# Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 2 – 2017/1 (09/05/2017)

Aluno:____________________________________________

Matrícula: _________________________________________

## Instruções

- A prova consiste de cinco questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h00
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda resposta deverá estar contida nas folhas da prova. Folhas de rascunho serão fornecidas caso necessário, e, caso entregues ao professor, devem conter o nome e a matrícula.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

| **Questão** | **Nota** |
|---|---|
| Q1 | |
| Q2 | |
| Q3 | |
| Q4 | |
| | |
| **Total** | |

UnB

departamento de engenharia elétrica

## Questão 1 (3 pontos)

Em um receptor de um sistema digital o sinal recebido passa por um derivador seguido de um filtro passa baixa com frequência de corte $B$.

a) Se tivermos apenas ruído com densidade espectral de potência $N_0/2$ na entrada, qual a potência do ruído na saída do receptor?

b) Se este receptor é um filtro casado, qual o pulso de transmissão $p(t)$? Ele satisfaz o critério de Nyquist para alguma taxa de transmissão?

a)

$$H(f) = j2\pi f \,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$
$$S_{\mathrm{n}}(f) = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} 4\pi^2 f^2 \mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$
$$P_{\mathrm{n}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\mathrm{n}}(f) df = 2N_0\pi^2 \int_{-B}^{B} f^2\, df = \frac{4N_0\pi^2 B^3}{3}$$

b)

$$P(f) = H(-f) = -j2\pi f \,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Podemos resolver fazendo a transformada de Fourier inversa

$$p(t) = \int_{-B}^{B} -j2\pi f\, e^{j2\pi f t} df = \frac{\sin(2\pi\, Bt) - 2\pi\, Bt\cos(2\pi Bt)}{\pi t^2}$$

O mesmo resultado pode ser obtido verificando-se que

$$p(t) = \frac{dg(t)}{dt},$$

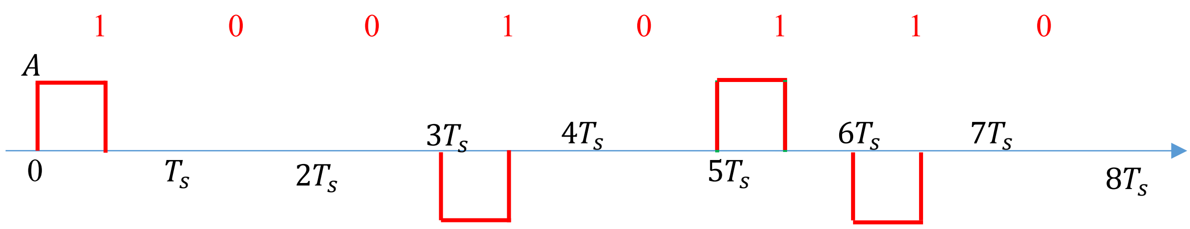
tal que

$$g(t) = -\mathcal{F}^{-1}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)\right\} = -2B \,\mathrm{sinc}\,(2\pi Bt)$$

O pulso não satisfaz o critério de Nyquist, já que não existe nenhum $T_s$ tal que $p(kT_s) = 0$

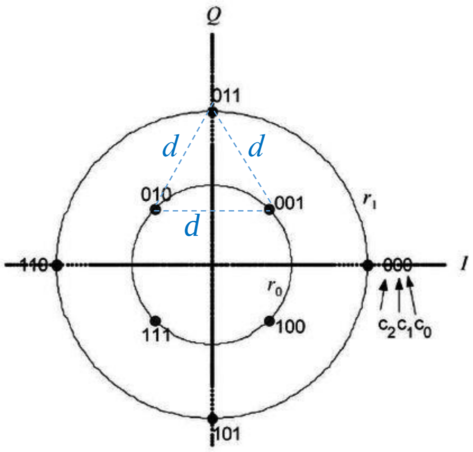
## Questão 2 (1 ponto)

Esboce um sinal bipolar RZ para a sequência de bits 10010110.



### Questão 3 (3 pontos)

Em um sistema de comunicações digital com $M = 8$ usamos um PSK multinível, como na figura abaixo.




O sinal ocupa uma largura de banda de 500 kHz com pulsos de Nyquist com fator de roll-off $\rho = 0{,}25$. Considerando uma taxa de erro de bits desejada de $P_b = 10^{-4}$, e um ruído com densidade espectral de potência de -150 dBm/Hz, calcule a potência recebida. (quem não conseguir achar a expressão para 8-PSK multinível, calcule para um 8-PSK tradicional, valendo metade da questão)

$$P_e \approx \bar{N}_{viz} Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right)$$

$$\bar{N}_{viz} = \frac{1}{8}(4\times 2 + 4\times 4) = 3$$

Podemos ver que o ponto 001 é dado por $\left(\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right)$ e tem energia

$$E_{001} = E_{010} = E_{100} = E_{111} = \frac{d^2}{2}$$

Já o ponto 011 é dado por $\left(0, d\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$, e tem energia

$$E_{011} = E_{000} = E_{101} = E_{110} = \frac{d^2\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{4} = 1{,}866\, d^2$$

Portanto

$$E_s = \frac{1}{8}\left(4\times\frac{d^2}{2} + 4\times 1{,}866\, d^2\right) = 1{,}183 d^2$$

$$P_e \approx 3Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{2N_0}}\right) = 3Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2(1{,}183)N_0}}\right)$$

Podemos ver que não utilizamos codificação de Gray. Considerando o pior caso

$$P_b \approx \frac{P_e}{2} = \frac{3}{2}\, Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2{,}366\, N_0}}\right) = 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_s}{N_0} = 34{,}5 \Rightarrow E_s = 34{,}5(2\times 10^{-18})\text{ J}$$

A taxa de símbolos é dada por

$$R_s = \frac{B}{1+\rho} = \frac{500\text{k}}{1{,}25} = 400\text{ kbauds}$$

e a potência

$$P_{RX} = E_s R_s = 2{,}76\times 10^{-11}\text{W} = -75{,}6\text{ dBm}$$

## Questão 4 (3 pontos)

Um sistema de comunicações usa modulação adaptativa, em que é escolhido o esquema de modulação que transmite na maior taxa possível com uma largura de banda fixa, dada uma certa taxa de erro desejada. Pode ser escolhido qualquer um dos esquemas a seguir: BPSK, QPSK, 8-PSK, 16-QAM, 64-QAM, 256-QAM. São enviados pacotes de 50 bytes cada e queremos uma probabilidade de erro de pacote de 5%.

a) Se tivermos uma razão $\boldsymbol{E_s}/N_0$ =13dB, qual esquema deverá ser escolhido?
b) Para o esquema encontrado acima, qual a duração de um pacote, supondo o uso de pulsos de Nyquist com roll-off $\rho = 0{,}5$ e uma largura de banda de 100kHz?

a) Queremos achar o esquema com maior ordem de modulação $M$ para maximizar a taxa.

$$PER = 1 - (1 - P_b)^{N_{bits}} = 0{,}05 \Rightarrow P_b = 1 - 0{,}95^{\frac{1}{400}} = 1{,}28 \times 10^{-4}$$

Lembrando que $\frac{E_s}{N_0} = 20$

Para BPSK

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) = 1{,}28 \times 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_{s,BPSK}}{N_0} = 6{,}68 < \frac{E_s}{N_0}$$

Para QPSK

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = 1{,}28 \times 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_{s,QPSK}}{N_0} = 13{,}36 < \frac{E_s}{N_0}$$

Para 8-PSK

$$P_b = \frac{2}{3} Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin\frac{\pi}{8}\right) = 1{,}28 \times 10^{-4} \Rightarrow \frac{E_{s,8PSK}}{N_0} = 43 > \frac{E_s}{N_0}$$

E os esquemas QAM também não satisfazem as condições. Portanto, devemos escolher o **QPSK**.

b)
Neste caso,

$$R_b = \log_2 M \;\; R_s = 2\frac{B_T}{1+\rho} = 133{,}33 \text{ kbps}$$

e o tempo de transmissão será

$$T = \frac{N_{bits}}{R_b} = 3 \text{ ms}$$

# Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

## Fórmulas Úteis

Tabela de Transformadas de Fourier

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$\delta(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad 1$$

$$1 \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \delta(f)$$

$$t^n e^{-at}u(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{n!}{(a+j2\pi f)^{n+1}}$$

$$e^{-a|t|} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \delta(f-f_0)$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$$

$$u(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$$

$$\operatorname{sgn}(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{j\pi f}$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad |\,\tau\,| \operatorname{sinc}(\pi f\tau)$$

$$\operatorname{sinc}(2\pi Bt) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{|\,2B\,|}\operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{\tau}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f\tau}{2}\right)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$k_1 g_1(t)+k_2 g_2(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad k_1 G_1(f)+k_2 G_2(f)$$

$$G(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad g(-f)$$

$$g(at) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{|\,a\,|}G\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$g(t-t_0) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

$$g(t)e^{j2\pi f_0 t} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G(f-f_0)$$

$$g_1(t)*g_2(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G_1(f)G_2(f)$$

$$g_1(t)g_2(t) \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad G_1(f)*G_2(f)$$

$$\frac{d^n g(t)}{dt^n} \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad (j2\pi f)^n G(f)$$

$$\int_{-\infty}^{t} g(x)dx \quad \overset{F}{\Leftrightarrow} \quad \frac{G(f)}{j2\pi f}+\frac{1}{2}G(0)\delta(f)$$

# Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

### Algumas Integrais

$$\int x \sin(ax)\, dx = \frac{1}{a^2}(\sin(ax) - ax\cos(ax))$$
$$\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a^2}(\cos(ax) + ax\sin(ax))$$
$$\int x^2 \sin(ax) dx = \frac{1}{a^3}(2ax\sin(ax) + 2\cos(ax) - a^2x^2\cos(ax))$$
$$\int x^2 \cos(ax) dx = \frac{1}{a^3}(2ax\cos(ax) - 2\sin(ax) + a^2x^2\sin(ax))$$
$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$$
$$\int x^2 e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$
$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

### Processos Estocásticos

Autocorrelação: $R_{\mathrm{x}}(\tau) = E\{\mathrm{x}(t)\mathrm{x}(t+\tau)\}$

Densidade Espectral de Pot.: $S_{\mathrm{x}}(f) = F_\tau\{R_{\mathrm{x}}(\tau)\}$

$\mathrm{y}(t) = \mathrm{x}(t) * h(t) \Rightarrow S_{\mathrm{y}}(f) = |H(f)|^2 S_{\mathrm{x}}(f)$ e $\bar{\mathrm{y}} = H(0)\bar{\mathrm{x}}$

$R_{\mathrm{x,y}}(\tau) = E\{\mathrm{x}(t)\mathrm{y}(t+\tau)\}$

x e y são descorrelatados se $R_{\mathrm{x,y}}(\tau) = \bar{\mathrm{x}}\bar{\mathrm{y}}$ e são ortogonais se $R_{\mathrm{x,y}}(\tau) = 0$

### Transmissão Digital

Densidade espectral de potência $S(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_s}\sum_{-\infty}^{\infty} R_n e^{-j2\pi n f T_s}$

filtro de recepção ótimo $H(f) = k\frac{P(-f)e^{-j2\pi f T_m}}{S_n(f)}$

$P_e = Q\left(\frac{\beta}{2}\right)$, $\beta^2 = \frac{E_p + E_q - 2E_{pq}}{N_0/2}$, com $E_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)q(t)dt$

banda de transmissão com pulsos de Nyquist:

$B = (1+r)R_s$ para sistemas em banda passante, $B = (1+r)\frac{R_s}{2}$ em banda base

Probabilidade de Erro de Símbolo ($P_e$) e de Bit ($P_b$) de Esquemas de Modulação Comuns

$$P_{b,BPSK} = P_{b,QPSK} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$
$$P_{b,ortogonal} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$
$$P_{b,2-FSK,coerente} = Q\left(\sqrt{\frac{E_b(1 - \mathrm{sinc}(2\pi\Delta f T_s))}{N_0}}\right)$$
$$P_{b,OOK,não-coerente} = P_{b,2-FSK,não-coerente} = \frac{1}{2}e^{-E_b/2N_0}$$
$$P_{e,M-PAM} = 2\left(\frac{M-1}{M}\right)Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2 M}{M^2 - 1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

UnB

departamento de engenharia elétrica

# Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

$P_{e,M-QAM} \approx 4\left(\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$ apenas para QAM quadrado ($M$=$4^n$)

$$P_{e,M-PSK} \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{M}\right)$$

Caso seja usada codificação de Gray $P_b \approx P_e / \log_2 M$ , para codificação ortogonal $P_b \approx \frac{P_e}{2}$

Probabilidade de Erro Aproximada pelo limitante da união

$$P_e = \overline{N_{viz}}\, Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{2N_0}}\right)$$

Transmissão de pacotes com erros de bits independentes

$$P_{e,pac} = 1 - (1 - P_b)^{N_b}$$

## Função Q

| *x* | Q(x) | *X* | Q(x) |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 4,60E-001 | 3,1 | 9,68E-004 |
| 0,2 | 4,21E-001 | 3,2 | 6,87E-004 |
| 0,3 | 3,82E-001 | 3,3 | 4,83E-004 |
| 0,4 | 3,45E-001 | 3,4 | 3,37E-004 |
| 0,5 | 3,09E-001 | 3,5 | 2,33E-004 |
| 0,6 | 2,74E-001 | 3,6 | 1,59E-004 |
| 0,7 | 2,42E-001 | 3,7 | 1,08E-004 |
| 0,8 | 2,12E-001 | 3,8 | 7,23E-005 |
| 0,9 | 1,84E-001 | 3,9 | 4,81E-005 |
| 1,0 | 1,59E-001 | 4,0 | 3,17E-005 |
| 1,1 | 1,36E-001 | 4,1 | 2,07E-005 |
| 1,2 | 1,15E-001 | 4,2 | 1,33E-005 |
| 1,3 | 9,68E-002 | 4,3 | 8,54E-006 |
| 1,4 | 8,08E-002 | 4,4 | 5,41E-006 |
| 1,5 | 6,68E-002 | 4,5 | 3,40E-006 |
| 1,6 | 5,48E-002 | 4,6 | 2,11E-006 |
| 1,7 | 4,46E-002 | 4,7 | 1,30E-006 |
| 1,8 | 3,59E-002 | 4,8 | 7,93E-007 |
| 1,9 | 2,87E-002 | 4,9 | 4,79E-007 |
| 2,0 | 2,28E-002 | 5,0 | 2,87E-007 |
| 2,1 | 1,79E-002 | 5,1 | 1,70E-007 |
| 2,2 | 1,39E-002 | 5,2 | 9,96E-008 |
| 2,3 | 1,07E-002 | 5,3 | 5,79E-008 |
| 2,4 | 8,20E-003 | 5,4 | 3,33E-008 |
| 2,5 | 6,21E-003 | 5,5 | 1,90E-008 |
| 2,6 | 4,66E-003 | 5,6 | 1,07E-008 |
| 2,7 | 3,47E-003 | 5,7 | 5,99E-009 |
| 2,8 | 2,56E-003 | 5,8 | 3,32E-009 |
| 2,9 | 1,87E-003 | 5,9 | 1,82E-009 |
| 3,0 | 1,35E-003 | 6,0 | 9,87E-010 |

UnB

departamento de engenharia elétrica