Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Prova 0 – 2017/2 (17/08/2017)

Aluno:____

Matrícula: ____

Instruções

- A prova consiste de 4 (quatro) questões discursivas
- A prova terá a duração de 2h
- A prova pode ser feita a lápis ou caneta
- Não é permitida consulta a qualquer material, todas as fórmulas necessárias serão dadas no final da prova.
- Toda a resposta deve estar contida no espaço reservado para cada questão. Folhas de rascunho serão distribuídas caso necessário, mas não devem ser entregues.
- Calculadoras podem ser utilizadas, mas todas as contas e respostas devem ser justificadas

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
Total	

Questão 1 (2,5 pontos)

Podemos definir as transformadas de Fourier de seno e cosseno como

$$\mathcal{F}_s\{g(t)\} = \int_{\infty}^{\infty} g(t)\sin(2\pi f t)\,dt$$

$$\mathcal{F}_c\{g(t)\} = \int_{\infty}^{\infty} g(t)\cos(2\pi f t)\,dt$$

A partir das transformadas de Fourier conhecidas e de suas propriedades, dadas no final da prova, encontre as transformadas de seno e cosseno para

$$g(t) = \begin{cases} A & ,0 \le t \le B \\ 0 & ,c.c. \end{cases}$$

Sabemos que

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \int_{\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi f t}dt = \int_{\infty}^{\infty} g(t)\cos(2\pi f t)\,dt - j\int_{\infty}^{\infty} g(t)\sin(2\pi f t)\,dt$$
$$= \mathcal{F}_c\{g(t)\} - j\mathcal{F}_s\{g(t)\}$$

Portanto, se $g(t) \in \mathbb{R}$, tanto $\mathcal{F}_c\{g(t)\}$ quanto $\mathcal{F}_c\{g(t)\}$ também $\in \mathbb{R}$, e temos que

$$Re\{\mathcal{F}\{g(t)\}\} = \mathcal{F}_c\{g(t)\}$$
$$Im\{\mathcal{F}\{g(t)\}\} = -\mathcal{F}_s\{g(t)\}$$

Temos ainda que

$$g(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{B} - \frac{1}{2}\right) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{B}{2}}{B}\right)$$

e, portanto

$$G(f) = A|B|\mathrm{sinc}(\pi f B)e^{-j\pi f B}$$
$$= A|B|\mathrm{sinc}(\pi f B)\cos(\pi f B) - jA|B|\mathrm{sinc}(\pi f B)\sin(\pi f B)$$

Deste modo,

$$\mathcal{F}_c\{g(t)\} = A|B|\mathrm{sinc}(\pi f B)\cos(\pi f B) = \frac{A|B|\sin(2\pi f B)}{\pi f B}$$

$$\mathcal{F}_s\{g(t)\} = A|B|\mathrm{sinc}(\pi f B)\sin(\pi f B) = \frac{A|B|\sin^2(\pi f B)}{\pi f B}$$

Questão 2 (2,5 pontos)

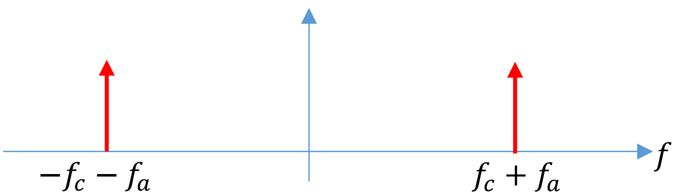
a) Considere que um sinal SSB é gerado em uma portadora de frequência f_c como
$$\varphi_{ssb}(t) = A\cos(2\pi f_a t)\cos(2\pi f_c t) - A\sin(2\pi f_a t)\sin(2\pi f_c t)$$
Qual o sinal modulante? Esboce o espectro do sinal modulado. A modulação é USB ou LSB?

b) Considere agora um sinal AM na mesma portadora,
$$\varphi_{AM}(t) = B(1 + \mu\cos(2\pi f_b t))\cos(2\pi f_c t)$$
Esboce o espectro deste sinal. Qual a sua eficiência de potência?

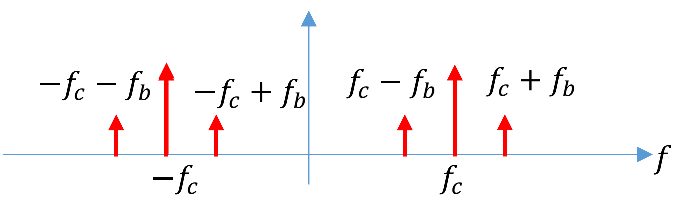
c) Considere agora que o sinal AM esteja interferindo no sinal SSB, e que $f_b < f_a$. Ache a razão sinal-interferência (RSI) na saída do demodulador SSB.

a)
sabemos que um sinal USB é construído como
$$\varphi_{USB} = A[m(t)\cos(2\pi f_c t) - m_h(t)\sin(2\pi f_c t)]$$
E um LSB como
$$\varphi_{LSB} = A[m(t)\cos(2\pi f_c t) + m_h(t)\sin(2\pi f_c t)]$$
Sabemos ainda que
$$\mathcal{H}\{\cos(2\pi f_a t)\} = \sin(2\pi f_a t),$$
ou seja, temos um sinal USB, cujo sinal modulante é $m(t) = A\cos(2\pi f_a t)$.

Poderíamos ainda usar algumas identidades trigonométricas, de modo que
$$\begin{aligned}\varphi_{ssb} &= \frac{A}{2}\left[\cos\left(2\pi(f_c - f_a)\right) + \cos\left(2\pi(f_c + f_a)\right) - \cos\left(2\pi(f_c - f_a)\right)\right.\\ &\qquad \left.+ \cos\left(2\pi(f_c + f_a)\right)\right]\\ &= A\cos\left(2\pi(f_c + f_a)\right)\end{aligned}$$
Ou seja, o sinal modulado tem um componente em uma frequência acima de f_c.



b)



O sinal de informação é $s(t) = B\mu\cos(2\pi f_b t)\cos(2\pi f_c t)$, cuja potência é $P_s = \frac{B^2\mu^2}{4}$.
A portadora, que não transmite informação é $c(t) = B\cos(2\pi f_c t)$, com potência $P_c = \frac{B^2}{2}$.

A eficiência é dada por $\eta = \frac{P_s}{P_s + P_c} = \frac{\frac{\mu^2}{4}}{\frac{\mu^2}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 2}$

d) Um receptor SSB é como um receptor DSB-SC, multiplica-se o sinal recebido por $2\cos(2\pi f_c t)$, e aplica-se um filtro passa-baixa $h_{LP}(t)$.

O sinal desejado após a recepção é $m(t) = A\cos(2\pi f_a t)$, com potência $P_s = \frac{A^2}{2}$

O sinal interferente é

$$\begin{aligned} i(t) &= \left(2B(1+\mu\cos(2\pi f_b t))\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t)\right) * h_{LP}(t) \\ &= B(1+\mu\cos(2\pi f_b t)) \end{aligned}$$

Com potência

$$P_I = B^2\left(1+\frac{\mu^2}{2}\right)$$

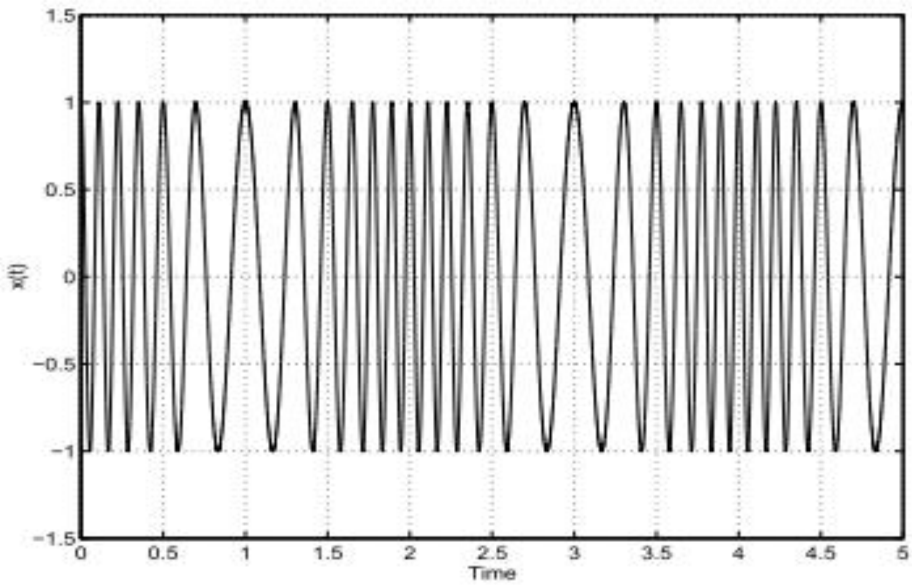
e a razão sinal-interferência será

$$RSI = \frac{P_s}{P_I} = \frac{A^2}{B^2(2+\mu^2)}$$

Comunicações Digitais
Prof. André Noll Barreto

Questão 3 (2,5 pontos)

Dado o sinal modulado abaixo em uma portadora de 6Hz:



a) Este é um sinal AM ou FM? Por que?
b) Sabendo que o sinal modulante é periódico, qual é sua frequência?
c) Sabendo que o sinal modulante é uma senoide, qual a largura de banda aproximada do sinal modulado?

a) Nota-se que é um sinal de amplitude constante, e com frequência variável, e, consequentemente, é um sinal FM (ou PM)
b) A frequência depende do sinal modulante, e percebemos que a frequência se repete em um intervalo de $T = 2\text{s}$, e, portanto, sua frequência é de $f_m = \frac{1}{T} = 0{,}5\text{Hz}$
c) Podemos ver que o período varia entre 0,2s e 1s, ou seja a frequência instantânea $f_i(t)$ varia entre 1Hz e 5 Hz, e $\Delta f = \max|f_i(t) - f_c| = 2\text{Hz}$.
A banda aproximada é, segundo a regra de Carson,
$$B \approx 2(\Delta f + B) = 2(2 + 0{,}5) = 5\text{Hz}$$

Questão 4 (2,5 pontos)

Em um sistema de comunicações desejamos digitalizar e multiplexar os sinais de 10 usuários diferentes, sendo que o sinal de cada usuário tem uma largura de banda de 4MHz, uma amplitude pico-a-pico de 4V e uma potência de .04W (considerando um resistor de 1Ω). Se fizermos uma quantização uniforme, de modo que a razão sinal-ruído de quantização seja maior que 30dB, e amostrarmos o sinal a uma taxa 25% maior que a taxa de Nyquist, qual será a taxa de bits gerada?

$$RSR_{\text{uniforme}} = 3L^2 \frac{P_m}{m_p^2} = 3L^2 \frac{0{,}04}{2^2} = 0{,}03L^2 > 1000 \Rightarrow L > \sqrt{33333} = 182{,}6$$

Como $L = 2^n$, escolhemos $L = 256$, e, portanto, $n = 8$.

A taxa de amostragem é $f_s = 2B \times 1{,}25 = 10\text{MHz}$

A taxa de bits total é $R_b = N_u n\, f_s = 10 \times 8 \times 10 \times 10^6 = 800$ Mbps

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Fórmulas Úteis

Identidades Trigonométricas:

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \qquad \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\left(x + \tan^{-1}(-b/a)\right)$$

Integrais:

$$\int x \sin(ax)\, dx = \frac{1}{a^2}(\sin(ax) - ax\cos(ax)) \qquad \int x^2 \sin(ax) dx = \frac{1}{a^3}(2ax\sin(ax) + 2\cos(ax) - a^2x^2\cos(ax))$$

$$\int x \cos(ax) dx = \frac{1}{a^2}(\cos(ax) + ax\sin(ax)) \qquad \int x^2 \cos(ax) dx = \frac{1}{a^3}(2ax\cos(ax) - 2\sin(ax) + a^2x^2\sin(ax))$$

$$\int xe^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) \qquad \int x^2 e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \qquad \int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2 + a^2)$$

$$\int \frac{x}{a^4 + x^4} dx = \frac{1}{2a^2}\tan^{-1}\frac{x^2}{a^2}$$

Fórmula de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\mathrm{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\mathrm{sen}\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Convolução

$$g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)h(t - \tau)d\tau = h(t) * g(t)$$

Série de Fourier Generalizada: $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n(t) c_n = \frac{1}{E_n}\int_{T_0} g(t) x_n^* dt$

Série de Fourier Trigonométrica:

$$g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_0 t + \theta_n)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} g(t)dt;\ a_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} g(t)\cos(2\pi n f_0 t)\,;\ b_n = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} g(t)\sin(2\pi n f_0 t)$$

$$C_0 = a_0;\ C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

Série de Fourier Exponencial:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2\pi n f_0 t} D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} g(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n};\ D_{-n} = \frac{C_n}{2} e^{-j\theta_n}$$

Definições

$$\mathrm{sinc}\ t = \frac{\sin t}{t} \qquad \mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 1/2 & |t| = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

UnB

departamento de engenharia elétrica

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Tabela de Transformadas de Fourier:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df \overset{F}{\Leftrightarrow} G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$\begin{array}{ccc}
\delta(t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & 1 \\
1 & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \delta(f) \\
t^n e^{-at}u(t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{n!}{(a+j2\pi f)^{n+1}} \\
e^{-a|t|} & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2} \\
e^{j2\pi f_0 t} & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \delta(f-f_0) \\
\cos(2\pi f_0 t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)] \\
\sin(2\pi f_0 t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)] \\
u(t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{1}{2}\delta(f)+\dfrac{1}{j2\pi f} \\
\mathrm{sgn}(t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{1}{j\pi f} \\
\mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{\tau}\right) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & |\tau|\,\mathrm{sinc}(\pi f\tau) \\
\mathrm{sinc}(2\pi Bt) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{1}{|2B|}\mathrm{rect}\left(\dfrac{f}{2B}\right) \\
\Delta\left(\dfrac{t}{\tau}\right) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{\tau}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\dfrac{\pi f\tau}{2}\right) \\
\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\dfrac{n}{T}\right) \\
k_1 g_1(t)+k_2 g_2(t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & k_1 G_1(f)+k_2 G_2(f) \\
G(t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & g(-f) \\
g(at) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{1}{|a|}G\left(\dfrac{f}{a}\right) \\
g(t-t_0) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & G(f)e^{-j2\pi f t_0} \\
g(t)e^{j2\pi f_0 t} & \overset{F}{\Leftrightarrow} & G(f-f_0) \\
g_1(t)*g_2(t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & G_1(f)G_2(f) \\
g_1(t)g_2(t) & \overset{F}{\Leftrightarrow} & G_1(f)*G_2(f) \\
\dfrac{d^n g(t)}{dt^n} & \overset{F}{\Leftrightarrow} & (j2\pi f)^n G(f) \\
\displaystyle\int_{-\infty}^{t} g(x)dx & \overset{F}{\Leftrightarrow} & \dfrac{G(f)}{j2\pi f}+\dfrac{1}{2}G(0)\delta(f)
\end{array}$$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

$$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} g_n e^{-j2\pi kn/N} \quad g_n = T_a g(nT_a) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} G_k e^{j2\pi kn/N}$$

Comunicações Digitais

Prof. André Noll Barreto

Tabela de Transformadas de Hilbert:

$g(t)$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$g_h(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\alpha)}{t-\alpha}d\alpha$	$g_h(t)$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$-g(t)$
$\sin t$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$-\cos t$	$\cos t$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$\sin t$
$\frac{1}{t^2+1}$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$\frac{t}{t^2+1}$	$\mathrm{sinc} t$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$\frac{1-\cos t}{t}$
$\delta(t)$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$\frac{1}{\pi t}$	$\mathrm{rect} t$	$\overset{H}{\Rightarrow}$	$\frac{1}{\pi}\ln\left\lvert\frac{t+1/2}{t-1/2}\right\rvert$

Regra de Carson $B \approx 2(\Delta f + B)$

Razão sinal-ruído com quantização

$RSR_{\text{uniforme}} = 3L^2\frac{P_m}{m_p^2}$ $\qquad$ $RSR_{\text{lei-A}} = 3L^2\frac{1}{(\ln(A))^2}$