 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 10,8$$

Nesta situação, o código não traz nenhum ganho, mas uma perda de $9,245/10,8 = -0,7$ dB.

Esta perda se deve ao fato de que consideramos que apenas as sequências de 1 erro são corrigidas. Se considerarmos a correção de algumas sequências de 2 (ou mais) erros, o código provavelmente apresentaria ganho.

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Equalização TSE

$$F_{ZF}(z) = \frac{1}{H(z)} \quad F_{MMSE}(z) = \frac{H^*(z)}{|H(z)|^2 + \frac{S_x(z)}{S_n(z)}}$$

MMSE:

$$\begin{bmatrix} R_y[0] & R_y[-1] & \dots & R_y[-M] \\ R_y[1] & R_y[0] & \dots & R_y[1-M] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_y[M] & R_y[M-1] & \dots & R_y[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ \vdots \\ f[M] \end{bmatrix} = E_s \begin{bmatrix} h^*[u] \\ h^*[u-1] \\ \vdots \\ h^*[0] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

$$R_y[m] = E\{y[n+m]y^*[n]\} ,$$

Equalização MLSE

queremos obter a sequência $x[i]$ que minimiza $\sum_i \left| y[i] - \sum_k h[k]x_{i-k} \right|^2$

DFT/IDFT

$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \quad h_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{j2\pi \frac{nk}{N}}$$

Probabilidade de erro de códigos de bloco

com detecção *hard*

$$p_{b,c} \approx \binom{n-1}{t} (p_c)^{t+1} , \text{ em que, para BPSK } p_c = Q\left(\sqrt{\frac{2RE_b}{N_0}}\right)$$

com detecção *soft*

$$p_{b,c} \approx N_{min} \frac{d_{min}}{N} Q\left(\sqrt{\frac{2Rd_{min}E_b}{N_0}}\right)$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Função Q

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

x	Q(x)	x	Q(x)
0,1	4,60E-001	3,1	9,68E-004
0,2	4,21E-001	3,2	6,87E-004
0,3	3,82E-001	3,3	4,83E-004
0,4	3,45E-001	3,4	3,37E-004
0,5	3,09E-001	3,5	2,33E-004
0,6	2,74E-001	3,6	1,59E-004
0,7	2,42E-001	3,7	1,08E-004
0,8	2,12E-001	3,8	7,23E-005
0,9	1,84E-001	3,9	4,81E-005
1,0	1,59E-001	4,0	3,17E-005
1,1	1,36E-001	4,1	2,07E-005
1,2	1,15E-001	4,2	1,33E-005
1,3	9,68E-002	4,3	8,54E-006
1,4	8,08E-002	4,4	5,41E-006
1,5	6,68E-002	4,5	3,40E-006
1,6	5,48E-002	4,6	2,11E-006
1,7	4,46E-002	4,7	1,30E-006
1,8	3,59E-002	4,8	7,93E-007
1,9	2,87E-002	4,9	4,79E-007
2,0	2,28E-002	5,0	2,87E-007
2,1	1,79E-002	5,1	1,70E-007
2,2	1,39E-002	5,2	9,96E-008
2,3	1,07E-002	5,3	5,79E-008
2,4	8,20E-003	5,4	3,33E-008
2,5	6,21E-003	5,5	1,90E-008
2,6	4,66E-003	5,6	1,07E-008
2,7	3,47E-003	5,7	5,99E-009
2,8	2,56E-003	5,8	3,32E-009
2,9	1,87E-003	5,9	1,82E-009
3,0	1,35E-003	6,0	9,87E-010