Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 1 – 2016/2 (13/09/2016)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de quatro questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h00
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda resposta deverá estar contida nas folhas da prova. Folhas de rascunho serão fornecidas caso necessário, e, caso entregues ao professor, devem conter o nome e a matrícula.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

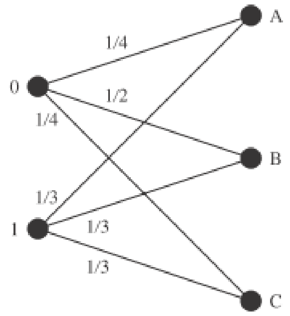
Questão	**Nota**
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

UnB

departamento de engenharia elétrica

Questão 1 (2,5 pontos)

Um canal de comunicações com entrada binária e saída ternária é dado na Figura abaixo, em que os números representam as probabilidades das transições.



No receptor, a partir da observação da saída y, devemos decidir qual foi o bit de entrada x. Sabemos ainda que a probabilidade de a entrada x ser igual a 0 é de 0,4.

a) Dado que a saída observada é A, qual é a decisão a respeito da entrada que minimiza a probabilidade de erro? Repita para B e C.
b) Se o esquema de decisão ótimo (do item a) for utilizado, qual a probabilidade de erro?

a) Se recebemos A escolheremos $\hat{x} = 0$ se $P(0|A) > P(1|A)$ ou $\hat{x} = 1$ se $P(1|A) > P(0|A)$

$$P(1|A) = \frac{P(A|1)P(1)}{P(A)} = \frac{P(A|1)P(1)}{P(A|0)P(0) + P(A|1)P(1)} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{6}{10}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{10}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{6}{10}\right)} = \frac{2}{3}$$

e, consequentemente,

$$P(0|A) = \frac{1}{3}$$

Portanto $\hat{x}(A) = 1$

Da mesma forma

$$P(1|B) = \frac{P(B|1)P(1)}{P(B|0)P(0) + P(B|1)P(1)} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{6}{10}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{10}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{6}{10}\right)} = \frac{1}{2}$$

Portanto, para B tanto faz decidirmos por 0 ou 1, $\hat{x}(B) = 0$ ou 1
e

$$P(1|C) = \frac{P(C|1)P(1)}{P(C|0)P(0) + P(C|1)P(1)} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{6}{10}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{10}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{6}{10}\right)} = \frac{2}{3}$$

e, $\hat{x}(C) = 1$

b) Supondo por exemplo $\hat{x}(B) = 0$

$$P(\epsilon) = P(\epsilon|0)P(0) + P(\epsilon|1)P(1)$$
$$= P(A, C|0)P(0) + P(B|1)P(1) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{10}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{6}{10}\right) = \frac{2}{5}$$

Supondo $\hat{x}(B) = 1$, sempre vamos decidir $\hat{x} = 1$, e, portanto $P(\epsilon) = P(0) = \frac{2}{5}$.

Questão 2 (2,5 pontos)

Um elevador de carga pode transportar até 5 toneladas. Suponha que uma carga a ser transportada pelo elevador é composta de 49 caixas, sendo que cada caixa pesa em média 100kg, com um desvio padrão de 10 kg. Usando o teorema central do limite, qual a probabilidade de que as 49 caixas possam ser transportadas com segurança no elevador?

A carga transportada será aproximada por uma variável aleatória normal x $\rightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, com média

$$\mu = 49(100) = 4900\text{kg}$$

e variância

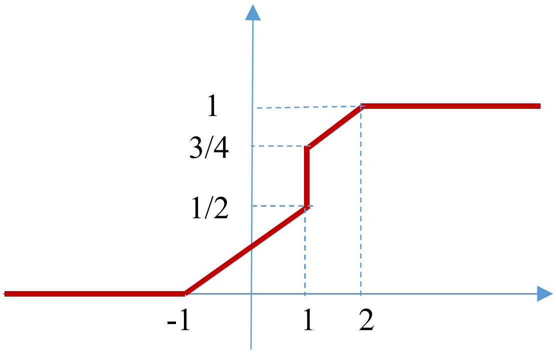
$$\sigma^2 = 49(100) = 4900\text{kg}$$

Queremos

$$\Pr(\mathrm{x} < 5000) \approx 1 - Q\left(\frac{5000 - \mu}{\sigma}\right) = 1 - Q\left(\frac{100}{\sqrt{4900}}\right) = 1 - Q(1{,}4286) \approx 1 - 8{,}8 \times 10^{-2}$$
$$= 0{,}912$$

Questão 3 (2,5 pontos)

A *função de distribuição cumulativa (CDF)* de uma variável aleatória é dada pela figura abaixo:



Qual a sua função densidade de probabilidade (PDF), sua média e sua variância?

$$p_{\mathrm{x}}(x) = \frac{dF_{\mathrm{x}}(x)}{dx} = \frac{1}{4}\mathrm{rect}\left(\frac{x-0{,}5}{3}\right) + \frac{1}{4}\delta(x-1)$$

$$\mu_{\mathrm{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\mathrm{x}}(x)dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{2} xdx + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} x\delta(x-1)dx = \frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^{2} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

$$E\{\mathrm{x}^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_{\mathrm{x}}(x)dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{2} x^2dx + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\delta(x-1)dx = \frac{1}{4}\frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{2} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\sigma_{\mathrm{x}}^2 = E\{\mathrm{x}^2\} - \mu_{\mathrm{x}}^2 = 1 - \frac{25}{64} = \frac{39}{64}$$

Questão 4 (2,5 pontos)

Um processo aleatório tem função de autocorrelação $R_x(\tau) = A\,sinc^2(2\pi B\tau)$.

a) Qual sua potência?

b) Se este sinal passar por um filtro passa baixa ideal, qual a frequência de corte deste filtro, de modo que tenhamos na saída 90% da potência do sinal na entrada?

c) Se tivermos agora um sinal ruidoso y = x + n, em que n é um componente de ruído branco gaussiano com densidade espectral de potência $N_0/2$, e passarmos este sinal por um filtro passa baixa ideal, qual a frequência de corte que maximiza a razão sinal-ruído na saída do filtro?

a)

$$P_x = R_x(0) = A$$

b)

A densidade espectral de potência do sinal é

$$S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} = \frac{A}{2B}\Delta\left(\frac{f}{4B}\right) = \left(\frac{A}{2B} - \frac{A}{8B^2}|f|\right)\mathrm{rect}\left(\frac{f}{4B}\right)$$

Supondo um filtro passa baixa ideal, com frequência de corte $f_0 < 2B$, a potência na saída é

$$P_{out} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)|H(f)|^2\,df = \int_{-f_0}^{f_0} S_x(f)df = 2\int_0^{f_0}\left(\frac{A}{2B} - \frac{A}{4B^2}f\right)df = 0{,}9A$$

$$P_{out} = \frac{4ABf_0 - Af_0^2}{4B^2} = 0{,}9A$$

$$\Rightarrow f_0^2 - 4Bf_0 + (0{,}9)4B^2 = 0$$

Resolvendo a equação de segundo grau, temos que

$$f_0 = \frac{4B \pm \sqrt{16B^2 - 16(0{,}9)B^2}}{2}$$

Sabendo que $f_0 < 2B$, temos que

$$f_0 = 2B - 2B\sqrt{0{,}1} = 1{,}368B$$

c)
Agora, quando filtramos o sinal, temos na saída um sinal com potência P_{out}, mas também temos uma distorção, que corresponde à parte do sinal fora da banda filtrada, com potência $P_{\text{dist}} = P_x - P_{\text{out}}$.

$$RSR = \frac{P_{\text{out}}}{P_n + P_{\text{dist}}} = \frac{4ABf_0 - Af_0^2}{4B^2} \frac{1}{\left(f_0 N_0 + A - \frac{4ABf_0 - Af_0^2}{4B^2}\right)}$$
$$= \frac{4ABf_0 - Af_0^2}{4B^2 f_0 N_0 + 4AB^2 - 4ABf_0 + Af_0^2}$$

Queremos

$$\frac{dRSR}{df_0} = \frac{(4AB - 2Af_0)(4B^2 f_0 N_0 + 4AB^2 - 4ABf_0 + Af_0^2) - (4ABf_0 - Af_0^2)(4B^2 N_0 - 4AB + 2Af_0)}{(4B^2 f_0 N_0 + 4AB^2 - 4ABf_0 + Af_0^2)^2}$$
$$= \frac{-4AB^2 N_0 f^2 - 8A^2B^2 f + 16A^2B^3}{(4B^2 f_0 N_0 + 4AB^2 - 4ABf_0 + Af_0^2)^2} = \frac{-4AB^2(N_0 f^2 + 2Af - 4AB)}{(4B^2 f_0 N_0 + 4AB^2 - 4ABf_0 + Af_0^2)^2} = 0$$

Ou seja, queremos que

$$N_0 f^2 + 2Af - 4AB = 0$$

Resolvendo a equação quadrática

$$f_0 = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + 4ABN_0}}{N_0}$$

Fórmulas Úteis

Tabela de Transformadas de Fourier

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$\delta(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad 1$$

$$1 \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \delta(f)$$

$$t^n e^{-at}u(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{n!}{(a+j2\pi f)^{n+1}}$$

$$e^{-a|t|} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \delta(f-f_0)$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$$

$$u(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$$

$$\mathrm{sgn}(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{j\pi f}$$

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad |\,\tau\,|\ \mathrm{sinc}(\pi f\tau)$$

$$\mathrm{sinc}(2\pi Bt) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{|\,2B\,|}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{\tau}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi f\tau}{2}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$k_1 g_1(t)+k_2 g_2(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad k_1 G_1(f)+k_2 G_2(f)$$

$$G(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad g(-f)$$

$$g(at) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{|\,a\,|}G\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$g(t-t_0) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

$$g(t)e^{j2\pi f_0 t} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G(f-f_0)$$

$$g_1(t)*g_2(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G_1(f)G_2(f)$$

$$g_1(t)g_2(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G_1(f)*G_2(f)$$

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad (j2\pi f)^n G(f)$$

$$\int_{-\infty}^{t} g(x)dx \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{G(f)}{j2\pi f}+\frac{1}{2}G(0)\delta(f)$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Probabilidade

$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$ – Regra de Bayes

eventos são independentes se $P(B \mid A) = P(B)$.

se $A_i, 1 \le i \le N$são eventos disjuntos e $\cup\, i = 1_N\, A_i = S \Rightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{N} P(B \mid A_i)P(A_i)$

Variáveis Aleatórias

$$P_{\mathrm{y}}(y) = \sum_i \quad P_{\mathrm{x,y}}(x_i, y)$$

CDF $F_{\mathrm{X}}(x) = Pr(\mathrm{x} \le x)$

PDF $p_{\mathrm{x}}(x) = \frac{dF_{\mathrm{x}}(x)}{dx}$

v.a exponencial: $p_{\mathrm{x}}(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$

v.a. Gaussiana: $p_{\mathrm{x}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-x^2/2} dx$$

$E\{f(\mathrm{x})\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_{\mathrm{x}}(x) dx p_{\mathrm{x}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathrm{x,y}}(x, y) dy$

Teorema Central do Limite

$$\mathrm{y}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{x}_i - \mu}{\sigma} \to Normal(0,1)$$

Covariância: $\sigma_{\mathrm{xy}} = E\{(x - \bar{x})(y - \bar{y})\}$

Coeficiente de correlação $\rho_{\mathrm{xy}} = \frac{\sigma_{\mathrm{xy}}}{\sigma_{\mathrm{x}}\sigma_{\mathrm{y}}}$

Processos Estocásticos

Autocorrelação: $R_{\mathrm{x}}(\tau) = E\{\mathrm{x}(t)\mathrm{x}(t + \tau)\}$

Densidade Espectral de Pot.: $S_{\mathrm{x}}(f) = F_\tau\{R_{\mathrm{x}}(\tau)\}$

$\mathrm{y}(t) = \mathrm{x}(t) * h(t) \Rightarrow S_{\mathrm{y}}(f) = |H(f)|^2 S_{\mathrm{x}}(f)$ e $\bar{\mathrm{y}} = H(0)\bar{\mathrm{x}}$

$R_{\mathrm{x,y}}(\tau) = E\{\mathrm{x}(t)\mathrm{y}(t + \tau)\}$

x e y são descorrelatados se $R_{\mathrm{x,y}}(\tau) = \bar{\mathrm{x}}\bar{\mathrm{y}}$ e são ortogonais se $R_{\mathrm{x,y}}(\tau) = 0$

Filtro de Wiener

$H_{opt}(f) = \frac{S_{\mathrm{m}}(f)}{S_{\mathrm{m}}(f) + S_{\mathrm{n}}(f)},\ P_N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_m(f) S_n(f)}{(S)_m(f) + S_n(f)} df$

Inversão de Matriz 2x2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Função Q

x	Q(x)	*X*	Q(x)
0,1	4,60E-001	3,1	9,68E-004
0,2	4,21E-001	3,2	6,87E-004
0,3	3,82E-001	3,3	4,83E-004
0,4	3,45E-001	3,4	3,37E-004
0,5	3,09E-001	3,5	2,33E-004
0,6	2,74E-001	3,6	1,59E-004
0,7	2,42E-001	3,7	1,08E-004
0,8	2,12E-001	3,8	7,23E-005
0,9	1,84E-001	3,9	4,81E-005
1,0	1,59E-001	4,0	3,17E-005
1,1	1,36E-001	4,1	2,07E-005
1,2	1,15E-001	4,2	1,33E-005
1,3	9,68E-002	4,3	8,54E-006
1,4	8,08E-002	4,4	5,41E-006
1,5	6,68E-002	4,5	3,40E-006
1,6	5,48E-002	4,6	2,11E-006
1,7	4,46E-002	4,7	1,30E-006
1,8	3,59E-002	4,8	7,93E-007
1,9	2,87E-002	4,9	4,79E-007
2,0	2,28E-002	5,0	2,87E-007
2,1	1,79E-002	5,1	1,70E-007
2,2	1,39E-002	5,2	9,96E-008
2,3	1,07E-002	5,3	5,79E-008
2,4	8,20E-003	5,4	3,33E-008
2,5	6,21E-003	5,5	1,90E-008
2,6	4,66E-003	5,6	1,07E-008
2,7	3,47E-003	5,7	5,99E-009
2,8	2,56E-003	5,8	3,32E-009
2,9	1,87E-003	5,9	1,82E-009
3,0	1,35E-003	6,0	9,87E-010