Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 2 – 2016/2 (20/10/2016)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de quatro questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h00
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda resposta deverá estar contida nas folhas da prova. Folhas de rascunho serão fornecidas caso necessário, e, caso entregues ao professor, devem conter o nome e a matrícula.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	**Nota**
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

UnB

departamento de engenharia elétrica

Questão 1 (2,5 pontos)

Um sistema de transmissão digital emprega codificação polar binária em banda base, utilizando pulsos

$$p(t) = B\text{sinc}(2\pi Bt) + B\text{sinc}(4\pi Bt)$$

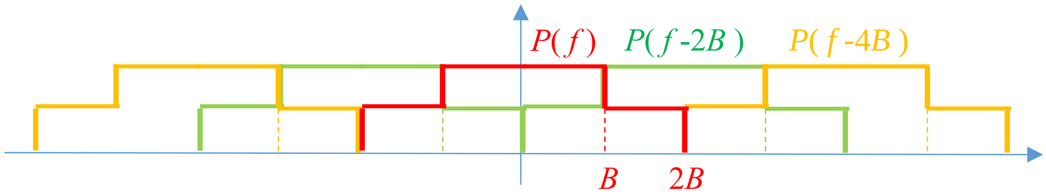
a) Sabendo que este pulso satisfaz o critério de Nyquist, qual a taxa de transmissão?
b) Qual a densidade espectral de potência?

a) Podemos resolver pelo domínio do tempo, verificando que, se $T_s = 1/2B$, teremos $p(kT_s) = B\text{sinc}(k\pi) + B\text{sinc}(2k\pi) = 0,\ \ k \neq 0.$

No domínio da frequência, teremos

$$P(f) = \frac{1}{2}\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) + \frac{1}{4}\text{rect}\left(\frac{f}{4B}\right)$$

e como vemos na figura,



temos que

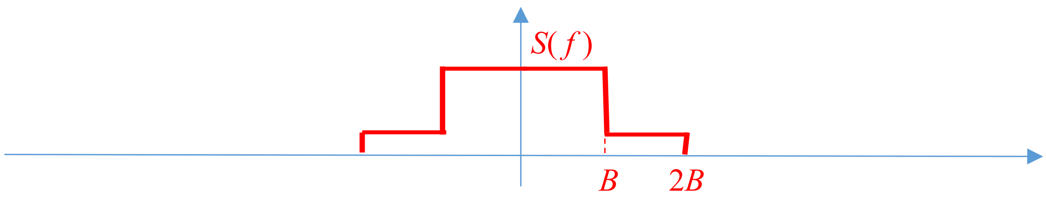
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(f - k2B) = \frac{3}{4}$$

Como a transmissão é binária em banda base

$$R_b = R_s = \frac{1}{T_s} = 2B$$

b) Para um código binário polar, a DEP é

$$S(f) = \frac{1}{T_s}|P(f)|^2 = \frac{B}{2}\text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) + \frac{B}{8}\text{rect}\left(\frac{f}{4B}\right)$$



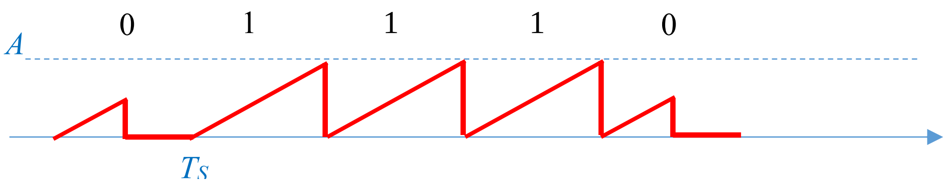
Comunicações Digitais
Prof. André Noll Barreto

Questão 2 (2,5 pontos)

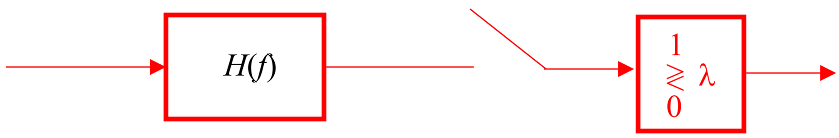
Um esquema de transmissão binário utiliza pulsos

$p(t) = \begin{cases} At/T_s & 0 \le t \le T_s \\ 0 & c.c. \end{cases}$ e $q(t) = \begin{cases} At/T_s & 0 \le t \le T_s/2 \\ 0 & c.c. \end{cases}$

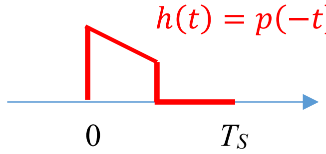
a) Esboce o sinal transmitido para a sequência 01110



b) Esboce o receptor óptimo



$$h(t) = p(-t) - q(-t)$$



$$E_p = \int_0^{T_s} \frac{A^2}{T_s^2} t^2 dt = \frac{A^2}{T_s^2} \frac{t^3}{3}\bigg|_0^{T_s} = \frac{A^2 T_s}{3}$$

$$E_q = \int_0^{T_s/2} \frac{A^2}{T_s^2} t^2 dt = \frac{A^2}{T_s^2} \frac{t^3}{3}\bigg|_0^{T_s/2} = \frac{A^2 T_s}{24}$$

$$\lambda = \frac{E_p - E_q}{2} = \frac{7A^2 T_s}{48}$$

c) Qual a probabilidade de erro deste esquema?

$$E_{pq} = \int_0^{T_s} \frac{A^2}{T_s^2} t^2 dt = \frac{A^2 T_s}{24} = E_q$$

$$\beta^2 = \frac{2(E_p + E_q - 2E_{pq})}{N_0} = \frac{2}{N_0}(E_p - E_q) = \frac{7A^2 T_s}{12 N_0}$$

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{\beta^2}{4}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{7A^2 T_s}{48 N_0}}\right)$$

$$E_b = \frac{E_p + E_q}{2} = \frac{3A^2 T_s}{16} \Rightarrow P_b = Q\left(\sqrt{\frac{7\left(\frac{16 E_b}{3}\right)}{48 N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{7E_b}{9N_0}}\right)$$

Questão 3(2,5 pontos)

Um espaço de sinais tridimensional é definido pelas funções base ortonormais

$$\varphi_1(t) = A \,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

$$\varphi_2(t) = B \sin\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

$$\varphi_3(t) = C \cos\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

a) Quais os valores de A,B e C?
b) Dados os sinais representados por

$$\bar{s}_1 = (\alpha, 0{,}0),\ \bar{s}_2 = (\alpha, \alpha, 0),\ \bar{s}_3 = (\alpha, 0, \alpha),\ \bar{s}_4 = (0, 0, \alpha)$$

e o mapeamento $00 \to \bar{s}_1$, $01 \to \bar{s}_2$, $10 \to \bar{s}_3$, $11 \to \bar{s}_4$
Esboce o sinal transmitido para a sequência de bits 01101110
c) Qual a probabilidade de erro aproximada do esquema do item b, para razões sinal-ruído (RSR) altas?

a) Para que sejam funções normais, queremos que

$$E_1 = E_2 = E_3 = 1$$

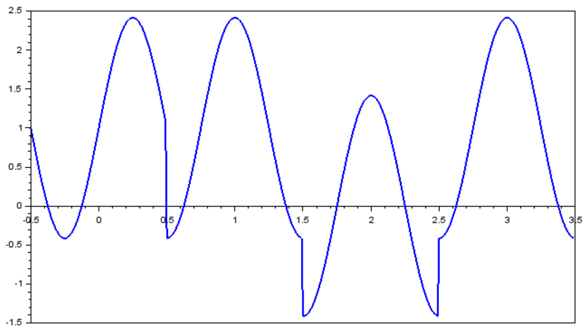
$$E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1^2(t)dt = A^2 T_s = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{T_s}}$$

$$E_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2^2(t)dt = B^2 \int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right) dt = \frac{B^2 T_s}{2} = 1 \Rightarrow B = \sqrt{\frac{2}{T_s}}$$

$$E_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_3^2(t)dt = \frac{C^2 T_s}{2} = 1 \Rightarrow C = \sqrt{\frac{2}{T_s}}$$

b) Para a sequência 01 10 11 10 enviamos a sequência de símbolos $\bar{s}_2, \bar{s}_3, \bar{s}_4, \bar{s}_3$, com

$$s_2(t) = \alpha\varphi_1(t) + \alpha\varphi_2(t),$$
$$s_3(t) = \alpha\varphi_1(t) + \alpha\varphi_3(t),$$
$$s_4(t) = \alpha\varphi_3(t),$$



c) As distâncias entre os pontos da constelação são

$$d_{12} = d_{13} = \alpha = d_{min},$$
$$d_{14} = d_{23} = d_{34} = \sqrt{2}\alpha,$$
$$d_{24} = \sqrt{3}\alpha$$

Considerando o número médio de vizinhos com distância α

$$N_{viz} = 1$$

Temos que

$$P_e \approx Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{2N_0}}\right)$$

Sabemos ainda que

$$E_s = \frac{1}{4}(\alpha^2 + 2\alpha^2 + 2\alpha^2 + \alpha^2) = \frac{3}{2}\alpha^2.$$

Portanto

$$P_e \approx Q\left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{3N_0}}\right)$$

Questão 4(2,5 pontos)

Um sistema de comunicações sem fio ocupa uma banda de 10MHz, e trabalha com os esquemas de modulação BPSK, QPSK e 16-QAM. São utilizados pulsos de Nyquist com fator de roll-off $\rho = 0{,}25$.
Sabemos que o sinal sofre atenuação de acordo com a distância d_{km} em quilômetros, de modo que a atenuação é dada por $L = 80 + 30\log_{10} d_{\text{km}}$. Queremos uma probabilidade de erro de bits de $P_b = 10^{-5}$, e sabemos que a potência de transmissão é de 40dBm, e que o ruído no receptor tem uma densidade espectral de potência de $S_{\text{n}}(f) = -100\text{dBm/Hz}$.

a) Qual a taxa de bits alcançada para cada um dos esquemas?
b) Qual o alcance máximo da transmissão para cada um dos esquemas de modulação?

a)

$$R_s = \frac{B}{1+\rho} = \frac{10^7}{1{,}25} = 8 \text{ Mbauds}$$
$$R_b = R_s \log_2 M$$

BPSK: $R_b = R_s = 8 \text{ Mbps}$
QPSK: $R_b = 2R_s = 16 \text{ Mbps}$
16-QAM: $R_b = 4R_s = 32\text{Mbps}$

b)
BPSK:

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \le 10^{-5} \Rightarrow \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = 4{,}3 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 9{,}245$$
$$P_{rx} = E_b R_b = \frac{E_b}{N_0} N_0 R_b = 9{,}245\times(2\times10^{-10})\times(8\times10^6) = 14{,}8\times10^{-3} = -18{,}3\text{dBm}$$
$$L = P_{tx,dBm} - P_{rx,dBm} = 58{,}3\text{dB} = 80 + 30\log_{10} d_{\text{km}}$$
$$\Rightarrow d_{km} = 0{,}189 \text{ km}$$

QPSK:

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \le 10^{-5} \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 9{,}245$$
$$P_{rx} = \frac{E_b}{N_0} N_0 R_b = 9{,}245\times(2\times10^{-10})\times(16\times10^6) = 29{,}6\times10^{-3} = -15{,}3\text{dBm}$$
$$L = P_{tx,dBm} - P_{rx,dBm} = 55{,}3\text{dB} = 80 + 30\log_{10} d_{\text{km}}$$
$$\Rightarrow d_{km} = 0{,}150 \text{ km}$$

16-QAM:

$$P_b = \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right) \le 10^{-5} \Rightarrow \sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0}} \ge 4{,}3 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 23{,}11$$
$$P_{rx} = \frac{E_b}{N_0} N_0 R_b = 9{,}245\times(2\times10^{-10})\times(32\times10^6) = 147{,}9\times10^{-3} = -8{,}3\text{dBm}$$
$$L = P_{tx,dBm} - P_{rx,dBm} = 48{,}3\text{dB} = 80 + 30\log_{10} d_{\text{km}}$$
$$\Rightarrow d_{km} = 0{,}088\text{km}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Fórmulas Úteis

Tabela de Transformadas de Fourier

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$\begin{array}{ccc}
\delta(t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & 1 \\
1 & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \delta(f) \\
t^n e^{-at}u(t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{n!}{(a+j2\pi f)^{n+1}} \\
e^{-a|t|} & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2} \\
e^{j2\pi f_0 t} & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \delta(f-f_0) \\
\cos(2\pi f_0 t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)] \\
\sin(2\pi f_0 t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)] \\
u(t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{1}{2}\delta(f)+\dfrac{1}{j2\pi f} \\
\mathrm{sgn}(t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{1}{j\pi f} \\
\mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{\tau}\right) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & |\,\tau\,|\;\mathrm{sinc}(\pi f\tau) \\
\mathrm{sinc}(2\pi Bt) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{1}{|\,2B\,|}\mathrm{rect}\left(\dfrac{f}{2B}\right) \\
\Delta\left(\dfrac{t}{\tau}\right) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{\tau}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{\pi f\tau}{2}\right) \\
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\dfrac{n}{T}\right) \\
k_1 g_1(t)+k_2 g_2(t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & k_1 G_1(f)+k_2 G_2(f) \\
G(t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & g(-f) \\
g(at) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{1}{|\,a\,|}G\left(\dfrac{f}{a}\right) \\
g(t-t_0) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & G(f)e^{-j2\pi f t_0} \\
g(t)e^{j2\pi f_0 t} & \overset{F}{\Leftrightarrow} & G(f-f_0) \\
g_1(t)*g_2(t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & G_1(f)G_2(f) \\
g_1(t)g_2(t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & G_1(f)*G_2(f) \\
\dfrac{d^n g(t)}{dt^n} & \overset{F}{\Leftrightarrow} & (j2\pi f)^n G(f) \\
\int_{-\infty}^{t} g(x)dx & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{G(f)}{j2\pi f}+\dfrac{1}{2}G(0)\delta(f)
\end{array}$$

Transmissão Digital

Densidade espectral de potência

$$S(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_s} \sum_{-\infty}^{\infty} R_n e^{-j2\pi n f T_s}$$

filtro de recepção ótimo $H(f) = k\frac{P(-f)e^{-j2\pi f T_m}}{S_n(f)}$

$P_e = Q\left(\frac{\beta}{2}\right)$, $\beta^2 = \frac{E_p+E_q-2E_{pq}}{N_0/2}$, com $E_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)q(t)dt$

banda de transmissão com pulsos de Nyquist:

$B = (1+r)R_s$ para sistemas em banda passante, $B = (1+r)\frac{R_s}{2}$ em banda base

Probabilidade de Erro de Símbolo (P_e) e de Bit (P_b) de Esquemas de Modulação Comuns

$$P_{b,BPSK} = P_{b,QPSK} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_{b,OOK} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_{b,2-FSK,coerente} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b(1-\mathrm{sinc}(2\pi\Delta f T_s))}{N_0}}\right)$$

$$P_{b,OOK,não-coerente} = P_{b,2-FSK,não-coerente} = \frac{1}{2}e^{-E_b/2N_0}$$

$$P_{e,M-PAM} = 2\left(\frac{M-1}{M}\right)Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2 M}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$P_{e,M-QAM} \approx 4\left(\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$ apenas para QAM quadrado (M=4^n)

$$P_{e,M-PSK} \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b\log_2 M}{N_0}}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{M}\right)$$

Caso seja usada codificação de Gray $P_b \approx P_e/\log_2 M$, para codificação ortogonal $P_b \approx \frac{P_e}{2}$

Probabilidade de Erro Aproximada pelo limitante da união

$$P_e = \overline{N_{viz}}\,Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{2N_0}}\right)$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Função Q

x	Q(x)	*X*	Q(x)
0,1	4,60E-001	3,1	9,68E-004
0,2	4,21E-001	3,2	6,87E-004
0,3	3,82E-001	3,3	4,83E-004
0,4	3,45E-001	3,4	3,37E-004
0,5	3,09E-001	3,5	2,33E-004
0,6	2,74E-001	3,6	1,59E-004
0,7	2,42E-001	3,7	1,08E-004
0,8	2,12E-001	3,8	7,23E-005
0,9	1,84E-001	3,9	4,81E-005
1,0	1,59E-001	4,0	3,17E-005
1,1	1,36E-001	4,1	2,07E-005
1,2	1,15E-001	4,2	1,33E-005
1,3	9,68E-002	4,3	8,54E-006
1,4	8,08E-002	4,4	5,41E-006
1,5	6,68E-002	4,5	3,40E-006
1,6	5,48E-002	4,6	2,11E-006
1,7	4,46E-002	4,7	1,30E-006
1,8	3,59E-002	4,8	7,93E-007
1,9	2,87E-002	4,9	4,79E-007
2,0	2,28E-002	5,0	2,87E-007
2,1	1,79E-002	5,1	1,70E-007
2,2	1,39E-002	5,2	9,96E-008
2,3	1,07E-002	5,3	5,79E-008
2,4	8,20E-003	5,4	3,33E-008
2,5	6,21E-003	5,5	1,90E-008
2,6	4,66E-003	5,6	1,07E-008
2,7	3,47E-003	5,7	5,99E-009
2,8	2,56E-003	5,8	3,32E-009
2,9	1,87E-003	5,9	1,82E-009
3,0	1,35E-003	6,0	9,87E-010