Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 2 – 2016/1 (26/04/2016)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de 4 (quatro) questões discursivas.
- A prova terá a duração de 2h
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Pode ser consultado qualquer material impresso ou escrito.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Indicar aqui as questões resolvidas:

Questão	Nota
Total	

Questão 1 (2,5 pontos)

Em um canal de comunicações é enviado um sinal aleatório x, com distribuição uniforme no intervalo [-1,1). O canal é corrompido com ruído n, também uniforme, distribuído entre [-*a*,*a*), de modo que recebemos o sinal y = x + n.

i) Qual a razão sinal-ruído (potência do sinal x / potência do ruído n) em função de *a*?
ii) Caso observemos y, ache o estimador LMS para x.
iii) Qual o erro quadrático médio neste caso? Qual seria o erro quadrático se tivéssemos um estimador $\hat{x} = y$?

i)

$$P_x = E\{x^2\} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{1}{3}$$
$$P_n = E\{n^2\} = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2a} x^2 dx = \frac{a^2}{3}$$
$$RSR = \frac{P_x}{P_n} = \frac{1}{a^2}$$

ii)

$$\hat{x} = \beta y$$
$$\beta = \frac{R_{xy}}{R_{yy}}$$
$$R_{xy} = E\{x(x+n)\} = E\{x^2\} = \frac{1}{3}$$
$$R_{yy} = E\{(x+n)(x+n)\} = E\{x^2\} + E\{n^2\} = \frac{1+a^2}{3}$$
$$\hat{x} = \frac{1}{1+a^2} y$$

iii)

$$\epsilon = x - \beta x$$
$$E\{\epsilon^2\} = R_{xx} - \beta R_{xy} = \frac{1}{3} - \frac{1}{1+a^2}\frac{1}{3} = \frac{a^2}{3(1+a^2)}$$

Se $\hat{x}$=y,

$$\epsilon_1 = x - y = -n$$
$$E\{\epsilon_1^2\} = E\{n^2\} = \frac{a^2}{3}$$

Questão 2 (2,5 pontos)

Um sinal aleatório x(t) é enviado em um canal ruidoso, com ruído n(t), de modo que é recebido o sinal y(t)=x(t)+n(t). Sabendo que ambos x(t) e n(t) são sinais estacionários no sentido amplo de média nula, que $R_x(\tau) = \left(\frac{\sin(\pi\tau)}{\pi\tau}\right)^2$ e que $S_n(f) = 1 - \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2}\right)$, ache o filtro de recepção óptimo, que minimiza a distorção.

$$R_x(\tau) = sinc^2(\pi\tau)$$
$$S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} = \Delta\left(\frac{f}{2}\right)$$

Como a potência do ruído está toda fora da banda do sinal, o filtro ótimo é um filtro passa baixa com frequência de corte igual a 1Hz.

Questão 3 (2,5 pontos)

Um processo aleatório tem função de autocorrelação $R_x(\tau) = \frac{1}{1+\tau^2}$. Se este sinal passar por um derivador, qual a potência na saída deste derivador?

$$S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} = \pi e^{-2\pi|f|}$$

Um derivador é um sistema linear com $H(f) = j2\pi f$, e, portanto, na saída temos o sinal y, com

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f) = 4\pi^3 f^2 e^{-2\pi|f|}$$

A potência na saída será

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f)df = 8\pi^3 \int_0^{\infty} f^2 e^{-2\pi f} df = 2$$

Questão 4 (2,5 pontos)

Um sinal digital é transmitido utilizando codificação binária com pulsos de Nyquist

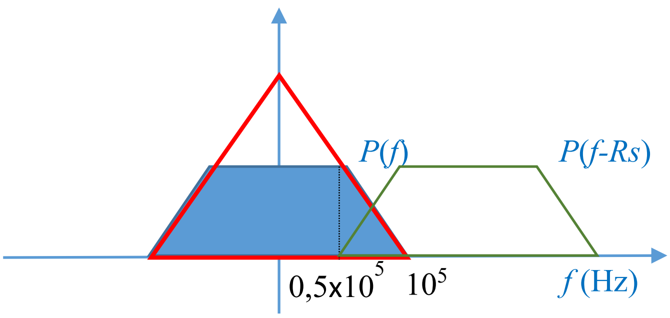
$$p(t) = sinc^2(10^5 \pi t) - \frac{1}{4} sinc^2\left(\frac{10^5 \pi t}{2}\right)$$

Este sinal digital é utilizado para transmitir um sinal analógico, digitalizado com PCM, amostrado com 10 bits/amostra. Supondo que o sinal analógico foi amostrado à taxa de Nyquist, qual a largura de banda deste sinal analógico?

O pulso na frequência é dado por

$$P(f) = 10^{-5} \Delta\left(\frac{f}{2 \times 10^5}\right) - \frac{1}{2} 10^{-5} \Delta\left(\frac{f}{10^5}\right)$$

e é mostrado na figura abaixo, em azul,



Para que este pulso seja um pulso de Nyquist, devemos ter

$$\frac{R_s}{2} = 0{,}75 \times 10^5 \text{ s}$$

E, com codificação binária teremos $R_b = R_s = 150$kbps.

Como temos 10 bits/amostra, a taxa de amostragem é de f_s =15kHz, e, portanto, a largura de banda máxima é de $B = 7{,}5$ kHz.

Integrais

$$\int x\sin ax dx = \frac{1}{a^2}(\sin ax - ax\cos ax)$$

$$\int x\cos ax dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax\sin ax)$$

$$\int x^2\sin ax dx = \frac{1}{a^3}(2ax\sin ax + 2\cos ax - a^2x^2\cos ax)$$

$$\int x^2\cos ax dx = \frac{1}{a^3}(2ax\cos ax - 2\sin ax + a^2x^2\sin ax)$$

$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$$

$$\int x^2e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$

$$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2 + b^2}$$

$$\int e^{ax}\sin bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2 + b^2}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + a^2)$$

$$\int \frac{x}{a^4 + x^4}dx = \frac{1}{2a^2}\tan^{-1}\frac{x^2}{a^2}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

UnB

departamento de engenharia elétrica