Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 1 – 2016/1 (31/03/2016)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de 5 (cinco) questões discursivas.
- A prova terá a duração de 2h
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Pode ser consultado qualquer material impresso ou escrito.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Indicar aqui as questões resolvidas:

Questão	Nota
Total	

Questão 1 (2 pontos)

Um termômetro é capaz de medir temperaturas entre -10º e 40º, de modo que temperaturas fora deste intervalo são medidas como um dos extremos (por exemplo, uma temperatura de 45º é medida como 40º). Supondo que a temperatura real é uma variável aleatória cuja função de densidade de probabilidade é $p_{\mathrm{x}}(x) = A\Delta\left(\frac{x-20}{50}\right)$ qual a média e a variância do valor de temperatura medido?

Sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathrm{x}}(x)dx = 25A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{25}$$

A temperatura varia entre -5º e 45º, mas só conseguimos medir até 40º.
Considerando agora y uma variável aleatória representando a temperatura medida, temos que

$$P(\mathrm{y} = 40) = \int_{40}^{\infty} p_{\mathrm{x}}(x)dx = \frac{1}{50},$$

e que, para $y \leq 40$, $p_{\mathrm{y}}(y) = p_{\mathrm{x}}(y)$.

Sendo assim

$$E[\mathrm{y}] = \int_{-\infty}^{40} x p_{\mathrm{x}}(x)dx + 40P(\mathrm{y} = 40)$$

$$= \int_{-5}^{20} x\left(\frac{x}{625} + \frac{1}{125}\right)dx + \int_{20}^{40} x\left(-\frac{x}{625} + \frac{9}{125}\right)dx + \frac{40}{50} = \frac{623}{30} = 19{,}9667$$

$$E[\mathrm{y}^2] = \int_{-5}^{20} x^2\left(\frac{x}{625} + \frac{1}{125}\right)dx + \int_{20}^{40} x^2\left(-\frac{x}{625} + \frac{9}{125}\right)dx + \frac{40^2}{50} = \frac{6017}{12} = 501{,}417$$

$$\sigma_{\mathrm{y}}^2 = E[\mathrm{y}^2] - (E[\mathrm{y}])^2 = 102{,}78$$

Questão 2 (2 pontos)

Suponha um canal ternário, no qual é enviado um sinal x, que pode ser um de três valores diferentes, a, b e c, todos equiprováveis. O canal introduz erros e recebemos um sinal x de modo que

$$P(\mathrm{y}=b|\mathrm{x}=a)=P(\mathrm{y}=c|\mathrm{x}=a)=0{,}1$$
$$P(\mathrm{y}=a|\mathrm{x}=b)=0{,}2$$
$$P(\mathrm{y}=c|\mathrm{x}=b)=0{,}1$$
$$P(\mathrm{y}=a|\mathrm{x}=c)=P(\mathrm{y}=b|\mathrm{x}=c)=0{,}2$$

i) Qual a probabilidade de erro $P(\mathrm{y}\neq\mathrm{x})$ deste canal?

$$P(\mathrm{y}\neq\mathrm{x})=P(\mathrm{y}\neq a|\mathrm{x}=a)P(a)+P(\mathrm{y}\neq b|\mathrm{x}=b)P(b)+P(\mathrm{y}\neq c|\mathrm{x}=c)P(c)$$
$$P(\mathrm{y}\neq\mathrm{x})=\frac{1}{3}(0{,}1+0{,}1)+\frac{1}{3}(0{,}2+0{,}1)+\frac{1}{3}(0{,}2+0{,}2)=0{,}3$$

ii) Se observarmos na saída $\mathrm{y}=a$, qual a probabilidade de termos também enviado o símbolo a?

$$P(\mathrm{x}=a|\mathrm{y}=a)=\frac{P(\mathrm{x}=a)P(\mathrm{y}=a|\mathrm{x}=a)}{P(\mathrm{y}=a)}$$
$$P(\mathrm{y}=a)=P(\mathrm{y}=a|\mathrm{x}=a)P(\mathrm{x}=a)+P(\mathrm{y}=a|\mathrm{x}=b)P(\mathrm{x}=b)+P(\mathrm{y}=a|\mathrm{x}=c)P(\mathrm{x}=c)$$
$$=\frac{8}{10}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{10}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{10}\left(\frac{1}{3}\right)=0{,}4$$

Portanto

$$P(\mathrm{x}=a|\mathrm{y}=a)=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{8}{10}\right)}{4/10}=\frac{2}{3}$$

Questão 3 (2 pontos)

Temos duas moedas, uma normal, com dois lados diferentes (cara e coroa), e uma com dois lados iguais (duas caras). Pegamos uma moeda aleatoriamente e a jogamos 2 vezes, e o resultado de ambas as tentativas é cara. Qual a probabilidade de a moeda escolhida ser a moeda normal?

Chamando a moeda com dois lados iguais de viciada, temos que

$$P(\text{cara}|\text{moeda normal}) = P(\text{coroa}|\text{moeda normal}) = \frac{1}{2}$$
$$P(\text{cara}|\text{moeda viciada}) = 1$$

e, jogando duas vezes,

$$P(\text{cara, cara }|\text{moeda normal}) = \frac{1}{4}$$
$$P(\text{cara, cara}|\text{moeda viciada}) = 1$$

e queremos

$$P(\text{moeda normal}|\text{cara, cara}) = \frac{P(\text{moeda normal})P(\text{cara, cara}|\text{moeda normal})}{P(\text{cara, cara})}$$

com

$$P(\text{cara, cara}) = P(\text{moeda normal})P(\text{cara, cara}|\text{moeda normal}) + P(\text{moeda viciada})P(\text{cara, cara}|\text{moeda viciada}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}(1) = \frac{5}{8}$$

Portanto,

$$P(\text{moeda normal}|\text{cara, cara}) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}{\frac{5}{8}} = \frac{1}{5}$$

Questão 4 (2 pontos)

A duração da transmissão de um pacote em um enlace de Internet é uma variável aleatória exponencial com média T e as durações de pacotes distintos são variáveis aleatórias independentes. Se enviarmos n pacotes, o tempo de transmissão total é a soma dos tempos de transmissão de todos os pacotes. Considerando um número muito grande de pacotes, use o Teorema Central do Limite para achar a probabilidade de que o tempo de transmissão total seja maior que $2nT$.

Sabemos que uma v.a exponencial tem média T tem variância T^2.
O tempo de transmissão total T_T é a soma de um grande número n de variáveis aleatórias i.i.d., e pode ser aproximado por uma variável aleatória Gaussiana com média nT e variância nT^2.
A probabilidade de que o tempo total seja maior que um valor $2nT$ pode ser dada aproximadamente, por

$$P(T_T > 2nT) = Q\left(\frac{2nT - nT}{\sqrt{nT^2}}\right) = Q(\sqrt{n})$$

Questão 5 (2 pontos)

Dadas duas variáveis aleatórias x e y, sabemos que x é uniforme entre 0 e 1 e que a condicional de y dado x é uma exponencial com média x. Encontre a função densidade de probabilidade de y.

$$p_{\mathrm{x}}(x) = \mathrm{rect}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$p_{\mathrm{y|x}}(y|x) = \frac{1}{x}e^{-\frac{y}{x}}$$

Queremos

$$p_{\mathrm{y}}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathrm{x,y}}(x,y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathrm{x}}(x)p_{\mathrm{y|x}}(y|x)dx$$

$$\boxed{p_{\mathrm{y}}(y) = \int_{0}^{1} \frac{1}{x}e^{-\frac{y}{x}}dx}$$

Esta é a definição da função gama incompleta

$$p_{\mathrm{y}}(y) = \Gamma(y, 0)$$