Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 1 – 2017/1 (04/04/2017)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de quatro questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h00
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda resposta deverá estar contida nas folhas da prova. Folhas de rascunho serão fornecidas caso necessário, e, caso entregues ao professor, devem conter o nome e a matrícula.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	**Nota**
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 1 (2,5 pontos)

Um sinal de voz tem tipicamente uma distribuição de Laplace, de modo que sua função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f_{\mathrm{x}}(x) = Ae^{-\lambda|x|}$$

a) Qual o valor de A?
b) Qual a sua média e variância? (Integrais necessárias se encontram no final da prova)
c) Sabendo que a potência do sinal $P_{\mathrm{x}} = E[\mathrm{x}^2] = 4$, qual a probabilidade de que o sinal tenha uma amplitude menor que 1, ou seja, qual Pr(|x|<1) ?

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\lambda|x|}dx = 1$$

$$2\int_{0}^{\infty} Ae^{-\lambda x}dx = 2A\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{2A}{\lambda} = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{\lambda}{2}$$

b)

$$\bar{\mathrm{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} Axe^{-\lambda|x|}dx = 0$$

(por conta da simetria da distribuição em torno do zero)

$$\mathrm{var}\,\{\mathrm{x}\} = E\{\mathrm{x}^2\} - \bar{\mathrm{x}} = E\{\mathrm{x}^2\}$$

$$E\{\mathrm{x}^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{2}x^2e^{-\lambda|x|}dx = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\lambda}{2}x^2e^{-\lambda x}dx$$

$$= -\lambda\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^3}(\lambda^2x^2 + 2\lambda x + 2)\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\lambda^2}$$

c)

$$E\{\mathrm{x}^2\} = \frac{2}{\lambda^2} = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Pr(|x| < 1) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-|x|/\sqrt{2}}dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-x/\sqrt{2}}dx = 1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \approx 0{,}5069$$

Questão 2 (2,5 pontos)

Para se fazer a decoração na festa de comemoração de um título do Flamengo, temos 3 caixas com 100 bolas vermelhas e pretas, cada. Sabemos que na primeira caixa, todas as bolas são vermelhas, na segunda caixa, 50 bolas são vermelhas, e na terceira caixa, 25 bolas são vermelhas.

a) Se retiramos uma bola preta, qual a probabilidade de esta bola ter sido retirada da segunda caixa?
b) Se retiramos 8 bolas da terceira caixa, qual a probabilidade de termos retirado o mesmo número de bolas vermelhas e pretas?

a) Sabemos que

$$\Pr(\text{preta}|\text{caixa }1) = 0$$
$$\Pr(\text{preta}|\text{caixa }2) = \frac{1}{2}$$
$$\Pr(\text{preta}|\text{caixa }3) = \frac{3}{4}$$

Queremos

$$\Pr(\text{caixa }2|\text{preta}) = \frac{\Pr(\text{preta}|\text{caixa }2)\Pr(\text{caixa }2)}{\Pr(\text{preta})}$$

Já que todas as caixas possuem o mesmo número de bolas, podemos supor

$$\Pr(\text{caixa }1) = \Pr(\text{caixa }2) = \Pr(\text{caixa }3) = \frac{1}{3}$$

e, portanto

$$\Pr(\text{preta}) = 0\left(\frac{1}{3}\right) + 0{,}5\left(\frac{1}{3}\right) + 0{,}75\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{12}$$

Consequentemente,

$$\Pr(\text{caixa }2|\text{preta}) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}$$

b) Neste caso, temos retirada sem reposição e queremos retirar 4 bolas pretas (ou vermelhas) em 8. Temos neste caso $\binom{8}{4} = 70$ possibilidades.

Supondo por exemplo a sequência PPPPVVVV, a probabilidade de esta sequência ocorrer será

$$\Pr(PPPPVVVV) = \frac{75}{100}\frac{74}{99}\frac{73}{98}\frac{72}{97}\frac{25}{96}\frac{24}{95}\frac{23}{94}\frac{22}{93}$$

Agora, se tivermos por exemplo a sequência VPVPVPVP

$$\Pr(VPVPVPVP) = \frac{25}{100}\frac{75}{99}\frac{24}{98}\frac{74}{97}\frac{23}{96}\frac{73}{95}\frac{22}{94}\frac{72}{93}$$

Podemos ver que temos os mesmos termos nos numeradores, porém em ordens diferentes, e, desta forma

$$\Pr(\text{número igual de bolas em }8) = \binom{8}{4}\frac{75}{100}\frac{74}{99}\frac{73}{98}\frac{72}{97}\frac{25}{96}\frac{24}{95}\frac{23}{94}\frac{22}{93} = 0{,}0826$$

Questão 3 (2,5 pontos)

Considere uma caminhada aleatória (*random walk*), um processo aleatório em tempo discreto em que, sabendo-se a posição em um dado instante $\mathrm{x}[t]$, com $t \in \mathbb{Z}$, a posição no instante seguinte é dada por

$$\mathrm{x}[t+1] = \mathrm{x}[t] + \mathrm{u}_t$$

em que u_t é uma variável aleatória Gaussiana com média 0 e variância σ_u^2.
Partindo de uma posição inicial $\mathrm{x}[0] = x_0$,

a) Qual a média de $\mathrm{x}[t]$?
b) Qual a autocorrelação $E\{\mathrm{x}[t]\mathrm{x}[t+\Delta t]\}$?
c) Este processo é estacionário no sentido amplo? Justifique.

Dica: perceba que $\mathrm{x}[t+2] = \mathrm{x}[t] + u_t + u_{t+1}$, e assim por diante.

a)

$$\mathrm{x}[t] = \mathrm{x}[0] + \sum_{k=0}^{t-1} \mathrm{u}_k$$

$$E\{\mathrm{x}[t]\} = x_0 + tE\{\mathrm{u}\} = x_0$$

b)

$$\mathrm{x}[t+\Delta t] = \mathrm{x}[t] + \sum_{k=t}^{t+\Delta t-1} \mathrm{u}_k$$

$$E\{\mathrm{x}[t]\mathrm{x}[t+\Delta t]\} = E\left\{\mathrm{x}^2[t] + \sum_{k=t}^{t+\Delta t-1} \mathrm{x}[t]\mathrm{u}_k\right\}$$

$$= E\{\mathrm{x}^2[t]\} + \Delta t\, E\{\mathrm{x}[t]\mathrm{u}_k\}$$

Considerando que as variáveis aleatórias u_k são independentes de $\mathrm{x}[t]$, $k \geq t$

$$E\{\mathrm{x}[t]\mathrm{x}[t+\Delta t]\} = E\{\mathrm{x}^2[t]\} + \Delta t\, E\{\mathrm{x}[t]\}E\{\mathrm{u}_k\} = E\{\mathrm{x}^2[t]\}$$

$$= E\left\{\left(x_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \mathrm{u}_k\right)^2\right\} = x_0^2 + 2x_0 E\left\{\sum_{k=0}^{t-1} \mathrm{u}_k\right\} + E\left\{\left(\sum_{k=0}^{t-1} \mathrm{u}_k\right)^2\right\}$$

Sabemos que $E\left\{\left(\sum_{k=0}^{t-1} \mathrm{u}_k\right)^2\right\} = \mathrm{var}\{\sum_{k=0}^{t-1} \mathrm{u}_k\}$, pois sua média é nula. Considerando que as v.a.s u_k são independentes,

$$E\left\{\left(\sum_{k=0}^{t-1} \mathrm{u}_k\right)^2\right\} = t\,\mathrm{var}\{\mathrm{u}\} = t\,\sigma_\mathrm{u}^2$$

e

$$E\{\mathrm{x}[t]\mathrm{x}[t+\Delta t]\} = x_0^2 + t\sigma_\mathrm{u}^2$$

c)

apesar de a média ser constante, a autocorrelação depende de t, e, portanto, o processo não é estacionário.

Questão 4 (2,5 pontos)

Um sistema de armazenamento de dados é projetado para armazenar imagens escaneadas, em que o tamanho de cada imagem pode ser modelado como uma variável aleatória uniforme entre 0 e 5MB. Qual a memória necessária (aproximada) para que possamos armazenar 1000 imagens com uma probabilidade de 99%?

Para cada imagem temos uma média $\mu_i = 2{,}5$ e variância $\sigma_i^2 = \frac{5^2}{12} = \frac{25}{12}$
A soma de 1000 imagens tenderá a uma variável aleatória normal z, com média $\mu_z = 1000\,\mu_i = 2500$ e variância $\sigma_z^2 = 1000\sigma_i^2 = \frac{6250}{3} = 2083{,}333$.

Queremos uma memória x, tal que $\Pr(z > x) = 0{,}01$, ou seja

$$Q\left(\frac{x - \mu_z}{\sigma_z}\right) \leq 0{,}01$$

Consultando a tabela,

$$\frac{x - 2500}{\sqrt{2083{,}33}} \geq 2{,}4 \Rightarrow x \geq 2610\text{MB}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Integrais

$$\int x \sin ax dx = \frac{1}{a^2}(\sin ax - ax \cos ax)$$
$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax \sin ax)$$
$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{1}{a^3}(2ax \sin ax + 2\cos ax - a^2x^2 \cos ax)$$
$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{1}{a^3}(2ax \cos ax - 2\sin ax + a^2x^2 \sin ax)$$
$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$$
$$\int x^2 e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$
$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2 + b^2}$$
$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2 + b^2}$$
$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$
$$\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + a^2)$$
$$\int \frac{x}{a^4 + x^4} dx = \frac{1}{2a^2}\tan^{-1}\frac{x^2}{a^2}$$

Probabilidade

$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$ – Regra de Bayes

eventos são independentes se $P(B \mid A) = P(B)$.

se $A_i, 1 \leq i \leq N$são eventos disjuntos e $\cup\, i = 1_N A_i = S \Rightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{N} P(B \mid A_i)P(A_i)$

Variáveis Aleatórias

$$P_{\mathrm{y}}(y) = \sum_i P_{\mathrm{x,y}}(x_i, y)$$

CDF $F_{\mathrm{X}}(x) = Pr(\mathrm{x} \leq x)$

PDF $p_{\mathrm{x}}(x) = \frac{dF_{\mathrm{x}}(x)}{dx}$

v.a exponencial: $p_{\mathrm{x}}(x) = \lambda e^{-\lambda x}u(x)$

v.a. Gaussiana: $p_{\mathrm{x}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-x^2/2} dx$$

$E\{f(\mathrm{x})\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p_{\mathrm{x}}(x)dx p_{\mathrm{x}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\mathrm{x,y}}(x,y)dy$

Teorema Central do Limite

$$\mathrm{y}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{x}_i - \mu}{\sigma} \rightarrow Normal(0,1)$$

Covariância: $\sigma_{\mathrm{xy}} = E\{(x - \bar{x})(y - \bar{y})\}$

Coeficiente de correlação $\rho_{\mathrm{xy}} = \frac{\sigma_{\mathrm{xy}}}{\sigma_{\mathrm{x}}\sigma_{\mathrm{y}}}$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Processos Estocásticos

Autocorrelação: $R_x(\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\}$

Densidade Espectral de Pot.: $S_x(f) = F_\tau\{R_x(\tau)\}$

$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$ e $\bar{y} = H(0)\bar{x}$

$R_{x,y}(\tau) = E\{x(t)y(t+\tau)\}$

x e y são descorrelatados se $R_{x,y}(\tau) = \bar{x}\bar{y}$ e são ortogonais se $R_{x,y}(\tau) = 0$

Filtro de Wiener

$$H_{opt}(f) = \frac{S_m(f)}{S_m(f)+S_n(f)},\ P_N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_m(f)S_n(f)}{(S)_m(f)+S_n(f)} df$$

Função Q

x	Q(x)	*X*	Q(x)
0,1	4,60E-001	3,1	9,68E-004
0,2	4,21E-001	3,2	6,87E-004
0,3	3,82E-001	3,3	4,83E-004
0,4	3,45E-001	3,4	3,37E-004
0,5	3,09E-001	3,5	2,33E-004
0,6	2,74E-001	3,6	1,59E-004
0,7	2,42E-001	3,7	1,08E-004
0,8	2,12E-001	3,8	7,23E-005
0,9	1,84E-001	3,9	4,81E-005
1,0	1,59E-001	4,0	3,17E-005
1,1	1,36E-001	4,1	2,07E-005
1,2	1,15E-001	4,2	1,33E-005
1,3	9,68E-002	4,3	8,54E-006
1,4	8,08E-002	4,4	5,41E-006
1,5	6,68E-002	4,5	3,40E-006
1,6	5,48E-002	4,6	2,11E-006
1,7	4,46E-002	4,7	1,30E-006
1,8	3,59E-002	4,8	7,93E-007
1,9	2,87E-002	4,9	4,79E-007
2,0	2,28E-002	5,0	2,87E-007
2,1	1,79E-002	5,1	1,70E-007
2,2	1,39E-002	5,2	9,96E-008
2,3	1,07E-002	5,3	5,79E-008
2,4	8,20E-003	5,4	3,33E-008
2,5	6,21E-003	5,5	1,90E-008
2,6	4,66E-003	5,6	1,07E-008
2,7	3,47E-003	5,7	5,99E-009
2,8	2,56E-003	5,8	3,32E-009
2,9	1,87E-003	5,9	1,82E-009
3,0	1,35E-003	6,0	9,87E-010