Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 6 – 2016/1 (05/07/2016)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de 3 (três) questões discursivas.
- A prova terá a duração de 2h
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Pode ser consultado qualquer material impresso ou escrito.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Indicar aqui as questões resolvidas:

Questão	Nota
Total	

Questão 1 (3,5 pontos)

Um canal tem a resposta impulsional

$$h(t) = \delta(t) - 0{,}5j\delta(t-1) - 0{,}5\delta(t-2)$$

em que a unidade de t é em microssegundos.

Suponha que projetamos um sistema OFDM para operar neste canal, com uma taxa de amostragem de 1MHz e 8 subportadoras, das quais cinco são utilizadas para transmissão de dados, e as restantes são nulas.

Supondo uma razão sinal ruído de $\frac{E_s}{N_0}$ =13dB, e que podemos escolher em cada subportadora o esquema de modulação mais adequado, dentre M-PSK e M-QAM (com QAM quadrado), com código de repetição caso não seja possível o uso de BPSK[1], qual a taxa de transmissão que podemos atingir, se quisermos uma taxa de erro de bit de no máximo 10^{-4}?

$$h_n = [\,1;\ -.5j; -.5;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0]$$

$$H_k = DFT(h_n)$$

$$|H_k|^2 = [0{,}5;\ \ 0{,}4393; 1; 0{,}4393; 0{,}5; 2{,}5607; 4; 2{,}5607]$$

Sabemos ainda que a a RSR em cada subcanal é dada por

$$\left(\frac{E_s}{N_0}\right)_k = \frac{E_s}{N_0}|H_k|^2\frac{N}{N+G}$$

O intervalo de símbolos é $T_s = NT_a = \frac{N}{f_a} = 8\mu$s, e com o intervalo de guarda, $T = 10\mu$s, ou seja, a taxa de símbolos efetiva é $R_{eff} = \frac{1}{T} = 100$kHz.

Sabendo a razão E_s/N_0, ou seja

$$\left(\frac{E_s}{N_0}\right)_k = [-;\ 7{,}0128; 15{,}9621; -; -;\ 40{,}8735; 63{,}8484; 40{,}8735]$$

Para BPSK, precisamos de $Q\left(\sqrt{2E_s/N_0}\right) \le 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \ge 6{,}91$

Para QPSK, $Q\left(\sqrt{E_s/N_0}\right) \le 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \ge 13{,}83$

Para 8-PSK, $\frac{2}{3}Q\left(\sqrt{2E_s/N_0}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \le 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \ge 44{,}62$

Para 16-QAM, $\frac{4}{3}Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}}\right) \le 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} \ge 71{,}86$

Ou seja,devemos usar [-; BPSK; QPSK; -; -; QPSK; 8-PSK; QPSK], correspondentes a [0,1,2,0,0,2,3,2] bits/ símbolo. Portanto, enviaremos $n_b = 10$ bits/símbolo OFDM (podemos comparar com uma capacidade de 23), e consequentemente

$$R_b = \frac{10}{T} = 1\text{Mbps}$$

[1] Em um código de repetição com taxa $R = 1/n$ cada bit é repetido n vezes, o que efetivamente aumenta o E_s/N_0 em n vezes.

Questão 2 (3,5 pontos)

Um código linear de blocos é tal que temos os seguintes pares de mensagem e palavra código

$$m = [1000] \Rightarrow c = [1101000]$$

$$m = [0100] \Rightarrow c = [0110100]$$

$$m = [0110] \Rightarrow c = [0101110]$$

$$m = [0001] \Rightarrow c = [0001101]$$

a) Ache sua matriz geradora (0,9 ponto)
b) Qual sua distância mínima, e quanto erros ele pode corrigir? (0,9 ponto)
c) Ache sua matriz de verificação de paridade (0,8 ponto)
d) Qual seu ganho de codificação para uma BER = 10^{-5}? (0,9 ponto)

a)
é um código (7,4).

Considerando $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{g}_3 \\ \mathbf{g}_4 \end{bmatrix}$, temos que $\mathbf{c} = m_1\mathbf{g}_1 + m_2\mathbf{g}_2 + m_3\mathbf{g}_3 + m_4\mathbf{g}_4$.

Sendo assim,

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{g}_1 = [1101000]$$
$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{g}_2 = [0110100]$$

$$\mathbf{c}_3 = \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3 = [0101110] \Rightarrow \mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_2 + \mathbf{c}_3 = [0011010]$$
$$\mathbf{c}_4 = \mathbf{g}_4 = [0001101]$$

e, portanto,

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)
construindo a tabela de palavras código

m	**c**		**m**	**c**
0000	0000000		1000	1101000
0001	0001101		1001	1100101
0010	0011010		1010	1110010
0011	0010111		1011	1111111
0100	0110100		1100	1011100
0101	0111001		1101	1010001
0110	0101110		1110	1000110
0111	0100011		1111	1001011

Sabemos que a distância mínima é o peso mínimo de todas as palavras, e neste caso

$$d_{min} = 3$$

E podemos corrigir $t = 1$ erro.

c)

fazendo $g_3' = g_4 + g_3$, temos G' $= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

fazendo $g_2'' = g_2' + g_3'$, temos $G'' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

fazendo $g_1''' = g_1'' + g_2'' + g_4''$, temos $G''' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{I}\ \mathbf{P}]$

e a matriz de verificação de paridade é

$$\mathbf{H} = [\mathbf{P}^T\ \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d)

considerando BPSK, sem codificação

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 10^{-5} \Rightarrow \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = 4{,}3 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 9{,}245 = 9{,}66\text{dB}$$

Com codificação, e $t = 1$

$$P_b \approx \binom{n-1}{t} p^{t+1} = 6p^2 = 10^{-5} \Rightarrow p = 1{,}29 \times 10^{-3}$$

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{2RE_b}{N_0}}\right) = 1{,}29 \times 10^{-3} \Rightarrow \sqrt{\frac{2RE_b}{N_0}} = 3{,}1 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 8{,}41 = 9{,}25\text{dB}$$

O ganho de codificação é, portanto,

$$G = 9{,}66 - 9{,}25 = 0{,}41\text{dB}$$

Questão 3 (3 pontos)

Um sinal OFDM é utilizado para transmissão em um canal com um de atraso máximo igual a $1\mu s$.

a) Supondo um sistema OFDM com 64 subportadoras, das quais ao menos 10% delas são nulas, separadas por $\Delta f = 250\text{kHz}$, utilizando um 64QAM com taxa de codificação $R = 2/3$, qual a taxa de transmissão que pode ser alcançada?

b) Repita o item anterior considerando agora 256 subportadoras, mantendo-se a mesma banda total do sistema.

a)

$$T_s = \frac{1}{\Delta f} = 4\mu\text{s}, \qquad T_a = \frac{T_s}{N} = 0{,}0625\mu\text{s}$$

$$G = \left\lceil \frac{\tau_{max}}{T_a} \right\rceil = 16, \text{ e } T_G = 1\mu\text{s}$$

O número de subportadoras nulas é $N_0 = 7$, e, consequentemente, $N_d = 57$.
Desta forma, a taxa é dada por

$$R_b = \frac{R\,(\log_2 M)\,N_d}{T_s + T_g} \approx 45{,}6\text{Mbps}$$

b)

Para mantermos a mesma banda com 4x mais portadoras devemos reduzir o intervalo entre subportadoras também 4x, e, sendo assim

$$\Delta f = 62{,}5\text{kHz}, \quad T_s = \frac{1}{\Delta f} = 16\mu\text{s}$$

O intervalo de amostragem permanece o mesmo, assim como o intervalo de guarda.
O número de subportadoras nulas é $N_0 = 26$, e, consequentemente, $N_d = 230$.
Desta forma, agora a taxa é dada por

$$R_b = \frac{R\,(\log_2 M)\,N_d}{T_s + T_g} \approx 57{,}28\text{Mbps}$$

Podemos ver que, como o intervalo de símbolo é maior, o overhead do T_G é menor, e a taxa maior.

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Função Q

x	Q(x)	X	Q(x)
0,1	4,60E-001	3,1	9,68E-004
0,2	4,21E-001	3,2	6,87E-004
0,3	3,82E-001	3,3	4,83E-004
0,4	3,45E-001	3,4	3,37E-004
0,5	3,09E-001	3,5	2,33E-004
0,6	2,74E-001	3,6	1,59E-004
0,7	2,42E-001	3,7	1,08E-004
0,8	2,12E-001	3,8	7,23E-005
0,9	1,84E-001	3,9	4,81E-005
1,0	1,59E-001	4,0	3,17E-005
1,1	1,36E-001	4,1	2,07E-005
1,2	1,15E-001	4,2	1,33E-005
1,3	9,68E-002	4,3	8,54E-006
1,4	8,08E-002	4,4	5,41E-006
1,5	6,68E-002	4,5	3,40E-006
1,6	5,48E-002	4,6	2,11E-006
1,7	4,46E-002	4,7	1,30E-006
1,8	3,59E-002	4,8	7,93E-007
1,9	2,87E-002	4,9	4,79E-007
2,0	2,28E-002	5,0	2,87E-007
2,1	1,79E-002	5,1	1,70E-007
2,2	1,39E-002	5,2	9,96E-008
2,3	1,07E-002	5,3	5,79E-008
2,4	8,20E-003	5,4	3,33E-008
2,5	6,21E-003	5,5	1,90E-008
2,6	4,66E-003	5,6	1,07E-008
2,7	3,47E-003	5,7	5,99E-009
2,8	2,56E-003	5,8	3,32E-009
2,9	1,87E-003	5,9	1,82E-009
3,0	1,35E-003	6,0	9,87E-010