Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 3 – 2016/2 (01/12/2016)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de quatro questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h00
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda resposta deverá estar contida nas folhas da prova. Folhas de rascunho serão fornecidas caso necessário, e, caso entregues ao professor, devem conter o nome e a matrícula.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	**Nota**
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 1 (2,5 pontos)

Um canal de comunicações tem uma resposta impulsional $h(t) = \Delta\left(\frac{t}{2T_0}\right)u(t)$, com $T_0 = 1\mu s$. Considerando um sistema de transmissão QPSK, com uma banda de 4MHz, usando pulsos de Nyquist com fator de roll-off $\rho = 1/3$,

a) Encontre a resposta impulsional discreta $h[k]$ (0,8 ponto)

$$h[k] = h(kT_s)$$

$$T_s = \frac{1}{R_s} = \frac{1+\rho}{B_T} = \frac{4}{3}\frac{1}{4\times 10^6} = \frac{1}{3}\mu s$$

$$h[0] = h(0) = 1,\ \ h[1] = h\left(\frac{1}{3}\mu s\right) = 0{,}67,\ \ h[2] = h\left(\frac{2}{3}\mu s\right) = 0{,}33, h[3] = 0$$

$$h[k] = \delta[k] + \frac{2}{3}\delta[k-1] + \frac{1}{3}\delta[k-2]$$

b) Quantos estados terá a treliça do equalizador MLSE(Viterbi)? (0,8 ponto)

$$N_s = M^L = 4^2 = 16$$

c) Como podemos achar os coeficientes de um equalizador MMSE de 3 taps? (Não é necessário inverter a matriz, apenas monte o sistema de equações) (0,9 ponto)

$$y[k] = x[k] + \frac{2}{3}x[k-1] + \frac{1}{3}x[k-2] + w[k]$$

$$\begin{aligned}
R_y[0] &= E\{|y[k]|^2\} \\
&= E\left\{\left(x[k] + \frac{2}{3}x[k-1] + \frac{1}{3}x[k-2] + w[k]\right)\left(x^*[k] + \frac{2}{3}x^*[k-1] + \frac{1}{3}x^*[k-2] \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + w[k]\right)\right\} \\
&= E_s + \frac{4}{9}E_s + \frac{1}{9}E_s + N_0 = \frac{14}{9}E_s + N_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_y[1] &= E\{y[k+1]y^*[k]\} \\
&= E\left\{\left(x[k+1] + \frac{2}{3}x[k] + \frac{1}{3}x[k-1] + w[k]\right)\left(x^*[k] + \frac{2}{3}x^*[k-1] + \frac{1}{3}x^*[k-2] \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + w[k]\right)\right\} \\
&= \frac{2}{3}E_s + \frac{2}{9}E_s = \frac{8}{9}E_s \\
R_y[2] &= E\{y[k+2]y^*[k]\} \\
&= E\left\{\left(x[k+2] + \frac{2}{3}x[k+1] + \frac{1}{3}x[k] + w[k]\right)\left(x^*[k] + \frac{2}{3}x^*[k-1] + \frac{1}{3}x^*[k-2] \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + w[k]\right)\right\} \\
&= \frac{1}{3}E_s
\end{aligned}$$

Supondo um atraso $u = 0$, teremos então

$$\begin{bmatrix} \frac{14}{9} + \frac{N_0}{E_s} & \frac{8}{9}E_s & \frac{1}{3}E_s \\ \frac{8}{9}E_s & \frac{14}{9} + \frac{N_0}{E_s} & \frac{8}{9}E_s \\ \frac{1}{3}E_s & \frac{8}{9}E_s & \frac{14}{9} + \frac{N_0}{E_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Questão 2 (2,5 pontos)

Um sistema OFDM utiliza uma FFT de 4096 subportadoras, das quais 401 são nulas, reservadas para banda de guarda e para o componente DC, e 40 são piloto, utilizadas para a estimação de canal. Sabemos ainda que o espaçamento entre subportadoras é de $\Delta f = 5\text{kHz}$

a) Qual a taxa de amostragem? Qual o intervalo de símbolo T_s? (0,8 ponto)

$$f_a = N\Delta f = 4096(5\text{kHz}) = 20{,}48\text{MHz}$$

$$T_s = \frac{1}{\Delta f} = \frac{1}{5\text{kHz}} = 200\mu s$$

b) Supondo que temos um canal com atraso máximo $\tau_{max} = 10\mu s$, quantas amostras teremos no prefixo cíclico? (0,8 ponto)

$$G \geq \frac{\tau_{max}}{T_a} = f_a \tau_{max} = 205$$

c) Supondo o uso de 16-QAM com um código corretor de erros de taxa $R = 2/3$, qual a taxa de bits alcançada? (0,9 ponto)

O número de subportadoras de dados é

$$N_d = N - N_0 - N_{DC} - N_p = 4096 - 401 - 1 - 40 = 3654$$

A duração de um símbolo é

$$T = T_s + T_g = \frac{1}{\Delta f} + \tau_{max} = \frac{1}{5k} + 10\mu s = 210\mu s$$

$$R_b = \frac{(N_d\, R \log_2 M)}{T_s + T_G} = \frac{3654 \times \frac{2}{3} \times 4}{210 \times 10^{-6}} = 46{,}4\text{Mbps}$$

Questão 3(2,5 pontos)

Um código corretor de erros é definido pela matriz geradora

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & x \end{bmatrix}$$

Para que tenhamos um melhor desempenho devemos ter $x = 0$, $x = 1$, ou tanto faz? Justifique.

Podemos construir uma tabela com as palavras código e os pesos de Hamming

$\mathbf{m}_k$	$\mathbf{c}_k$	$w_H(\mathbf{c}_k)$ se $x = 0$	$w_H(\mathbf{c}_k)$ se $x = 1$
0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0	0	0
0 0 1	0 1 0 1 0 1 0 x	3	4
0 1 0	0 0 1 1 0 0 1 1	4	4
0 1 1	0 1 1 0 0 1 1 (1+x)	5	4
1 0 0	0 0 0 0 1 1 1 1	4	4
1 0 1	0 1 0 1 1 0 1 (1+x)	5	4
1 1 0	0 0 1 1 1 1 0 0	4	4
1 1 1	0 1 1 0 1 0 0 x	3	4

Vemos que se $x = 0$, então $d_{min} = 3$, mas se $x = 1$, então $d_{min} = 4$.
Sabendo que quanto maior d_{min}, melhor o desempenho, devemos escolher $x = 1$.

Questão 4(2,5 pontos)

Um sistema de comunicações ocupa uma banda de 1MHz para transmitir dados a 2Mbps, usando pulsos de Nyquist com roll-off $\rho = 0$. Temos 2 opções:

a) Transmitirmos com QPSK
b) Transmitirmos com 8-PSK, usando códigos corretores de erro lineares de bloco com palavras mensagem de tamanho $k = 20$ bits

Sabemos ainda que a distância mínima de um código é dada por $d \leq n - k + 1$ (cota de Singleton), e supondo a igualdade nesta expressão, qual a diferença (em dB) entre a potência de transmissão necessária nos dois casos, supondo que desejamos uma $BER = 10^{-5}$?

Temos uma taxa de símbolos de $R_s = B_T = 1$Mbauds

a) Com Q-PSK

$$R_b = R_s \log_2 4 = 2\text{Mbps}$$

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 10^{-5} \Rightarrow \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \geq 4{,}3 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} \geq 9{,}245 = 9{,}66\text{dB}$$

b) Com 8-PSK

$$R_c = R_s \log_2 8 = 3\text{Mbps}$$

Podemos, portanto, usar um código com taxa

$$R = \frac{R_b}{R_c} = \frac{2}{3} = \frac{k}{n} \Rightarrow n = 30$$

Considerando $d_{min} = n - k + 1 = 11$, temos $t = 5$

Com decodificação hard

$$p_{b,c} \approx \binom{29}{5} (p_c)^6 = 118755\,(p_c)^6 = 10^{-5} \Rightarrow p_c = 0{,}0209$$

$$p_c = 2Q\left(\sqrt{\frac{2RE_b \log_2 M}{N_0}} \operatorname{sen}\frac{\pi}{M}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{0{,}5858E_b}{N_0}}\right) = 0{,}0209$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{0{,}5858E_b}{N_0}} = 2{,}3 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} \geq 9{,}03 = 9{,}55\text{dB}$$

A diferença é portanto de $G = 9{,}66\text{dB} - 9{,}55\text{dB} = 0{,}11\text{dB}$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Fórmulas Úteis

Transmissão Digital

$B_T = R_s(1+\rho)$ em banda passante

$P_{b,BPSK} = P_{b,QPSK} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right), \quad P_{e,M-PSK} \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}} \operatorname{sen}\frac{\pi}{M}\right)$

$P_{e,M-QAM} \approx 4\left(\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$ apenas para QAM quadrado (M=4^n)

Equalização

$$F_{ZF}(z) = \frac{1}{H(z)}, \qquad F_{MMSE}(z) = \frac{H^*(z)}{|H(z)|^2 + \frac{S_x(z)}{S_n(z)}}$$

Equalização com número limitado de taps

$$\begin{bmatrix} R_y[0] & R_y[-1] & \dots & R_y[-M] \\ R_y[1] & R_y[0] & \dots & R_y[1-M] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_y[M] & R_y[M-1] & \dots & R_y[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ \vdots \\ f[M] \end{bmatrix} = E_s \begin{bmatrix} h^*[u] \\ h^*[u-1] \\ \vdots \\ h^*[0] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

$R_y[m] = E\{y[n+m]y^*[n]\},$

DFT/IDFT

$$H_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-j2\pi\frac{nk}{N}} h_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{j2\pi\frac{nk}{N}}$$

Probabilidade de erro de códigos de bloco

$t = \left\lfloor\frac{d_{min}-1}{2}\right\rfloor$

com decodificação *hard*

$p_{b,c} \approx \binom{n-1}{t}(p_c)^{t+1}$, em que, para BPSK, $p_c = Q\left(\sqrt{\frac{2RE_b}{N_0}}\right)$

com decodifição *soft*

$p_{b,c} \approx N_{min}\frac{d_{min}}{N} Q\left(\sqrt{\frac{2Rd_{min}E_b}{N_0}}\right)$

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Função Q

x	Q(x)	*X*	Q(x)
0,1	4,60E-001	3,1	9,68E-004
0,2	4,21E-001	3,2	6,87E-004
0,3	3,82E-001	3,3	4,83E-004
0,4	3,45E-001	3,4	3,37E-004
0,5	3,09E-001	3,5	2,33E-004
0,6	2,74E-001	3,6	1,59E-004
0,7	2,42E-001	3,7	1,08E-004
0,8	2,12E-001	3,8	7,23E-005
0,9	1,84E-001	3,9	4,81E-005
1,0	1,59E-001	4,0	3,17E-005
1,1	1,36E-001	4,1	2,07E-005
1,2	1,15E-001	4,2	1,33E-005
1,3	9,68E-002	4,3	8,54E-006
1,4	8,08E-002	4,4	5,41E-006
1,5	6,68E-002	4,5	3,40E-006
1,6	5,48E-002	4,6	2,11E-006
1,7	4,46E-002	4,7	1,30E-006
1,8	3,59E-002	4,8	7,93E-007
1,9	2,87E-002	4,9	4,79E-007
2,0	2,28E-002	5,0	2,87E-007
2,1	1,79E-002	5,1	1,70E-007
2,2	1,39E-002	5,2	9,96E-008
2,3	1,07E-002	5,3	5,79E-008
2,4	8,20E-003	5,4	3,33E-008
2,5	6,21E-003	5,5	1,90E-008
2,6	4,66E-003	5,6	1,07E-008
2,7	3,47E-003	5,7	5,99E-009
2,8	2,56E-003	5,8	3,32E-009
2,9	1,87E-003	5,9	1,82E-009
3,0	1,35E-003	6,0	9,87E-010