

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 5 – 2016/1 (21/06/2016)

Aluno: _____

Matrícula: _____

Instruções

- A prova consiste de 3 (três) questões discursivas.
- A prova terá a duração de 2h
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Pode ser consultado qualquer material impresso ou escrito.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Indicar aqui as questões resolvidas:

Questão	Nota
Total	

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 1 (2,5 pontos)

Suponha que $g(t)$ seja um pulso que satisfaça o critério de Nyquist de ISI nula, e que no transmissor seja utilizado um pulso de formatação $P(f) = \sqrt{G(f)}$. Supondo que no receptor é utilizado um filtro casado, mostre que o ruído w_k no sinal discreto amostrado a intervalos T_s na saída do receptor é branco, ou seja, $E\{w_k w_l\} = 0$, para $k \neq l$.

O ruído branco $n(t)$ tem PSD $S_n(f) = \frac{N_0}{2}$. Ao passar por um filtro casado com resposta $H(f) = P^*(-f) = \sqrt{G(f)}$, temos na saída

$$S_w(f) = |H(f)|^2 S_n(f) = \frac{N_0}{2} G(f)$$

A autocorrelação do ruído é

$$R_w(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_w(f)\} = \frac{N_0}{2} g(\tau)$$

Sabemos também que $w_k = w(kT_s)$, e, portanto

$$E\{w_k w_l\} = E\{w(kT_s)w(lT_s)\} = R_w((k-l)T_s) = \frac{N_0}{2} g((k-l)T_s),$$

Como o pulso $g(t)$ satisfaz o critério de Nyquist, $g(iT_s) = 0$, e, portanto

$$E\{w_k w_l\} = 0$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 2 (2,5 pontos)

Um sistema utiliza 16-QAM e transmite a uma taxa de 1Mbps. Sabemos que a resposta impulsional do sistema $h(t) = p(t) * c(t) * p(-t)$ tem uma duração de $5\mu\text{s}$, quantos estados teria um equalizador de Viterbi?

A taxa de símbolos é dada por $T_s = \frac{1}{R_s} = \frac{\log_2 M}{R_b} = \frac{4}{10^6} = 4\mu\text{s}$.

Deste modo em $5\mu\text{s}$ teremos $L = \left\lceil \frac{5\mu\text{s}}{T_s} \right\rceil = 2$.

O equalizador de Viterbi terá $M^{L-1} = 16$ estados.

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 3 (5 pontos)

Um sistema de comunicações digitais é utilizado em um canal com resposta impulsional $h[k] = \delta[k] - j\delta[k - 1]$. $e^{\frac{E_s,tx}{N_0}} = 6\text{dB}$.

- Qual a probabilidade de erro de bit para um sinal QPSK sem equalização? (1 ponto)
- Qual o filtro ZF no domínio da transformada-Z? (1 ponto)
- Construa a treliça do decodificador de Viterbi. (1 ponto)
- Ache os equalizadores MMSE de 3 taps supondo que tenhamos na saída do equalizador (2 pontos)
 - Um sinal sem atraso
 - Um sinal com atraso de uma amostra

Qual é melhor? Qual a razão sinal-ruído(distorção) na saída?

Supondo que a distorção é Gaussiana, qual seria a BER após a equalização?

a)

Vamos supor que tenhamos os símbolos

$$s_k = \frac{\sqrt{2}}{2} (\pm 1 \pm j) \sqrt{E_s}$$

O sinal recebido será $y[k] = x[k] - jx[k - 1] + w[k]$.

Podemos considerar que enviamos o símbolo $x[k] = s_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + j) \sqrt{E_s}$, cuja região de decisão é o quadrante superior direito.

Dependendo de $x[k - 1]$, o sinal recebido será um dos quatro sinais

$$y_1[k] = \frac{\sqrt{2}}{2} [(1 + j) - j(1 + j)] = \sqrt{2E_s}$$

$$y_2[k] = \frac{\sqrt{2}}{2} [(1 + j) - j(1 - j)] = 0$$

$$y_3[k] = \frac{\sqrt{2}}{2} [(1 + j) - j(-1 + j)] = \sqrt{2E_s}(1 + j)$$

$$y_4[k] = \frac{\sqrt{2}}{2} [(1 + j) - j(-1 - j)] = \sqrt{2E_s}j$$

Observando-se os pontos recebidos na constelação e a região de decisão, a probabilidade de erro de símbolo é

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{4} (P(\epsilon|y_1) + P(\epsilon|y_2) + P(\epsilon|y_3) + P(\epsilon|y_4)) \\ &= \frac{1}{4} \left(0,5 + 0,75 + 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) + 0,5 \right) \approx 0,4375 \end{aligned}$$

e, considerando codificação de Gray

$$P_e \approx \frac{1}{4} \left(0,25 + 0,5 + Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) + 0,25 \right) = 0,25$$

b)

$$H(z) = 1 - jz^{-1}$$

e, portanto,

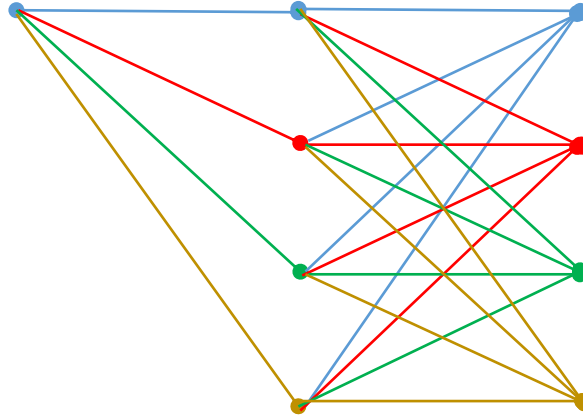
$$F_{ZF}(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{1 - jz^{-1}}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

c)

O equalizador tem $M^L = 4$ estados e $M = 4$ transições, e a treliça é dada por



d)

$$\begin{aligned} R_y[0] &= E\{y^*[k]y[k]\} \\ &= E\{(x[k] - jx[k-1] + w[k])(x^*[k] + jx^*[k-1] + w^*[k])\} \\ &= 2E_s + N_0 = E_s \left(2 + \frac{N_0}{E_s}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y[1] &= E\{y[k]y^*[k-1]\} \\ &= E\{(x[k] - jx[k-1] + w[k])(x^*[k-1] + jx^*[k-2] \\ &\quad + w^*[k-1])\} = -jE_s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_y[2] &= E\{y[k]y^*[k-2]\} \\ &= E\{(x[k] - jx[k-1] + w[k])(x^*[k-2] + jx^*[k-3] \\ &\quad + w^*[k-2])\} = 0 \end{aligned}$$

Considerando um atraso $u = 0$

$$E_s \begin{bmatrix} 2 + N_0/E_s & j & 0 \\ -j & 2 + N_0/E_s & j \\ 0 & -j & 2 + N_0/E_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = E_s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e, com $\frac{E_s}{N_0} = 4$, teremos

$$\mathbf{f} = [0,5896; 0,3265; -0,1451].$$

O erro quadrático médio é

$$MSE = E_s(1 - h[0]f[0]) = E_s(1 - 0,5896) = 0,4104E_s.$$

Considerando um atraso $u = 1$

$$E_s \begin{bmatrix} 2 + N_0/E_s & j & 0 \\ -j & 2 + N_0/E_s & j \\ 0 & -j & 2 + N_0/E_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = E_s \begin{bmatrix} j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e, com $\frac{E_s}{N_0} = 4$, teremos

$$\mathbf{f} = [0,2630j; 0,4082; 0,1814j].$$

O erro quadrático médio é

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

$$MSE = E_s(1 - h[0]f[1] - h[1]f[0]) = E_s(1 - 0,4082 - j(0,2630j)) \\ = 0,3288E_s.$$

O melhor é com atraso $u = 1$.

O MSE inclui toda a distorção, e a

$$\left(\frac{E_s}{N_0}\right)_{MMSE} = \frac{E_s}{MSE} = \frac{1}{0,3288} = 3,041$$

A BER é

$$Q\left(\sqrt{\left(\frac{E_s}{N_0}\right)_{MMSE}}\right) = 0,041$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Função Q

x	Q(x)	X	Q(x)
0,1	4,60E-001	3,1	9,68E-004
0,2	4,21E-001	3,2	6,87E-004
0,3	3,82E-001	3,3	4,83E-004
0,4	3,45E-001	3,4	3,37E-004
0,5	3,09E-001	3,5	2,33E-004
0,6	2,74E-001	3,6	1,59E-004
0,7	2,42E-001	3,7	1,08E-004
0,8	2,12E-001	3,8	7,23E-005
0,9	1,84E-001	3,9	4,81E-005
1,0	1,59E-001	4,0	3,17E-005
1,1	1,36E-001	4,1	2,07E-005
1,2	1,15E-001	4,2	1,33E-005
1,3	9,68E-002	4,3	8,54E-006
1,4	8,08E-002	4,4	5,41E-006
1,5	6,68E-002	4,5	3,40E-006
1,6	5,48E-002	4,6	2,11E-006
1,7	4,46E-002	4,7	1,30E-006
1,8	3,59E-002	4,8	7,93E-007
1,9	2,87E-002	4,9	4,79E-007
2,0	2,28E-002	5,0	2,87E-007
2,1	1,79E-002	5,1	1,70E-007
2,2	1,39E-002	5,2	9,96E-008
2,3	1,07E-002	5,3	5,79E-008
2,4	8,20E-003	5,4	3,33E-008
2,5	6,21E-003	5,5	1,90E-008
2,6	4,66E-003	5,6	1,07E-008
2,7	3,47E-003	5,7	5,99E-009
2,8	2,56E-003	5,8	3,32E-009
2,9	1,87E-003	5,9	1,82E-009
3,0	1,35E-003	6,0	9,87E-010