Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 0 – 2016/2 (18/08/2016)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de 4 (quatro) questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a qualquer material, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Indicar aqui as questões resolvidas:

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
Total	

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 1 (2,5 pontos)

Dado um sinal de entrada $x(t) = \text{sinc}(t)$, existe algum sistema linear tal que a saída seja $y(t) = \text{sinc}^2(t)$? Justifique.

Não existe.
O sinal $x(t)$ tem transformada de Fourier $X(f) = \pi\ \text{rect}(\pi f)$, ou seja, tem largura de banda $B_x = \frac{1}{2\pi}$.
O sinal $y(t)$ tem transformada de Fourier $Y(f) = \pi\Delta\left(\frac{\pi f}{2}\right)$, ou seja, tem largura de banda $B_y = \frac{1}{\pi}$.
Ou seja, o sinal $y(t)$ tem uma largura de banda maior que $x(t)$ e não existe nenhuma função $H(f)$ tal que $Y(f) = X(f)H(f)$.
Alternativamente, podemos ver que $y(t)$ é resultado de uma operação não linear em cima de $x(t)$.

Questão 2 (2,5 pontos)

Suponha que tenhamos um sinal $x(t) = m(t)\cos(600\pi t)$.

i) Projete um sistema que tenha na saída o sinal $y(t) = m(t)\cos(400\pi t)$

ii) Qual a largura de banda máxima de $m(t)$ para que não haja distorção na mensagem $m(t)$ nesta conversão na frequência?

i) Podemos usar um conversor de frequência, de $f_1 = 300\text{Hz}$ para $f_2 = 200\text{Hz}$, multiplicando o sinal $x(t)$ por $\cos(2\pi f_{LO} t)$, com $f_{LO} = f_1 \pm f_2$, e filtrando o sinal com um filtro passa-faixa entre $f_2 - B$ e $f_2 + B$.

ii) O sinal original ocupa a faixa $[f_1 - B, f_1 + B]$.

Considerando $f_{LO} = |f_1 - f_2| = 100\text{Hz}$, após a multiplicação pelo sinal do oscilador local teremos uma versão do sinal deslocada na frequência, e centrada em $f_2 = f_1 - f_{LO} = 200\text{Hz}$, e uma em $f_I = f_1 + f_{LO} = 400\text{Hz}$, ambos com largura de banda $2B$. Haverá distorção se as duas versões do sinal se sobrepuserem. Para que isso não aconteça é necessário que

$$B < 100\text{Hz}$$

Considerando $f_{LO} = f_1 + f_2 = 500\text{Hz}$, após a multiplicação pelo sinal do oscilador local teremos uma versão do sinal deslocada na frequência, e centrada em $f_2 = f_{LO} - f_1 = 200\text{Hz}$, e uma em $f_I = f_1 + f_{LO} = 800\text{Hz}$, ambos com largura de banda B . Neste caso, considerando agora que temos uma portadora em 200Hz

$$B < 200\text{Hz}$$

Questão 3 (2,5 pontos)

Um sinal mensagem $m(t) = 10\text{sinc}(400t)$ é usado para modular em frequência uma portadora de 1MHz, com índice de modulação $h = \frac{\Delta f}{f_m} = 6$. Qual a largura de banda estimada do sinal modulado?

A transformada de Fourier de $m(t)$ é $M(f) = \frac{\pi}{40}\text{rect}\left(\frac{\pi f}{400}\right)$, ou seja, a largura de banda é $B_m = \frac{200}{\pi}$.
Pela definição de índice de modulação, temos que $\Delta f = 6f_m \leq \frac{1200}{\pi}$.

A largura de banda do sinal modulado é aproximada pela regra de Carson

$$B \approx 2(\Delta f + B) = 2\left(\frac{1200}{\pi} + \frac{200}{\pi}\right) = \frac{2800}{\pi} = 891{,}3\text{Hz}$$

Questão 4 (2,5 pontos)

Um sistema de transmissão digital consegue transmitir a uma taxa de 1Mbps. Este sistema é utilizado para multiplexar o sinal de 8 usuários. Supondo que o sinal de cada usuário tenha sido codificado por meio de PCM, com 10 bits/amostra, e que o sinal foi amostrado a uma taxa 20% maior que a taxa de Nyquist, qual a largura de banda máxima da mensagem?

Cada usuário transmitirá a uma taxa

$$R_b = \frac{1\text{Mbps}}{8} = 125\text{kbps}$$

Com 10 bits/amostra, a taxa de amostragem é

$$f_a = \frac{R_b}{10} = 12{,}5\text{k amostras/s}$$

que é 20% maior que $f_{Nyq} = 2B$, portanto

$$f_a = 1{,}2(2B) \Rightarrow B = \frac{f_a}{2{,}4B} = 5{,}21\text{kHz}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Fórmulas Úteis

Identidades Trigonométricas:

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \qquad \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\left(x + \tan^{-1}(-b/a)\right)$$

Integrais:

$$\int x \sin(ax)\, dx = \frac{1}{a^2}(\sin(ax) - ax\cos(ax)) \qquad \int x^2 \sin(ax) dx = \frac{1}{a^3}(2ax\sin(ax) + 2\cos(ax) - a^2x^2\cos(ax))$$

$$\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a^2}(\cos(ax) + ax\sin(ax)) \qquad \int x^2 \cos(ax) dx = \frac{1}{a^3}(2ax\cos(ax) - 2\sin(ax) + a^2x^2\sin(ax))$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) \qquad \int x^2 e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \qquad \int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + a^2)$$

$$\int \frac{x}{a^4 + x^4} dx = \frac{1}{2a^2}\tan^{-1}\frac{x^2}{a^2}$$

Fórmula de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\mathrm{sen}\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Convolução

$$g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t - \tau)d\tau = h(t) * g(t)$$

Série de Fourier Generalizada: $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t) c_n = \frac{1}{E_n}\int_{T_0} g(t) x_n^* dt$

Série de Fourier Trigonométrica:

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_0 t + \theta_n)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} g(t)dt;\ a_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} g(t)\cos(2\pi n f_0 t)\,;\ b_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} g(t)\sin(2\pi n f_0 t)$$

$$C_0 = a_0;\ C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Série de Fourier Exponencial:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2\pi n f_0 t} D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} g(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n};\ D_{-n} = \frac{C_n}{2} e^{-j\theta_n}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Tabela de Transformadas de Fourier:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$\delta(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad 1$$

$$1 \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \delta(f)$$

$$t^n e^{-at}u(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{n!}{(a+j2\pi f)^{n+1}}$$

$$e^{-a|t|} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \delta(f-f_0)$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$$

$$u(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$$

$$\mathrm{sgn}(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{j\pi f}$$

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad |\,\tau\,|\,\mathrm{sinc}(\pi f\tau)$$

$$\mathrm{sinc}(2\pi Bt) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{|\,2B\,|}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{\tau}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi f\tau}{2}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$k_1 g_1(t)+k_2 g_2(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad k_1 G_1(f)+k_2 G_2(f)$$

$$G(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad g(-f)$$

$$g(at) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{|\,a\,|}G\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$g(t-t_0) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

$$g(t)e^{j2\pi f_0 t} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G(f-f_0)$$

$$g_1(t) * g_2(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G_1(f)G_2(f)$$

$$g_1(t)g_2(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G_1(f) * G_2(f)$$

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad (j2\pi f)^n G(f)$$

$$\int_{-\infty}^{t} g(x)dx \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{G(f)}{j2\pi f}+\frac{1}{2}G(0)\delta(f)$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

$$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-j2\pi kn/N} \quad g_n = T_a g(nT_a) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{j2\pi kn/N}$$

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Tabela de Transformadas de Hilbert:

$g(t)$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$g_h(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\alpha)}{t-\alpha}d\alpha$	$g_h(t)$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$-g(t)$
$\sin t$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$-\cos t$	$\cos t$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$\sin t$
$\frac{1}{t^2+1}$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$\frac{t}{t^2+1}$	$\mathrm{sinc}\, t$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$\frac{1-\cos t}{t}$
$\delta(t)$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$\frac{1}{\pi t}$	$\mathrm{rect}\, t$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$\frac{1}{\pi}\ln\left\lvert\frac{t+1/2}{t-1/2}\right\rvert$

Regra de Carson $B \approx 2(\Delta f + B)$

Razão sinal-ruído com quantização

$$RSR_{\text{uniforme}} = 3L^2\frac{P_m}{m_p^2} \qquad RSR_{\text{lei-A}} = 3L^2\frac{1}{(\ln(A))^2}$$