

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 3 – 2017/1 (20/06/2017)

Aluno: _____

Matrícula: _____

Instruções

- A prova consiste de quatro questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h00
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a notas de aula, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda as folhas de resposta entregues ao professor devem conter o nome e a matrícula.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	Nota
Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Total	

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 1 (2,5 pontos)

Um canal de comunicações é caracterizado pela resposta impulsional $h(t) = e^{-t/\tau}, 0 \leq t \leq \tau$, com $\tau = 1\mu s$.

- No receptor implementamos um equalizador MLSE com 4096 estados diferentes. Supondo que utilizamos QPSK na transmissão, qual a taxa de dados que podemos atingir se quisermos que o equalizador leve em consideração todos os multipercursos do canal?
- Com os parâmetros encontrados acima, projete um equalizador ZF (apenas a transformada z é suficiente)

- Sabemos que o número de estados é $M^L = 4^L = 4096$, em que $L = \log_4 4096 = 6$. Sabemos ainda que $L = \tau/T_s$, e portanto

$$T_s = \frac{\tau}{6} \Rightarrow R_s = \frac{1}{T_s} = 6 \text{ Mbauds}$$

$$R_b = R_s \log_2 M = 12 \text{ Mbps}$$

-

$$h[k] = h(kT_s) = e^{-k/6}, \quad 0 \leq k \leq 6$$
$$H(z) = 1 + e^{-1/6}z^{-1} + e^{-2/6}z^{-2} + e^{-3/6}z^{-3} + e^{-4/6}z^{-4} + e^{-5/6}z^{-5} + e^{-1}z^{-6}$$
$$F_{ZF}(z) = \frac{1}{H(z)}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 2 (2,5 pontos)

Ao projetar um sistema de transmissão, um engenheiro pode escolher entre as seguintes matrizes geradoras (com diferença nas duas últimas colunas)

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Qual das duas ele deverá escolher? Por que?
- Considerando a matriz escolhida, ache sua matriz de verificação de paridade.
- Qual o ganho de codificação que pode ser obtido para uma $BER = 10^{-5}$, considerando BPSK e decodificação soft?

- Devemos verificar as propriedades de distância das duas matrizes, gerando todas as palavras possíveis

\mathbf{m}_k	$\mathbf{c}_{1,k} = \mathbf{m}_k \mathbf{G}_1$	$\mathbf{c}_{2,k} = \mathbf{m}_k \mathbf{G}_2$
0000	00000000	00000000
0001	001001011	001001011
0010	000110011	000110000
0011	001111000	001111011
0100	011000101	011000111
0101	010001110	010001100
0110	011110110	011110111
0111	010111101	010111100
1000	100100101	100100111
1001	101101110	101101100
1010	100010110	100010111
1011	101011101	101011100
1100	111100000	111100000
1101	110101011	110101011
1110	111010011	111010000
1111	110011000	110011011

e vemos que o código gerado por \mathbf{G}_1 tem distância mínima igual 4, enquanto o código gerado por \mathbf{G}_2 tem distância mínima igual a 2, e por isso devemos escolher a matriz \mathbf{G}_1 .

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

- b) Para achar a matriz de verificação de paridade devemos encontrar o código sistemático equivalente.

Podemos fazer as seguintes operações:

- i) Trocar as linhas \mathbf{g}_2 e \mathbf{g}_3

$$\mathbf{G}_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- ii) Fazer $\mathbf{g}_0 = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_3$ e $\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2$

$$\mathbf{G}_{sist} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{I}_4 \mathbf{P}]$$

e, assim,

$$\mathbf{H} = [\mathbf{P}^T \mathbf{I}_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

Sem codificação, temos

$$Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 10^{-5} \Rightarrow \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = 4,3 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 9,245 = 9,66 \text{ dB}$$

Observando-se a lista de palavras código, temos que $d_{min} = 4$ e que temos $N_{min} = 9$ palavras com peso mínimo. O código tem taxa $R = \frac{4}{9}$. Queremos então

$$p_{b,c} \approx 9 \frac{4}{9} Q\left(\sqrt{2 \frac{4}{9} \frac{E_b}{N_0}}\right) = 4Q\left(\sqrt{\frac{32}{9} \frac{E_b}{N_0}}\right) = 10^{-5}$$
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{32}{9} \frac{E_b}{N_0}} = 4,6 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 5,95 = 7,75 \text{ dB}$$

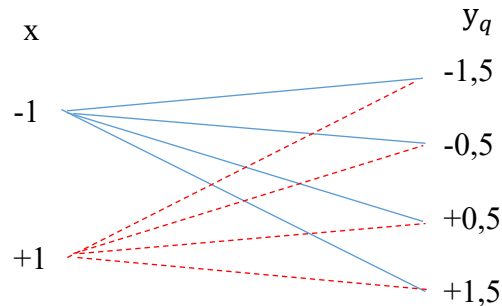
e o ganho é $G = 9,66\text{dB} - 7,75\text{dB} = 1,91\text{dB}$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 3 (2,5 pontos)

Um sistema de comunicações emprega modulação BPSK binária em um canal AWGN, ou seja, dada uma entrada $x = \pm 1$, temos no receptor $y = x + n$. O sinal recebido é quantizado em 2 bits, de modo que temos na saída y_q 4 níveis possíveis, $\{-1,5; -0,5; +0,5; +1,5\}$. Este sistema pode ser representado da seguinte forma:



Se tivermos uma razão sinal-ruído de 0dB, qual a capacidade deste canal?

Dicas:

- a informação mútua será maximizada se a entrada for uniforme
- os limiares de quantização são $-1; 0; +1$, e lembre que $Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Pr(x > x)$, se x for uma v.a. Gaussiana com média μ e variância σ^2 . Com isso ache $\Pr(y_q = y|x = x)$

Sabemos que se $x = -1$, portanto $y = \mathcal{N}(-1, \sigma^2)$, com $\sigma^2 = 1$, pois $RSR = 0\text{dB} = 1$.

As probabilidades de transição são

$$\begin{aligned}\Pr(y_q = -1,5|x = -1) &= \Pr(y < -1) = Q(0) = 0,5 \\ \Pr(y_q = -0,5|x = -1) &= \Pr(y > -1) - \Pr(y > 0) = Q(0) - Q(1) = 0,341 \\ \Pr(y_q = 0,5|x = -1) &= \Pr(y > 0) - \Pr(y > 1) = Q(1) - Q(2) = 0,136 \\ \Pr(y_q = 1,5|x = -1) &= 0,023\end{aligned}$$

E, por simetria

$$\begin{aligned}\Pr(y_q = -1,5|x = +1) &= \Pr(y_q = +1,5|x = -1) = 0,023 \\ \Pr(y_q = -0,5|x = +1) &= \Pr(y_q = +0,5|x = -1) = 0,136 \\ \Pr(y_q = +0,5|x = +1) &= \Pr(y_q = -0,5|x = -1) = 0,341 \\ \Pr(y_q = +1,5|x = +1) &= \Pr(y_q = -1,5|x = -1) = 0,5\end{aligned}$$

Considerando a dica (a), sabemos que, para maximizar a capacidade, $\Pr(x = -1) = \Pr(x = +1) = \frac{1}{2}$. Podemos achar as probabilidades na saída

$$\begin{aligned}\Pr(y_q = -1,5) &= \Pr(x = -1) \Pr(y_q = -1,5|x = -1) + \\ &\quad \Pr(x = +1) \Pr(y_q = -1,5|x = +1) = \\ &= \frac{1}{2}(0,5) + \frac{1}{2}(0,023) = 0,2615\end{aligned}$$

Pela simetria, vemos ainda que

$$\Pr(y_q = +1,5) = \Pr(y_q = -1,5) = 0,2615$$

e

$$\Pr(y_q = +0,5) = \Pr(y_q = -0,5) = 0,2385$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

A capacidade é dada por

$$C = \max I(x,y) = \max H(y) - H(y|x)$$

com

$$\max H(y) = -2(0,2615) \log_2 0,2615 - 2(0,2385) \log_2 0,2385 = 1,9985$$

e, lembrando que a entrada é equiprovável,

$$H(y|x) = H(y|x = -1,5)$$

$$= -0,5 \log_2 0,5 - 0,341 \log_2 0,341 - 0,136 \log_2 0,136 - 0,023 \log_2 0,023$$
$$= 1,5459$$

e

$$C = 1,9985 - 1,5459 = 0,4526 \text{ bits}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Questão 4 (2,5 pontos)

Um sistema OFDM é projetado para operar em um canal com atraso máximo de $1\mu s$, com uma taxa de amostragem de 10MHz. O prefixo cíclico é escolhido de modo que ele ocupe no máximo 20% do tempo de duração do símbolo total, ou seja, $\frac{T_G}{T} \leq 0,2$.

- Sabendo que o número de subportadoras N deve ser uma potência de 2, qual o valor de N ? Qual o intervalo de símbolo útil T_s ?
- Se utilizarmos apenas 80% das subportadoras para enviar dados, e empregarmos 16-QAM com código de taxa $R = 2/3$, qual a taxa de dados alcançada?

a)

$$\frac{T_G}{T_s + T_G} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow T_s \geq 4T_G = 4\mu s$$
$$T_a = 0,1 \mu s$$
$$N = \frac{T_s}{T_a} \Rightarrow T_s = NT_a \geq 4\mu s \Rightarrow N \geq 40 \Rightarrow N = 64$$
$$T_s = NT_a = 6,4\mu s$$

b)

$$N_d \approx 0,8N = 51$$
$$R_b = \frac{N_b R \log_2 M}{T_s + T_G} = \frac{51 \left(\frac{2}{3}\right) 4}{7,4\mu s} = 18,38 \text{ Mbps}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Fórmulas Úteis

Transmissão Digital

$B_T = R_s(1 + \rho)$ em banda passante

$$P_{b,BPSK} = P_{b,QPSK} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right), \quad P_{e,M-PSK} \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b \log_2 M}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right)$$

$$P_{e,M-QAM} \approx 4\left(\frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M E_b}{M-1 N_0}}\right) \text{ apenas para QAM quadrado } (M=4^n)$$

Equalização

$$F_{ZF}(z) = \frac{1}{H(z)}, \quad F_{MMSE}(z) = \frac{H^*(z)}{|H(z)|^2 + \frac{S_x(z)}{S_n(z)}}$$

Equalização com número limitado de taps

$$\begin{bmatrix} R_y[0] & R_y[-1] & \dots & R_y[-M] \\ R_y[1] & R_y[0] & \dots & R_y[1-M] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_y[M] & R_y[M-1] & \dots & R_y[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[0] \\ f[1] \\ \vdots \\ f[M] \end{bmatrix} = E_s \begin{bmatrix} h^*[u] \\ h^*[u-1] \\ \vdots \\ h^*[0] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$R_y[m] = E\{y[n+m]y^*[n]\},$$

Teoria da Informação

$$h(x) = -\log_2 P(x)$$

$$H(x) = -\sum P_x(x) \log_2 P_x(x)$$

$$I(x, y) = H(x) - H(x|y) = H(y) - H(y|x) = H(x) + H(y) - H(x, y)$$

Códigos de bloco

$$\text{Número de erros corrigíveis } t = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor$$

Probabilidade de erro
com decodificação *hard*

$$p_{b,c} \approx \binom{n-1}{t} (p_c)^{t+1}, \text{ em que, para BPSK, } p_c = Q\left(\sqrt{\frac{2RE_b}{N_0}}\right)$$

com decodificação *soft*

$$p_{b,c} \approx N_{\min} \frac{d_{\min}}{N} Q\left(\sqrt{\frac{2Rd_{\min}E_b}{N_0}}\right)$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Função Q

x	Q(x)	X	Q(x)
0,1	4,60E-001	3,1	9,68E-004
0,2	4,21E-001	3,2	6,87E-004
0,3	3,82E-001	3,3	4,83E-004
0,4	3,45E-001	3,4	3,37E-004
0,5	3,09E-001	3,5	2,33E-004
0,6	2,74E-001	3,6	1,59E-004
0,7	2,42E-001	3,7	1,08E-004
0,8	2,12E-001	3,8	7,23E-005
0,9	1,84E-001	3,9	4,81E-005
1,0	1,59E-001	4,0	3,17E-005
1,1	1,36E-001	4,1	2,07E-005
1,2	1,15E-001	4,2	1,33E-005
1,3	9,68E-002	4,3	8,54E-006
1,4	8,08E-002	4,4	5,41E-006
1,5	6,68E-002	4,5	3,40E-006
1,6	5,48E-002	4,6	2,11E-006
1,7	4,46E-002	4,7	1,30E-006
1,8	3,59E-002	4,8	7,93E-007
1,9	2,87E-002	4,9	4,79E-007
2,0	2,28E-002	5,0	2,87E-007
2,1	1,79E-002	5,1	1,70E-007
2,2	1,39E-002	5,2	9,96E-008
2,3	1,07E-002	5,3	5,79E-008
2,4	8,20E-003	5,4	3,33E-008
2,5	6,21E-003	5,5	1,90E-008
2,6	4,66E-003	5,6	1,07E-008
2,7	3,47E-003	5,7	5,99E-009
2,8	2,56E-003	5,8	3,32E-009
2,9	1,87E-003	5,9	1,82E-009
3,0	1,35E-003	6,0	9,87E-010