Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 0 – 2017/1 (16/03/2017)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de 4 (quatro) questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a qualquer material, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
Total	

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais
Prof. André Noll Barreto

Questão 1 (2,5 pontos)

Sabendo que a transformada de Fourier de $\text{rect}(t) = \text{sinc}(\pi f)$, ache a transformada de Fourier de $x(t) = \begin{cases} At & 0 < t \leq B \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

Sabemos que

$$\frac{dx(t)}{dt} = A\text{rect}\left(\frac{t}{B} - \frac{1}{2}\right) - A\delta(t - B) = A\text{rect}\left(\frac{t - \frac{B}{2}}{B}\right) - AB\delta(t - B)$$

e, portanto,

$$j2\pi f X(f) = ABe^{-j\pi Bf}\text{sinc}(\pi fB) - ABe^{-j2\pi fB}$$

Consequentemente

$$X(f) = \frac{ABe^{-j\pi Bf}}{j2\pi f}\left(\text{sinc}(\pi fB) - e^{-j\pi Bf} \right)$$

Questão 2 (2,5 pontos)

Um aluno de engenharia constrói um receptor de rádio FM caseiro, que utiliza uma frequência intermediária de 4MHz para demodular o sinal. Ele tenta sintonizar uma emissora de rádio FM de Rock, que transmite em uma portadora de 90MHz. Entretanto, ao sintonizar esta rádio, ele ouve uma outra rádio, que transmite apenas música sertaneja.

a) Explique o que deve ter acontecido, e o que o aluno pode ter esquecido em seu projeto.

O aluno provavelmente se esqueceu do filtro de imagem.

b) Qual a frequência de portadora da emissora de música sertaneja?

Sabemos que a frequência do oscilador local é escolhida de modo que

$$f_{LO} = f_c \pm f_I$$

de modo que o sinal modulado seja convertido para a frequência intermediária f_I.
Desta forma, emissoras que tenham frequência f_c ou $f_c \mp 2f_I$ serão convertidas para f_I, caso não haja filtro de imagem.
Ou seja, a emissora sertaneja deve estar na frequência imagem, que, dependendo da escolha do oscilador local, será $f_c \mp 2f_I = (90 \mp 8) = 82$MHz ou 98MHz.
Sabendo que a banda reservada pra FM este entre 88 e 108MHz, deduz-se que a emissora sertaneja transmite em 98MHz. [1]

[1] Na resolução da prova será aceito qualquer um dos dois valores.

Questão 3 (2,5 pontos)

Um sistema de transmissão digital é utilizado para transmitir um sinal de vídeo em cores, multiplexado com um sinal de áudio surround com 4 canais.
Sabemos que o sinal analógico de vídeo tem uma banda de 4MHz para cada uma das 3 cores primárias, e que o sinal é amostrado a uma taxa 20% maior que a taxa de amostragem de Nyquist. O sinal de vídeo é amostrado com quantização uniforme, de modo que a RSR seja maior que 40dB, e sabemos que a potência média do sinal é 25% do quadrado de sua amplitude de pico. Sabemos ainda que o sinal de vídeo pode ser comprimido com uma razão de compressão (taxa sem compressão/taxa com compressão) igual a 10.
Os canais de áudio, de alta qualidade, são amostrados com 16bits/amostra, a uma taxa de 54k amostras/segundo, em cada canal. Os canais de áudio não são comprimidos.

Qual a taxa de transmissão do sinal total?

A taxa de amostragem do sinal de vídeo é $f_a = 1{,}2 \times 2 \times B_{vid} = 9{,}6\text{MHz}$.
A resolução da quantização é obtida de modo que

$$\frac{3L^2 P_m}{m_p^2} = \frac{3}{4}L^2 > 10^4 \Rightarrow L^2 > \sqrt{13333} \Rightarrow L = 2^n > 115{,}5 \Rightarrow n = 7$$

A taxa de bits de vídeo não comprimido é

$$3 \times f_{a,vid} \times n_{vid} = 3(9{,}6 \times 10^6)7 = 201{,}6\text{Mbps}$$

e com compressão,

$$R_{vid} = 20{,}16\text{Mbps}$$

A taxa de áudio é de

$$R_{aud} = 4 \times f_{a,aud} \times n_{aud} = 4(54 \times 10^3)16 = 3{,}456\text{Mbps}$$

E a taxa total será

$$R_b = R_{vid} + R_{aud} = 23{,}616\text{Mbps}$$

Questão 4 (2,5 pontos)

Um sinal é composto por duas senoides de frequência 25Hz e 50Hz de igual amplitude. Este sinal é modulado em AM-DSB-SC em uma portadora de frequência 100Hz. Este sinal modulado $\phi(t)$ passa por uma não linearidade, descrita por $y(t) = \phi(t) + 0.5\phi^2(t)$.
Esboce o espectro do sinal modulado antes e após a não linearidade

Supondo que o sinal é dado por

$$x(t) = A\cos(2\pi f_1 t + \theta_1) + A\cos(2\pi f_2 t + \theta_2)$$

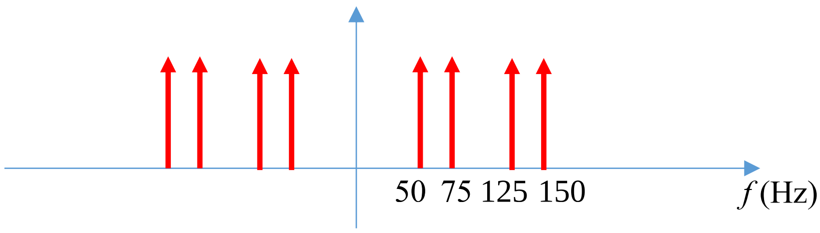
O sinal modulado será

$$\phi(t) = \frac{A}{2}[\cos(2\pi(f_c - f_1)t - \theta_1) + \cos(2\pi(f_c - f_2)t - \theta_2)$$
$$+ \cos(2\pi(f_c + f_1)t + \theta_1) + \cos(2\pi(f_c + f_2)t + \theta_2)$$

Considerando $\theta_1 = \theta_2 = 0$ para simplificar, temos então

$$\phi(t) = \frac{A}{2}[\cos(100\pi t) + \cos(150\pi t) + \cos(250\pi t) + \cos(300\pi t)]$$

Com espectro de amplitude



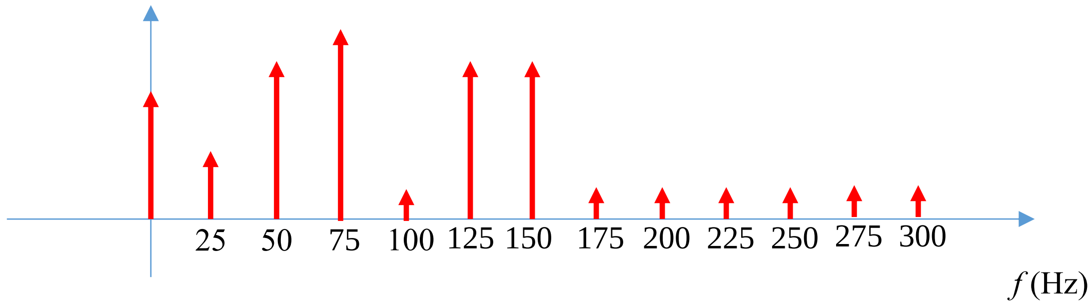
Ainda considerando $\theta_1 = \theta_2 = 0$, e considerando $A = 1$, para simplificar, pós a não linearidade, teremos

$$y(t) = \frac{1}{2}[\cos(100\pi t) + \cos(150\pi t) + \cos(250\pi t) + \cos(300\pi t)]$$
$$+\frac{1}{8}[4 + \cos(200\pi t) + \cos(300\pi t) + \cos(500\pi t) + \cos(600\pi t) + \cos(250\pi t)$$
$$+ \cos(50\pi t) + \cos(350\pi t) + \cos(150\pi t) + \cos(400\pi t) + \cos(100\pi t)$$
$$+ \cos(450\pi t) + \cos(150\pi t) + \cos(550\pi t) + \cos(50\pi t)]$$
$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos(50\pi t) + \frac{5}{8}\cos(100\pi t) + \frac{6}{8}\cos(150\pi t) + \frac{1}{8}\cos(200\pi t) + \frac{5}{8}\cos(250\pi t)$$
$$+ \frac{5}{8}\cos(300\pi t) + \frac{1}{8}\cos(350\pi t) + \frac{1}{8}\cos(400\pi t) + \frac{1}{8}\cos(450\pi t)$$
$$+ \frac{1}{8}\cos(500\pi t) + \frac{1}{8}\cos(550\pi t) + \frac{1}{8}\cos(600\pi t)$$

Esboçando apenas o espectro positivo, temos que

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto



Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Fórmulas Úteis

Identidades Trigonométricas:

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \qquad \sin(x\pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$$

$$\cos(x\pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y \qquad \tan(x\pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x\tan y}$$

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x+\tan^{-1}(-b/a)\right)$$

Integrais:

$$\int x\sin(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}(\sin(ax) - ax\cos(ax)) \qquad \int x^2\sin(ax)dx = \frac{1}{a^3}(2ax\sin(ax) + 2\cos(ax) - a^2x^2\cos(ax))$$

$$\int x\cos(ax)dx = \frac{1}{a^2}(\cos(ax) + ax\sin(ax)) \qquad \int x^2\cos(ax)dx = \frac{1}{a^3}(2ax\cos(ax) - 2\sin(ax) + a^2x^2\sin(ax))$$

$$\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) \qquad \int x^2e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \qquad \int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$$

$$\int \frac{x}{a^4+x^4}dx = \frac{1}{2a^2}\tan^{-1}\frac{x^2}{a^2}$$

Fórmula de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$$

$$\mathrm{sen}\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$$

Convolução

$$g(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t-\tau)d\tau = h(t)*g(t)$$

Série de Fourier Generalizada: $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t) c_n = \frac{1}{E_n}\int_{T_0} g(t)x_n^* dt$

Série de Fourier Trigonométrica:

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(2\pi nf_0t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos(2\pi nf_0t + \theta_n)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} g(t)dt;\ a_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} g(t)\cos(2\pi nf_0t)\,;\ b_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} g(t)\sin(2\pi nf_0t)$$

$$C_0 = a_0;\ C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Série de Fourier Exponencial:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2\pi nf_0t} D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} g(t)e^{-j2\pi nf_0t}dt = \frac{C_n}{2}e^{j\theta_n};\ D_{-n} = \frac{C_n}{2}e^{-j\theta_n}$$

Definições

$$\mathrm{sinc}\,t = \frac{\sin t}{t} \qquad \mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 1/2 & |t| = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Tabela de Transformadas de Fourier:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$\delta(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad 1$$

$$1 \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \delta(f)$$

$$t^n e^{-at}u(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{n!}{(a+j2\pi f)^{n+1}}$$

$$e^{-a|t|} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \delta(f-f_0)$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$$

$$u(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$$

$$\mathrm{sgn}(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{j\pi f}$$

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad |\,\tau\,|\ \mathrm{sinc}(\pi f\tau)$$

$$\mathrm{sinc}(2\pi Bt) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{|\,2B\,|}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{\tau}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi f\tau}{2}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$k_1 g_1(t)+k_2 g_2(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad k_1 G_1(f)+k_2 G_2(f)$$

$$G(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad g(-f)$$

$$g(at) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{|\,a\,|}G\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$g(t-t_0) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

$$g(t)e^{j2\pi f_0 t} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G(f-f_0)$$

$$g_1(t)*g_2(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G_1(f)G_2(f)$$

$$g_1(t)g_2(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G_1(f)*G_2(f)$$

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad (j2\pi f)^n G(f)$$

$$\int_{-\infty}^{t} g(x)dx \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{G(f)}{j2\pi f}+\frac{1}{2}G(0)\delta(f)$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

$$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-j2\pi kn/N} \qquad g_n = T_a g(nT_a) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{j2\pi kn/N}$$

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais
Prof. André Noll Barreto

Tabela de Transformadas de Hilbert:

$g(t)$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$g_h(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\alpha)}{t-\alpha} d\alpha$	$g_h(t)$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$-g(t)$
$\sin t$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$-\cos t$	$\cos t$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$\sin t$
$\frac{1}{t^2+1}$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$\frac{t}{t^2+1}$	$\mathrm{sinc} t$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$\frac{1-\cos t}{t}$
$\delta(t)$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$\frac{1}{\pi t}$	$\mathrm{rect} t$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$\frac{1}{\pi}\ln\left\lvert\frac{t+1/2}{t-1/2}\right\rvert$

Regra de Carson $B \approx 2(\Delta f + B)$

Razão sinal-ruído com quantização

$$RSR_{\text{uniforme}} = 3L^2 \frac{P_m}{m_p^2} \qquad RSR_{\text{lei-A}} = 3L^2 \frac{1}{(\ln(A))^2}$$